DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.10.007

Navier-Stokes 方程的回溯两水平有限元变分多尺度方法①

杨晓成，　尚月强

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：基于两重网格离散和回溯两水平方法，提出了一种求解大雷诺数不可压缩流定常 Navier-Stokes 方程的回溯两水平有限元变分多尺度方法. 其基本思想是：首先在一粗网格上求解带有亚格子模型稳定项的 Navier-Stokes 方程，然后在细网格上求解一个亚格子模型稳定化的线性 Oseen 问题，最后又回到粗网格上求解全线性化校正问题. 通过适当的稳定化参数和粗细网格尺寸的选取，这些算法能取得最优渐近收敛阶. 我们通过数值模拟，验证了其高效性.

关　键　词：变分多尺度方法；有限元；不可压缩流；Navier-Stokes 方程；两重网格

中图分类号：O241.82　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2017)10－0047－11

设 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ ($d=2$ 或 3) 中具有 Lipschitz 连续的有界集. 我们考虑下面的 Navier-Stokes 问题：

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\nabla p=\boldsymbol{f},\ \text{in}\ \Omega \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0,\ \text{in}\ \Omega \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},\ \text{on}\ \partial\Omega \tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{u}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^d$ 是速度，$\boldsymbol{p}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ 是压力，$\boldsymbol{f}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^d$ 表示体积力，ν 表示粘性系数. 给定一个特征长度 L 和一个特征速度 U，定义雷诺数为 $\mathrm{Re}=UL/\nu$.

Navier-Stokes 方程是描述流体运动规律的一类典型的非线性方程，其研究对人们认识和控制湍流格外重要. 两水平算法最早是由许进超教授提出的[1]，被 Layton W 和 Lenferink 等人[2] 最早应用到定常 Navier-Stokes 方程，随后诸如何银年和李开泰等人[3] 对定常 Navier-Stokes 方程的两水平和多水平算法方面都做了大量工作，这些方法的主要思想是首先在粗网格上解一个完全非线性问题，然后在细网格上解一个线性问题. 由于完全非线性问题要在粗网格上求解，故而难以模拟大雷诺数流问题. 本文中，我们将两重网格离散方法[1] 与文献[4] 中算法 1 相结合，提出了求解大雷诺数 Navier-Stokes 方程的一种回溯两水平有限元变分多尺度方法. 一方面，与文献[4] 中算法 1 相比较，我们的方法能够模拟大雷诺数流；另一方面，和普通的有限元变分多尺度方法[5] 相比，我们的方法可以节省大量的时间.

本文内容安排如下：第 1 节给出了一些关于有限元空间和 Navier-Stokes 方程的基本知识；第 2 节设计并分析回溯两水平有限元变分多尺度方法；第 3 节给出数值模拟以验证算法的有效性；第 4 节给出相关结论.

---

① 收稿日期：2016－11－25
基金项目：国家自然科学基金项目(11361016)；重庆市基础与前沿研究计划(cts2016jcyjA0348).
作者简介：杨晓成(1989－)，男，甘肃平凉人，硕士研究生，主要从事偏微分方程数值解的研究.
通信作者：尚月强，博士，教授.

1 预备知识

下面，我们引出 Hilbert 空间：

$$\boldsymbol{X}=H_0^1(\Omega)^d,\ \boldsymbol{M}=L_0^2(\Omega)=\{q\in L^2(\Omega):\int_\Omega q\,\mathrm{d}x=0\}$$

$\|\cdot\|_k$ 和 $|\cdot|_k$ 分别表示通常的 Sobolev 空间 $\boldsymbol{H}^k(\Omega)^d(k\geqslant 0)$ 的范数和半范数，$(\cdot,\cdot)$ 表示 $\boldsymbol{L}^2(\Omega)^d(d=1,2,3)$ 的标准内积. 定义三线性形式：$b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$，$\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{X}$. 其满足下列性质[4]：

$$\begin{aligned}
&|b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|\leqslant C|\boldsymbol{u}|_1\|\boldsymbol{v}\|_{1,3}\|\boldsymbol{w}\|_0 && \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{W}^{1,3}(\Omega)\\
&|b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|\leqslant C\|\boldsymbol{u}\|_0|\boldsymbol{v}|_{1,\infty}\|\boldsymbol{w}\|_0 && \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{W}^{1,\infty}(\Omega)\\
&|b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|\leqslant C\|\boldsymbol{u}\|_0|\boldsymbol{v}|_{1,\infty}|\boldsymbol{w}|_1 && \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{W}^{1,\infty}(\Omega)\\
&|b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|\leqslant C|\boldsymbol{u}|_1|\boldsymbol{v}|_1|\boldsymbol{w}|_1 && \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{X}\\
&|b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})|\leqslant C\|\boldsymbol{u}\|_0^{1-s}|\boldsymbol{u}|_1^s|\boldsymbol{v}|_1|\boldsymbol{w}|_1 && \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{X}
\end{aligned}\tag{4}$$

其中：当 $d=2$ 时，$s=\varepsilon$ 为任意小；当 $d=3$ 时，$s=\dfrac{1}{2}$.

考虑方程(1)－(3)的变分形式：求解 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})\in\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{M}$，使得满足

$$\nu(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-(\nabla\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{p})+(\nabla\cdot\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})\qquad\forall(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{M}\tag{5}$$

其中双线性形式 $(\nabla\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{p})$ 在 $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{M}$ 上是连续的且满足著名的 inf-sup 条件：存在一个常数 $\beta>0$ 使得

$$\beta\|\boldsymbol{q}\|_0\leqslant\sup_{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{v}\neq 0}\frac{(\nabla\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})}{\|\nabla\boldsymbol{v}\|_0}\qquad\forall\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{M}\tag{6}$$

引理 1[3] 设 X' 是 $H_0^1(\Omega)^d$ 的对偶空间，$f\in X'$，方程(1)－(3)存在一个非奇异解 u 满足

$$\|\nabla\boldsymbol{u}\|_0\leqslant\nu^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_{-1},\quad\|\boldsymbol{f}\|_{-1}=\sup_{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{X}}\frac{(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})}{\|\nabla\boldsymbol{v}\|_0}$$

