

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.10.010

# 符号树的最小秩问题<sup>①</sup>

牟谷芳<sup>1</sup>, 黄捷<sup>2</sup>, 钟琴<sup>3</sup>

1. 乐山师范学院 数学与信息科学学院, 四川 乐山 614000; 2. 电子科技大学 数学科学学院, 成都 611731;  
3. 四川大学 锦江学院, 四川 彭山 620860

**摘要:** 对于符号模式矩阵  $P$ , 可借助于它的伴随图来分析  $P$  的符号特征. 本文研究了对称符号树和非对称符号树的最小秩问题, 并将符号树转换为有向二部图, 给出了计算对称符号树和非对称符号树的最小秩的算法.

**关键词:** 符号矩阵; 有向二部图; 符号树; 最小秩

**中图分类号:** O157.6

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9868(2017)10-0069-06

符号模式矩阵是 20 世纪 30 年代诺贝尔经济学奖获得者 P. A. Samuelson 在经济数学模式—线性动力系统中提出来的, 并研究了系统的符号可解性和符号稳定性. 1947 年 P. A. Samuelson 在《Foundations Economic Analysis》一书中系统总结了符号模式矩阵在经济数学中的重要应用. 符号模式矩阵在经济学、生物学、化学和社会学以及理论计算机科学中具有广泛的实际应用. 近年来, 图染色问题是图论的一个重要研究方向<sup>[1-2]</sup>, 利用图论方法来研究符号矩阵的最小秩问题也得到了广泛关注<sup>[3-8]</sup>. 文献[5] 为了更直观地研究符号模式矩阵  $P$  的最小秩问题, 利用符号二部图来研究符号模式矩阵  $P$  的符号特征, 计算了  $P$  的行列展开式中正项与负项的项数, 这为研究符号模式矩阵的最小秩问题提供了一个新的途径. 文献[6] 提供算法研究了对称符号树与之对应的符号模式矩阵的最小秩问题. 结合图论方法研究矩阵的结构特征是组合矩阵论的一个重要方向, 利用图参数研究符号模式矩阵  $P$  的最小秩问题也是一种常见有效的方法. 文献[7] 将有向树的最小秩相关参数  $\text{tri}(T)$ ,  $ED(T)$  和  $P(T)$  推广到了符号有向树  $T$  的最小秩中. 同时, 学者 L. Hogben 等人又提出了一个新的参数符号非奇异数, 并讨论了符号有向树的最小秩与符号非奇异数间的关系, 从而为图的最小秩问题提供了新的研究方向. 本文结合了文献[5] 中的符号二部图和文献[6] 中的算法, 研究了对称符号树和非对称符号树的最小秩问题, 并提供了计算符号树的有效算法.

## 1 定义

下面介绍符号模式矩阵和符号二部图的一些重要定义.

**定义 1**<sup>[3]</sup> 设  $A = (a_{ij})$  是一个  $n$  阶实矩阵, 以  $a_{ij}$  的符号  $\{+, -, 0\}$  为元素所组成的矩阵称为  $A$  的符号模式矩阵, 记为  $P$ . 记与  $A$  有相同符号模式的所有实矩阵所组成的集合称为由  $A$  所决定的定性矩阵类, 记为  $Q(A)$ .

**定义 2**<sup>[4]</sup> 设  $P$  是一个  $n$  阶的符号模式矩阵,  $P$  的最小秩定义为:

$$\text{mr}(P) = \min\{\text{rank}(A), A \in Q(A)\}$$

其中  $\min$  表示最小值.

**定义 3**<sup>[9]</sup> 一个图  $G$  由有限的非空顶点集  $V$  和边集  $E$  两部分组成. 图  $G$  的阶数是  $G$  的顶点个数, 记为

① 收稿日期: 2016-12-01

基金项目: 国家自然科学基金项目(11401081); 四川省教育厅资助科研项目(17ZB0193); 乐山师范学院资助科研项目(Z1521).

作者简介: 牟谷芳(1981-), 女, 湖北恩施人, 博士研究生, 主要从事组合矩阵论研究.

$|G|$ . 一个若无重边和环的图称为简单图.

**定义 4**<sup>[9]</sup> 在一个无向图  $G=(V, E)$  中, 边集  $\{\{i_1, i_2\}, \dots, \{i_{k-1}, i_k\}\}$  的各个顶点都不同称为从点  $i_1$  到点  $i_k$  的一条路,  $k$  为路长. 若  $i_1$  与  $i_k$  重合则称  $\{\{i_1, i_2\}, \dots, \{i_{k-1}, i_k\}\}$  为圈.