设 $T^\mu(\Omega)=\{K\}(\mu=H,h$ 且 $H>h)$ 是 Ω 的一个网格剖分. 细网格 $T^h(\Omega)$ 是粗网格 $T^H(\Omega)$ 的加密. 基于 $T^\mu(\Omega)=\{K\}$ 的有限元空间对 (X_μ,M_μ) 满足下列假设：

(A1) 逼近性：对任何 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})\in(H_0^1(\Omega)\cap H^{k+1}(\Omega))^d\times(L_0^2(\Omega)\cap H^k(\Omega))$，满足

$$\inf_{\boldsymbol{u}_\mu\in\boldsymbol{X}_\mu,\ \boldsymbol{p}_\mu\in\boldsymbol{M}_\mu}\{\|(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\mu)\|_0+\mu(\|\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\mu)\|_0+\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_\mu\|_0)\}\leqslant C\mu^{k+1}(|u|_{k+1}+|\boldsymbol{p}|_k)\tag{7}$$

(A2) inf-sup 条件：存在一个常数 $\beta>0$ 使得

$$\beta\|\boldsymbol{q}_\mu\|_0\leqslant\sup_{\boldsymbol{v}_\mu\in\boldsymbol{X}_\mu,\ \boldsymbol{v}_\mu\neq 0}\frac{(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_\mu,\boldsymbol{q}_\mu)}{\|\nabla\boldsymbol{v}_\mu\|_0}\qquad\forall\boldsymbol{q}_\mu\in\boldsymbol{M}_\mu\tag{8}$$

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{M}\qquad\boldsymbol{Y}^h=\boldsymbol{X}_h\times\boldsymbol{M}_h\qquad\boldsymbol{Y}^H=\boldsymbol{X}_H\times\boldsymbol{M}_H$$

$$|||(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})|||:=(|\boldsymbol{v}|_1^2+\|\boldsymbol{q}\|_0^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{R}_1=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)^d:\boldsymbol{v}|_K\in(P_1)^d,\ \forall K\in T^\mu(\Omega)\}$$

这里 P_1 是次数不超过 1 的多项式空间. 亚格子模型基于一个椭圆算子 $\Pi_\mu:X\longrightarrow R_1$ 其定义为[6]

$$(\nabla\Pi_\mu\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})=(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})\qquad\forall\boldsymbol{u}\in X,\ v\in R_1\tag{9}$$

保持如下估计[7]：

$$\|\nabla\Pi_\mu\boldsymbol{v}\|_0\leqslant\|\nabla\boldsymbol{v}\|_0\qquad\forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{X}\tag{10}$$

利用投影算子，我们定义亚格子稳定化项：

$$G_\mu(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\alpha(\nabla(I-\Pi_\mu)\boldsymbol{u},\nabla(I-\Pi_\mu)\boldsymbol{v})=\alpha(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})-\alpha(\nabla\Pi_\mu\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})\qquad\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in X\tag{11}$$

这里 $0<\alpha<1$ 是一个稳定化参数. 定义连续双线性形式：

$$A^H[(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p});(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})]:=(\nu+\alpha)(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-(\nabla\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{p})+(\nabla\cdot\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})\tag{12}$$

$$B^H[(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p});(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})]:=(\nu+\alpha)(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+$$

$$b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v})-(\nabla\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{p})+(\nabla\cdot\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}) \tag{13}$$

为了方便后面定理的推导，给出引理 2，3，推导过程可参考文献[4].

引理 2　存在一个不依赖于 h，H 的常数 $\gamma>0$ 满足：

$$\inf_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}\in Y^h}\sup_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in Y^h}\frac{A^H[(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p});(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})]}{|||(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})|||\ \ |||(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})|||}\geqslant\gamma>0 \tag{14}$$

$$\inf_{(\boldsymbol{u},p)\in Y^h}\sup_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in Y^h}\frac{B^H[(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p});(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})]}{|||(u,p)|||\ \ |||(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})|||}\geqslant\gamma>0 \tag{15}$$

为了误差分析的需要，我们引进 Galerkin 投影(Q,R)：$Y\longrightarrow Y^H$ 如下：

$$B^H[(\boldsymbol{w},\boldsymbol{r});(v-Q(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{q}-R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}))]=0\qquad\forall(\boldsymbol{w},\boldsymbol{r})\in\boldsymbol{Y}^H,(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in\boldsymbol{Y} \tag{16}$$

引理 3　投影(Q,R)满足下列性质：

(i) $|||(\boldsymbol{v}-Q(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{q}-R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}))|||\leqslant C\,|||(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})|||$，$\forall(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in\boldsymbol{Y}$；

(ii) $||\boldsymbol{v}-Q(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})||_\theta\leqslant CH^{1-\theta}\,|||(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})|||$，$\forall(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in Y$，$0\leqslant\theta\leqslant1$；

(iii) $||\boldsymbol{v}-Q(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})||_0+H\,|\boldsymbol{q}-R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})|_1\leqslant CH^2(||\boldsymbol{v}||_2+||\boldsymbol{q}||_1)$，$\forall(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in\boldsymbol{Y}\cap(\boldsymbol{H}^2(\Omega)^d\times\boldsymbol{H}^1(\Omega))$.

2　有限元变分多尺度方法

算法 1[5]　单水平有限元变分多尺度方法$(1-\mathrm{VMS})$求解$(\boldsymbol{u}_\mu,\boldsymbol{p}_\mu)\in X_\mu\times M_\mu$，使得 $\forall(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in\boldsymbol{X}_\mu\times\boldsymbol{M}_\mu$，满足

$$\nu(\nabla\boldsymbol{u}_\mu,\nabla\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{u}_\mu,\boldsymbol{u}_\mu,\boldsymbol{v})-(\nabla\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}_\mu)+(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_\mu,\boldsymbol{q})+G_H(\boldsymbol{u}_\mu,\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}) \tag{17}$$

引理 4[8]　假设(u,p)是 Navier-stokes 方程的非奇异解且满足

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})\in(\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\cap\boldsymbol{H}^{k+1}(\Omega)\cap\boldsymbol{W}^{1,\infty}(\Omega))^d\times(\boldsymbol{L}_0^2(\Omega)\cap\boldsymbol{H}^k(\Omega))$$

当 $\mu\longrightarrow0$ 时 $\alpha\longrightarrow0$. 则存在 $\mu_0>0$，使得对于 $\mu\leqslant\mu_0$，算法 1 定义的近似解$(\boldsymbol{u}_\mu,\boldsymbol{p}_\mu)$满足

$$\begin{gathered}\nu\,||\nabla\boldsymbol{u}_\mu||_0\leqslant||\boldsymbol{f}||_{-1}\\ |||(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\mu,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_\mu)|||\leqslant C(\mu^k+\alpha)\\ ||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\mu||_0\leqslant C(\mu(\mu^k+\alpha)+\alpha^2)\end{gathered} \tag{18}$$

算法 2　回溯两水平有限元变分多尺度方法$(\mathrm{b}-\mathrm{VMS})$

步骤 1　求解$(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{p}_H)\in\boldsymbol{X}_H\times\boldsymbol{M}_H$，使得 $\forall(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in\boldsymbol{X}_H\times\boldsymbol{M}_H$，满足

$$\nu(\nabla\boldsymbol{u}_H,\nabla\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v})-(\nabla\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}_H)+(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{q})+G_H(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}) \tag{19}$$

步骤 2　求解$(\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{p}^h)\in\boldsymbol{X}_h\times\boldsymbol{M}_h$，使得 $\forall(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in\boldsymbol{X}_h\times\boldsymbol{M}_h$，满足

$$\nu(\nabla\boldsymbol{u}^h,\nabla\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{v})-(\nabla\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}^h)+(\nabla\cdot\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{q})+G_h^*(\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}) \tag{20}$$

步骤 3　求解$(\boldsymbol{e}_H,\boldsymbol{r}_H)\in\boldsymbol{X}_H\times\boldsymbol{M}_H$，使得 $\forall(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in\boldsymbol{X}_H\times\boldsymbol{M}_H$，满足

$$\begin{aligned}&\nu(\nabla\boldsymbol{e}_H,\nabla\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{e}_H,\boldsymbol{e}_H,\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{e}_H,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v})-(\nabla\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}_H)+(\nabla\cdot\boldsymbol{e}_H,\boldsymbol{q})+G_H^{**}(\boldsymbol{e}_H,\boldsymbol{v})=\\&b(\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{u}^H,\boldsymbol{v})\end{aligned} \tag{21}$$

设置 $\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{u}^h+\boldsymbol{e}_H$，$\boldsymbol{p}^*=\boldsymbol{p}^h+\boldsymbol{r}_H$.

此算法中，$G_H(\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v})$形如(11)式$(\mu=H)$，而 $G_h^*(\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{v})$ 和 $G_H^{**}(\boldsymbol{e}_H,\boldsymbol{v})$ 分别定义如下：

$$G_h^*(\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{v})=\alpha(\nabla\boldsymbol{u}^h,\nabla\boldsymbol{v})-\alpha(\nabla\Pi_h\boldsymbol{u}_H,\nabla\boldsymbol{v}),\ \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{X}_h$$

$$G_H^{**}(\boldsymbol{e}_H,\boldsymbol{v})=\alpha(\nabla\boldsymbol{e}_H,\nabla\boldsymbol{v})-\alpha(\nabla\Pi_H(\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u}^h),\nabla\boldsymbol{v}),\ \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{X}_H$$

定理 1　在引理 4 的条件下，算法 2 第二步的解$(\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{p}^h)\in X_h\times M_h$ 满足：

$$\begin{gathered}||\nabla\boldsymbol{u}^h||_0\leqslant||\boldsymbol{f}||_{-1}\\ |||(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^h)|||\leqslant C(h^k+H^{k+1}+\alpha)\end{gathered} \tag{22}$$

证　在(20)式中取$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})=(\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{p}^h)$即可得到第一个结论 $||\nabla\boldsymbol{u}^h||_0\leqslant||\boldsymbol{f}||_{-1}$. 从(5)式中减去(20)式，得到

$$A^H[(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h,\ \boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^h);(\boldsymbol{v},\ q)]=b(\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+\alpha(\nabla\boldsymbol{u},\ \nabla\boldsymbol{v})-\alpha(\nabla\Pi_h\boldsymbol{u}_H,\ \nabla\boldsymbol{v}) \tag{23}$$

设$(I^h u,\ J^h p)\in Y^h$是$(u,\ p)$的插值，利用三角不等式、A^H的连续性、逼近性(7)式和引理4得到

$$\begin{aligned}
&|||(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h,\ \boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^h)|||\leqslant|||(\boldsymbol{u}-I^h\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{p}-J^h\boldsymbol{p})|||+|||(I^h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h,\ J^h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^h)|||\leqslant\\
&|||(\boldsymbol{u}-I^h\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{p}-J^h\boldsymbol{p})|||+\frac{1}{\gamma}\sup_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in Y^h}\frac{A^H[(I^h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h,\ J^h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^h);(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})]}{|||(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})|||}=\\
&|||(\boldsymbol{u}-I^h\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{p}-J^h\boldsymbol{p})|||+\frac{1}{\gamma}\sup_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in Y^h}\frac{A^H[(I^h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u},\ J^h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p});(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})]+A^H[(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h,\ \boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^h);(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})]}{|||(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})|||}\leqslant\\
&C\,|||(\boldsymbol{u}-I^h\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{p}-J^h\boldsymbol{p})|||+\frac{1}{\gamma}\sup_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in Y^h}\frac{A^H[(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h,\ \boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^h);(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})]}{|||(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})|||}\leqslant\\
&Ch^k+\frac{1}{\gamma}\sup_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in Y^h}\frac{b(\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+\alpha(\nabla\boldsymbol{u},\ \nabla\boldsymbol{v})-\alpha(\nabla\Pi_h\boldsymbol{u}_H,\ \nabla\boldsymbol{v})}{|||(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})|||}\leqslant\\
&Ch^k+C\,||\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u}||_0\cdot|\boldsymbol{u}|_{1,\infty}+\alpha(||\nabla\boldsymbol{u}||_0+||\nabla\boldsymbol{u}_H||_0)\leqslant\\
&C\,(h^k+H^{k+1}+\alpha H+\alpha^2+\alpha)\leqslant\\
&C\,(h^k+H^{k+1}+\alpha)
\end{aligned}$$

定理2 在引理4和定理1的条件下，算法2的解$(\boldsymbol{u}^*,\ \boldsymbol{p}^*)\in X_h\times\boldsymbol{M}_h$满足：

$$|||(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*,\ \boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^*)|||\leqslant C(h^k+H^{k+2}+H^{2k+1-s}+\alpha^{1-s}H^{k+ks+1-s}+\alpha) \tag{24}$$

证 由定理1可知：

$$A^H[(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h,\ \boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^h);(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})]=b(\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+\alpha(\nabla\boldsymbol{u},\ \nabla v)-\alpha(\nabla\Pi_h\boldsymbol{u}_H,\ \nabla\boldsymbol{v})\ \forall(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})\in Y^h$$

其隐含：

$$\begin{aligned}
&B^H[(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h,\ \boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^h);(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})]=\\
&b(\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v})+\alpha(\nabla u,\ \nabla\boldsymbol{v})-\alpha(\nabla\Pi_h\boldsymbol{u}_H,\ \nabla\boldsymbol{v}) \qquad \forall(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})\in\boldsymbol{Y}^h
\end{aligned} \tag{25}$$

根据步骤3和投影(16)的定义有

$$\begin{aligned}
&B^H[(\boldsymbol{e}_H,\ \boldsymbol{r}_H);(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})]=B^H[(\boldsymbol{e}_H,\ \boldsymbol{r}_H);(Q(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q}),\ R(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q}))]=\\
&b(\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{u}_H,Q(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q}))-\alpha(\nabla\Pi_H(\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u}^h),\ \nabla Q(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q}))
\end{aligned} \tag{26}$$

从(25)式减去(26)式，可得

$$\begin{aligned}
&B^H[(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*,\ p-p*);(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})]=b(\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}-Q(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q}))-b(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H,v))+\\
&\alpha[(\nabla\boldsymbol{u},\ \nabla\boldsymbol{v})-(\nabla\Pi_h\boldsymbol{u}_H,\ \nabla\boldsymbol{v})+(\nabla\Pi_H(\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u}^h),\ \nabla Q(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q}))]
\end{aligned} \tag{27}$$

因为$(I^h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}*,\ J^h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}*)\in Y^h$，利用(15)式和双线性形式$B^H$连续性可得

$$\begin{aligned}
&|||(I^h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}*,\ J^h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}*)|||\leqslant\frac{1}{\gamma}\sup_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in Y^h}\frac{B^H[(I^h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}*,\ J^h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}*);(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})]}{|||(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})|||}\leqslant\\
&\frac{1}{\gamma}\sup_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in Y^h}\frac{B^H[(I^h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u},\ J^h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p});(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})]+B^H[(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}*,\ \boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}*);(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})]}{|||(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})|||}\leqslant\\
&\frac{C}{\gamma}\,|||(I^h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u},\ J^h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p})|||+\frac{1}{\gamma}\sup_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in Y^h}\frac{b(\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{u}_H,v-Q(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q}))-b(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H,v))}{|||(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})|||}+\\
&\frac{1}{\gamma}\sup_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in Y^h}\frac{\alpha[(\nabla\boldsymbol{u},\ \nabla\boldsymbol{v})-(\nabla\Pi_h\boldsymbol{u}_H,\ \nabla\boldsymbol{v})+(\nabla\Pi_H(\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u}^h),\ \nabla Q(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q}))]}{|||(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})|||}
\end{aligned} \tag{28}$$

其中对稳定化项的估计是容易的，于是

$$\begin{aligned}
&||\nabla Q(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})||_0\leqslant||\nabla Q(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})-\boldsymbol{v}||_0+||\nabla\boldsymbol{v}||_0\leqslant|||(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})|||\\
&|\alpha[(\nabla\boldsymbol{u},\ \nabla\boldsymbol{v})-(\nabla\Pi_h\boldsymbol{u}_H,\ \nabla\boldsymbol{v})+(\nabla\Pi_H(\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u}^h),\ \nabla Q(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q}))]|\leqslant C\alpha\,|||(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q})|||
\end{aligned} \tag{29}$$

为了估计(28)式的剩余部分，定义

$$RHS:=b(\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u}^h,\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}-Q(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q}))-b(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v}))$$

进一步有

$$\begin{aligned}
RHS:=\,&b(\boldsymbol{u}^h-\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-Q(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q}))+b(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u},v-Q(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q}))+\\
&b(\boldsymbol{u}^h-\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},v-Q(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q}))+b(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-Q(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{q}))-b(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v})
\end{aligned} \tag{30}$$

应用引理 3 和不等式(4) 有

$$
\begin{aligned}
|b(\boldsymbol{u}^h-\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-Q(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}))| &\leqslant C|\boldsymbol{u}^h-\boldsymbol{u}|_1|\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u}|_1|\boldsymbol{v}-Q(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})|_1\leqslant \\
&C(h^k+H^{k+1}+\alpha)(H^k+\alpha)|||(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})|||
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|b(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}_H-\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-Q(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}))| &\leqslant C||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H||_0^{1-s}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H|_1^{1+s}|\boldsymbol{v}-Q(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})|_1\leqslant \\
&C(H^k+\alpha H+\alpha^2)^{1-s}(H^k+\alpha)^{1+s}|||(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})|||\leqslant \\
&C(H^{2k+1-s}+\alpha^{1-s}H^{k+ks+1-s}+\alpha^{2-2s}H^{k+ks}+ \\
&\alpha^{1+s}H^{k+1-sk-s}+\alpha^2H^{1-s}+\alpha^{3-s})|||(v,q)|||
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|b(\boldsymbol{u}^h-\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-Q(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}))| &\leqslant C|u^h-u|_1|u|_{1,3}||\boldsymbol{v}-Q(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})||_0\leqslant \\
&C(h^k+H^{k+1}+\alpha)H|||(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})|||
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|b(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-Q(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}))| &\leqslant C||u-u_H||_0|u|_{1,\infty}||v-Q(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})||_0\leqslant \\
&C(H^{k+1}+\alpha H+\alpha^2)H|||(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})|||
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|b(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H,\boldsymbol{v})| &\leqslant C||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H||_0^{1-s}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_H|_1^{1+s}|\boldsymbol{v}|_1\leqslant \\
&C(H^k+\alpha H+\alpha^2)^{1-s}(H^k+\alpha)^{1+s}|||(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})|||\leqslant \\
&C(H^{2k+1-s}+\alpha^{1-s}H^{k+ks+1-s}+\alpha^{2-2s}H^{k+ks}+\alpha^{1+s}H^{k+1-sk-s}+ \\
&\alpha^2H^{1-s}+\alpha^{3-s})|||(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})|||
\end{aligned}
$$

又由逼近性知

$$|||(I^h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u},J^h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p})|||\leqslant Ch^k(||\boldsymbol{u}||_{k+1}+||\boldsymbol{p}||_k)$$

综上所述，可得

$$|||(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^*)|||\leqslant C(h^k+H^{k+2}+H^{2k+1-s}+\alpha^{1-s}H^{k+ks+1-s}+\alpha) \tag{31}$$

注 1　定理 1 指出如果算法 2 停留在步骤 2，粗细网格的关系为：$h\sim H^{1+\frac{1}{k}}$，$k\geqslant 1$. 定理 2 指出如果算法 2 进行到步骤 3，粗细网格的关系为：

$$
\begin{cases}
h\sim H^{3-\varepsilon}(H^{\frac{5}{2}},d=3) & k=1 \\
h\sim H^{1+\frac{2}{k}} & k\geqslant 2
\end{cases}
$$

从上面的比较中可以看出，步骤 3 改善了粗细网格的关系.

注 2　定理 2 指出算法 2 参数的选择为：

$$h=\mathcal{O}(H^{\min\left\{\frac{k+2}{k},\frac{2k+1-s}{k}\right\}}),\ \alpha=\mathcal{O}(h^k)$$

3　数据模拟

这部分我们主要通过做一些数值实验来验证算法的高效性，我们设计了两个实验. 算法以有限元软件 FreeFem ++[10] 为平台，网格采用三角形单元，非线性迭代收敛准则为 10^{-6}，粗网格上非线性迭代次数超过 5 000 视为迭代方法失败.

3.1　解析解：算例的准确解为

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)^T,\ u_1=x^2(x-1)^2y(y-1)(2y-1) \\
u_2=-y^2(y-1)^2x(x-1)(2x-1),\ \boldsymbol{p}=(x^2-y^2),
\end{cases} \tag{32}
$$

求解区域 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$.

首先，为测试本文 3 种方法的渐近误差，我们在尺寸为 $h=\dfrac{1}{n^2}$，$H=h^{\frac{1}{2}}$，$(n=6,7,8,9,10,11)$ 的一致网格上，用回溯两水平有限元变分多尺度方法(b－VMS) 计算 Navier-Stokes 方程的有限元解，这里粘性系数设置为 $\nu=0.01$. 对(32) 式给出的真解问题，估计(24) 式取 $k=2$. 我们用 Taly-Hood 元，理论预测能量范数的收敛率为 $\mathcal{O}(h^2)$. 根据注 2 选择稳定化参数为 $\alpha=0.1h^2$. 用 Newton 迭代法求解非线性 Navier-Stokes 问题. 数据结果见表 1，其中 it 表示满足停机准则的非线性迭代次数. 从表 1 可以看到我们的

方法能得到最优渐近收敛阶，数据结果很好地支持了理论预测.

其次，为了评估本文所提方法的性能，我们分别用单水平有限元变分多尺度方法[5]，文献[4]中的算法1，两参数稳定化有限元方法[9]来计算有限元解. 数据结果分别列在表2，表3，表4. 比较表1－4，这几种方法的计算近似解的精度相差不是很多，特别地，对于速度近似解而言几乎是相同的. 然而，与单水平有限元变分多尺度方法[5]相比，我们的方法节省了大量的计算时间，当 $h=\frac{1}{n^2}$ $(n=6, 7, 8, 9, 10, 11)$ 时，分别节省时间 74.7%，75.2%，77.3%，78.3%，78.5%，79.3%；与文献[4]中的算法1相比，我们的方法增加了稳定项却没有降低近似解的精度和收敛阶，特别是当粘性系数很小时($\nu=0.000\,01$)，我们的方法工作得很好，而文献[4]中的算法1却是发散的；与两参数稳定化有限元方法[9]相比，我们的方法用的时间较少，速度解精度也要高一些.

表1　回溯两水平有限元变分多尺度法的近似解误差

h	H	CPU(s)	it	$\Vert\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)\Vert_0$	$\Vert \boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^*\Vert_0$	uH_1-rate	pL_2-rate
$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	1.641	3	6.823 01e－005	8.133 44e－005	—	—
$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{7}$	3.062	3	3.607 56e－005	4.390 23e－005	2.067 04	2
$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$	4.891	3	2.092 42e－005	2.573 47e－005	2.039 63	2
$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{9}$	7.703	3	1.298 75e－005	1.606 65e－005	2.024 57	1.999 89
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	12.016	3	8.492 56e－006	1.054 1e－005	2.015 92	2.000 1
$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{11}$	17.578	2	5.788 69e－006	7.199 6e－006	2.010 72	2.000 03

表2　单水平有限元变分多尺度法的近似解误差

h	CPU(s)	it	$\Vert\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\Vert_0$	$\Vert \boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h\Vert_0$	uH_1-rate	pL_2-rate
$\frac{1}{36}$	6.482	3	6.708 53e－005	8.133 43e－005	—	—
$\frac{1}{49}$	12.324	3	3.572 62e－005	4.390 22e－005	2.043 72	2
$\frac{1}{64}$	21.515	3	2.080 67e－005	2.573 47e－005	2.024 27	2
$\frac{1}{81}$	35.578	3	1.295 29e－005	1.606 6e－005	2.011 98	2
$\frac{1}{100}$	55.844	3	8.496 67e－006	1.054 09e－005	2.000 97	2
$\frac{1}{121}$	84.985	3	5.818 33e－006	7.199 61e－006	1.986 47	2

表3　文献[4]算法1的近似解误差

h	H	CPU(s)	it	$\Vert\nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)\Vert_0$	$\Vert \boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^*\Vert_0$	uH_1-rate	pL_2-rate
$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	1.36	2	6.495 94e－005	8.133 43e－005	—	—
$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{7}$	2.375	2	3.509 79e－005	4.390 22e－005	1.996 82	2
$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$	3.984	2	2.058 4e－005	2.573 47e－005	1.998 14	2
$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{9}$	6.422	2	1.285 4e－005	1.606 65e－005	1.998 83	1.999 89
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	10.015	2	8.434 9e－006	1.054 1e－005	1.999 22	2.000 11
$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{11}$	15.063	2	5.761 74e－006	7.199 6e－006	1.999 46	2.000 01

表 4　文献[9]两参数稳定化有限元方法的近似解误差

h	H	CPU(s)	it	$\lVert \nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_{mh}) \rVert_0$	$\lVert \boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_{mh} \rVert_0$	uH_1-rate	pL_2-rate
$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	1.875	9	7.089 7e−005	8.133 44e−005	—	—
$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{7}$	3.344	8	3.675 43e−005	4.390 23e−005	2.130 94	2
$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$	5.297	7	2.111 99e−005	2.573 47e−005	2.074 57	2
$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{9}$	8.219	7	1.304 95e−005	1.606 65e−005	2.043 87	1.999 87
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	12.547	6	8.513 35e−006	1.054 1e−005	2.026 91	2.000 12
$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{11}$	18.766	6	5.795 69e−006	7.199 6e−006	2.017 21	2.000 03

最后，为了验证步骤 3 的对近似解的贡献，我们把近似计算停留在步骤 2. 根据定理 1 可得 $h=\mathcal{O}(H^{\frac{k+1}{k}})$，$\alpha=\mathcal{O}(h^k)$，对于(32)式给出的真解问题，估计(22)式对 $k=2$ 保持. 为了方便比较我们设置粗网格尺寸为 $H=\dfrac{1}{n}$ ($n=6, 7, 8, 9, 10, 11$)，再根据 $h=H^{\frac{3}{2}}$，$\alpha=0.1h^2$，计算出细网格的尺寸和稳定化参数即可带入运行算法，数据结果详见表 1. 比较表 1 和表 5 可以看到，步骤 3 对近似解的精度有大幅改善.

表 5　本文算法 2 步骤 2 的近似解误差

h	H	CPU(s)	it	$\lVert \nabla(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h) \rVert_0$	$\lVert \boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^h \rVert_0$	uH_1-rate	pL_2-rate
$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{6}$	0.375	5	0.000 434 003	0.000 468 486	—	—
$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{7}$	0.532	4	0.000 258 191	0.000 291 993	2.197 03	2
$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{8}$	0.844	4	0.000 171 309	0.000 199 261	2.147 18	2
$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	1.031	4	0.000 122 146	0.000 144 594	2.109 54	2
$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{10}$	1.265	3	8.565 65e−005	0.000 102 939	2.088 74	2
$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{11}$	1.609	3	6.714 54e−005	8.133 43e−005	2.067 23	2

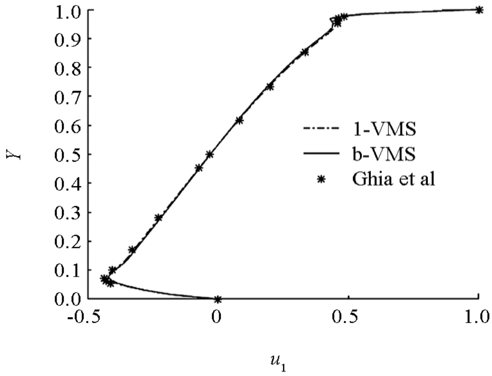
3.2　方腔驱动流

在这个试验中，我们考虑一个定义在单位正方形上的不可压缩方腔驱动流问题. 外部体积力 $f=0$，顶盖上的水平速度 $u_1=1$，垂直速度 $u_2=0$，其余三边的速度都为 0. 这个问题的雷诺数定义为 $\mathrm{Re}=\dfrac{UL}{\nu}$，其中 U 是顶盖速度，L 是侧边宽度.

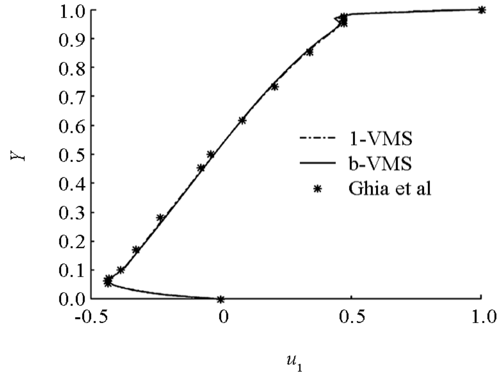
设置网格尺寸为 $h=\dfrac{1}{128}$，$H=\dfrac{1}{64}$，对这个问题，估计(24)式对 $k=1$ 保持，设置 $\alpha=0.1h$. 分别取雷诺数为 Re=5 000，7 500，10 000. 我们分别用单水平有限元变分多尺度方法(1−VMS)[5]，本文所提算法以及文献[4]中的算法 1 来模拟方腔驱动流. 值得注意的是在这种网格和雷诺数的情况下，文献[4]中的算法 1 由于在粗网格上的非线性迭代发散因此无法模拟，而前两种方法运行得很好.

我们在图 1−2 画出了垂直中心线上的速度分量 u_1 和水平中心线上的速度分量 u_2，与 Ghia 等人[11]的数据结果作比较. 图 1−2 表明，本文所提算法的精度可以和 Ghia 等人[11]的结果 相媲美. 单水平有限元变分多尺度方法(1−VMS)[5]和本文所提算法的数据结果没有明显差异，但后者节省了大量的计算时间，详见表 6.

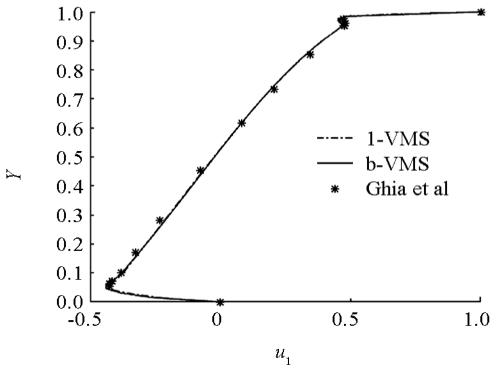
图 3−4 描绘了在设置 $\alpha=0.05$ h，取不同雷诺数 5 000，7 500，10 000 d 的情况下，本文所提方法(b−VMS)模拟得到的线性流和压力等值线，与文献中的相一致，这就证明了此算法的有效性.



(a) Re=5 000

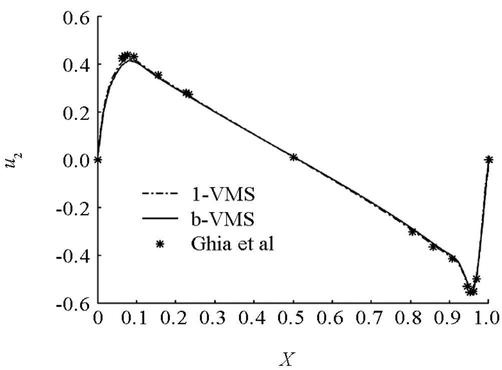


(b) Re=7 500

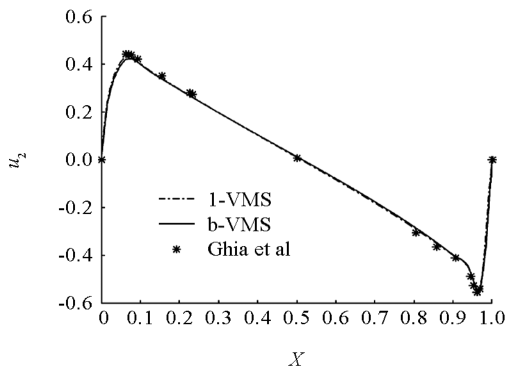


(c) Re=10 000

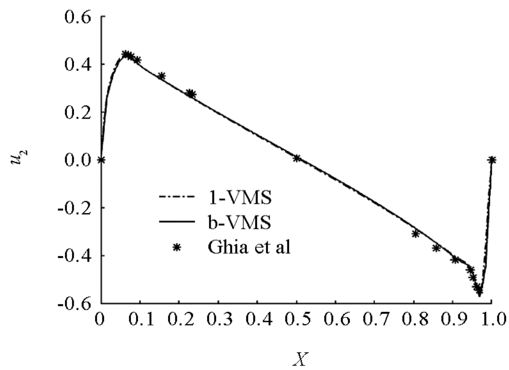
图 1 垂直中线上的速度分量 u_1



(a) Re=5 000



(b) Re=7 500



(c) Re=10 000

图 2 水平中线上的速度分量 u_2

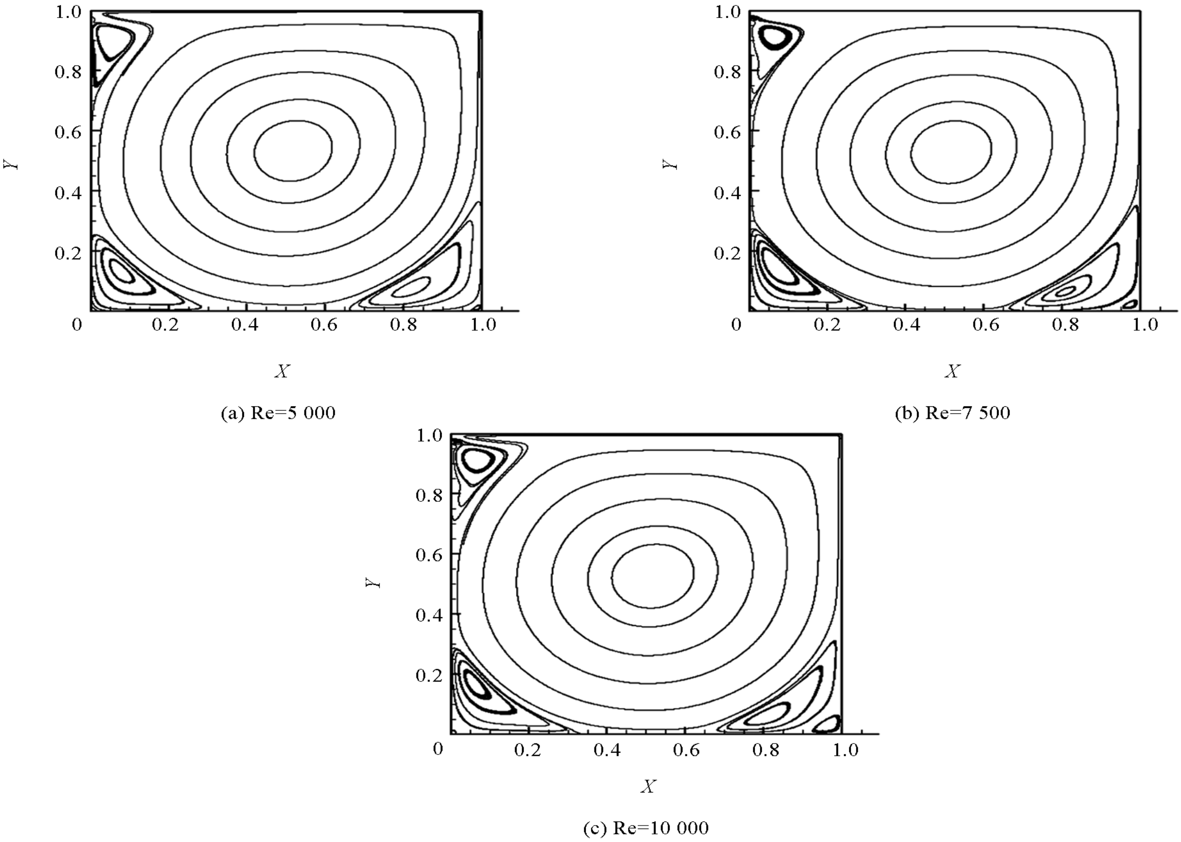


图 3　方腔驱动流的流线

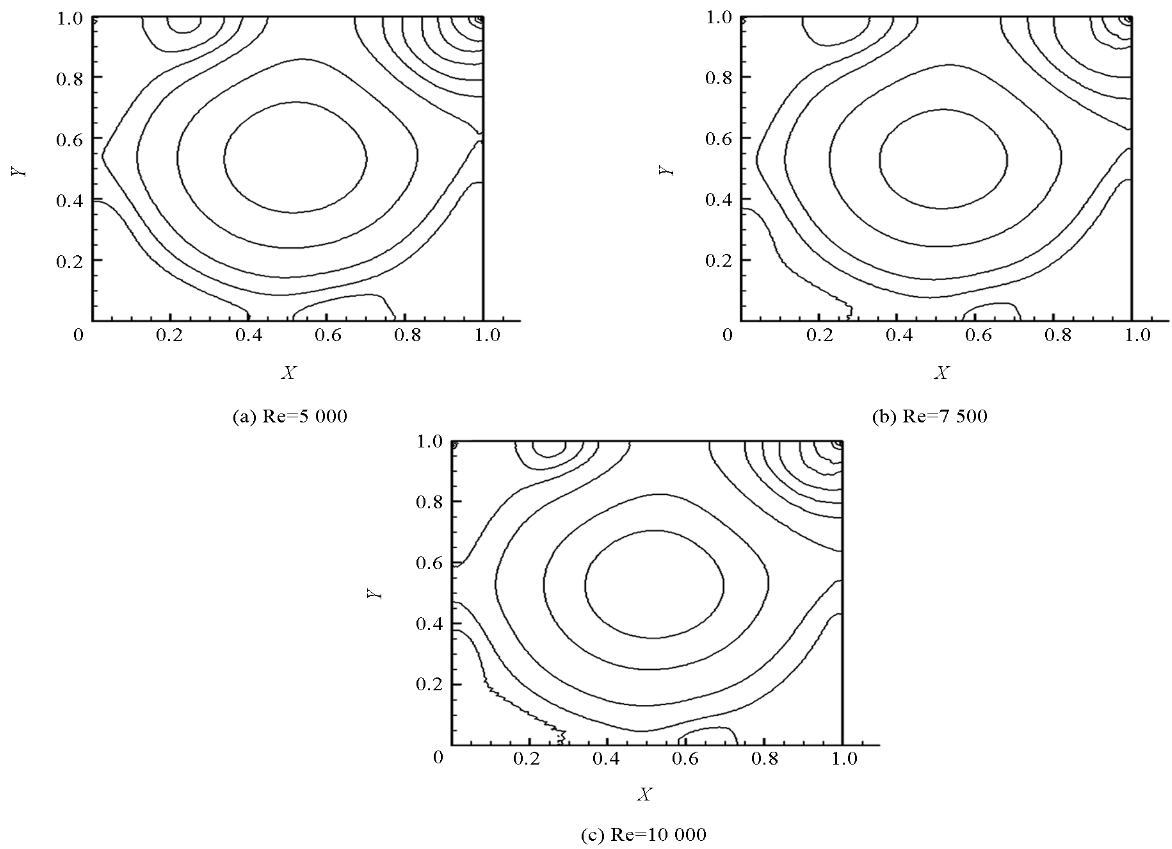


图 4　方腔驱动流的压力等值线

表6　计算方腔驱动流问题的运行时间

雷诺数	5 000	7 500	10 000
单水平有限元变分多尺度方法/s	1 243.84	1 805.24	2 572.95
本文所提算法/s	213.032	269.75	333.89
节省时间/%	82.9	85.6	87.0

4　结束语

我们的方法基于粗网格上的亚格子模型稳定化的 Navier-Stokes 问题，细网格上的一个稳定化线性 Oseen 问题和一个回溯到粗网格的完全线性化校正问题. 通过适当的稳定化参数和粗细网格尺寸的选取，这些算法能取得最优渐近收敛阶. 数值算例验证了其高效性，并且从与普通算法的比较中可以看出，我们的算法性能最为良好，既能够解决大雷诺数问题，又能够节省大量的计算时间.

参考文献：

[1]　XU J C. A Novel Two-Grid Method for Semilinear Elliptic Equations [J]. SIAM J Sci Comput，1994，15(1)：231－237.

[2]　LAYTON W，LENFERINKW. A Multilevel Mesh Independence Principle for the Navier-Stokes Equations [J]. SIAM J Numer Anal，1996，33(1)：17－30.

[3]　HE Y N，LI K T. Two-Level Stabilized Finite Element Method for the Steady Navier-Stokes Problem [J]. Computing，2005，74(4)：337－351.

[4]　LAYTON W，TOBISKA L. A Two-Level Method with Backtracking for the Navier-Stokes Equations [J]. SIAMJ Numer Anal，1998，35(5)：2035－2054.

[5]　ZHENG H B，HOU Y R，SHI F，et al. A Finite Element Variational Multiscale Method for Incompressible Flows Based on Two Local Gauss Integrations [J]. J Comput Phys，2009，228(16)：5961－5977.

[6]　ZHANG Y，HE Y N. Assessment of Subgrid-Scale Models for the Incompressible Navier-Stokes Equations [J]. J Comput Appl Math，2010，234(2)：593－604.

[7]　SHANG Y Q. A Two-Level Subgrid Stabilized Oseen Iterative Method for the Steady Navier-Stokes Equations [J]. J Comput Phys，2013，233(1)：210－226.

[8]　SHANG Y Q. A Parallel Two-Level Finite Element Variational Multiscale Method for the Navier-Stokes Equations [J] Nonlinear Anal，2013，84：103－116.

[9]　SHANG Y Q，QIN J. A Two-Parameter Stabilized Finite Element Method for Incompressible Flows [J]. Numerical-Methods for PDEs，2017，33(2)，1－20.

[10]　HECHT F. New Development in Freefem＋＋ [J]. J Numer Math，2012，20(3－4)：251－265.

[11]　GHIA U，GHIA K，SHIN C. High-Re Solutions for Incompressibleflow Using the Navier-Stokes Equationsand a Multigird Method [J]. J Comput Phys，1982，48(3)：387－411.

A Two-Level Variational Multiscale Algorithm with Backtracking Fnite Element for Navier-Stokes Equations

YANG Xiao-cheng，　SHANG Yue-qiang

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：Based on the two-grid discretization method and the two-level method with backtracking，a two-level variational multiscale algorithm with backtracking finite element for the stationary Navier-Stokes equations at high Reynolds numbers is proposed in this paper. The key idea of our algorithm is as follows：first，to solve a fully nonlinear Navier-Stokes equation with a subgrid stabilization term on a coarse grid；next，to solve a subgrid stabilized linear fine grid problem based on one step of Oseen iteration；and finally，to correct on the coarse grid with full linearization. The theoretical and numerical results show that with suitable scalings of algorithmic parameters，this algorithm of ours can yield an optimal convergence rate. Numerical tests are made to verify the efficiency of the method.

Key words：variational multiscale method；finite element；incompressible flow；Navier-Stokes equation；two-grid

责任编辑　张　枸