**定义 5**<sup>[9]</sup> 不含任何圈的图称为无圈图, 树就是无圈图.

**定义 6**<sup>[9]</sup> 一个有向图是由非空有限集合  $V$  与集合  $E$  构成, 记为  $\Gamma$ , 其中  $V$  中元素为顶点,  $E$  中元素为不同顶点的有序对, 称为弧或有向边.

**定义 7**<sup>[5]</sup> 设  $P$  为一符号模式矩阵,  $G$  为  $P$  的伴随图. 若图  $G$  中的每边都带有符号, 则称  $G$  为符号图, 记为  $G=(V, E, \text{sign})$ , 其中  $\text{sign}$  是边集  $E$  与集合  $\{1, -1\}$  的一个映射. 若  $P$  中元素为正, 则  $E$  中所对应的边为“+”, 记为  $\text{sign}(e)=1$ ; 若  $P$  中元素为负, 则  $E$  中所对应的边为“-”, 记为  $\text{sign}(e)=-1$ . 若  $G$  中的  $\{i, j\}$  与  $\{j, i\}$  具有相同的符号, 称  $G$  为对称符号图. 否则称为非对称符号图. 若  $G$  为树, 分别称为对称符号树与非对称符号树(图 1<sup>[6]</sup> 与图 2).

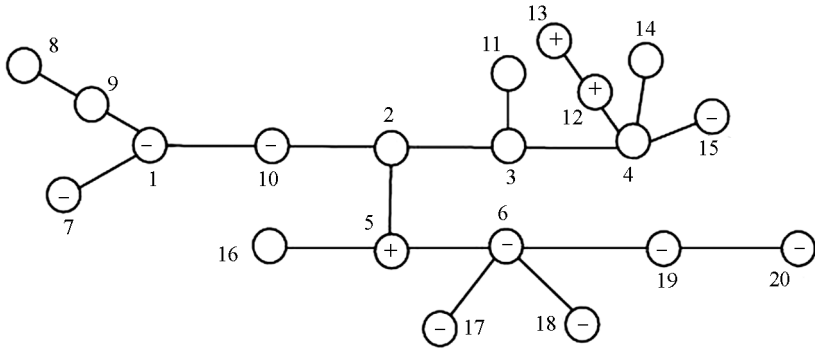


图 1 对称符号树

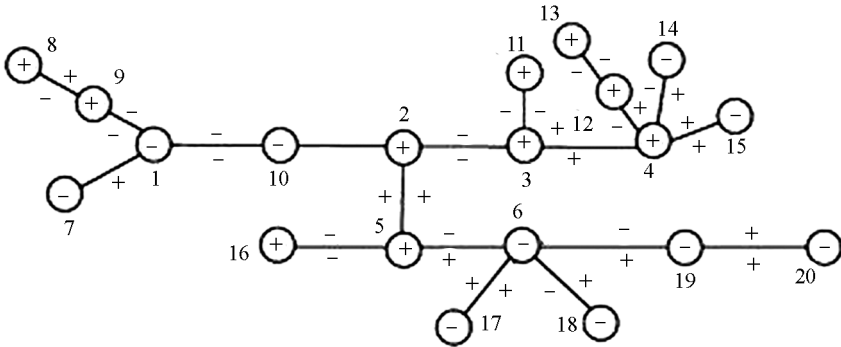


图 2 非对称符号树

**定义 8**<sup>[9]</sup> 若图  $G$  的顶点集  $V$  能够被分为两个子集  $U, V$  (称为部集), 使得  $G$  的每条边必连接  $U$  中一个顶点和  $V$  中一个顶点(记边集为  $E(G)$ ), 称  $G$  为二部图, 记为  $G(U, V)$ .

**定义 9**<sup>[9]</sup> 设  $M$  是  $E(G)$  的子集, 如果  $M$  中任意两条边在  $G$  中均不邻接, 则称  $M$  是  $G(U, V)$  的一个匹配, 并记  $M$  所含的边数为  $|M|$ .

**定义 10**<sup>[5]</sup> 设  $G(U, V)$  为二部图,  $P$  为一符号模式矩阵, 其中  $U=\{1, 2, \dots, n\}$  (对应  $P$  的行标集) 和  $V=\{1', 2', \dots, n'\}$  (对应  $P$  的列标集). 若图  $G$  中的每边都带有符号, 则称  $G$  为符号图, 记为  $G=(V, E, \text{sign})$ .  $G(U, V)$  每边的符号由  $P$  的符号来确定, 若  $\text{sign}(e)=1$ , 则边  $\{i, j'\}$  标为“+”,  $i \in U, j' \in V$ ; 若  $\text{sign}(e)=-1$ , 则边  $\{i, j'\}$  标为“-”,  $i \in U, j' \in V$ ; 若在  $P$  中元素为零, 则在  $G(U, V)$  中不存在边.

**定义 11** 设  $G(U, V)=(V, E, \text{sign})$  为符号二部图. 若边  $\text{sign}(e)=1$ , 则有向边  $\{i, j'\} \in E, i \in U, j' \in V$ ; 若  $\text{sign}(e)=-1$ , 则有向边  $\{j', i\} \in E, i \in U, j' \in V$ .  $G(U, V)$  称为有向二部图.

**定义 12** 在有向二部图  $G(U, V)$  中, 若  $\{i, j'\} \in E$ , 称  $j'$  是  $i$  的一个“外邻居”点. 若  $\{j', i\} \in E$ , 称  $j'$  是  $i$  的一个“内邻居”点. 顶点  $i$  的所有“外邻居”点的个数, 称为  $i$  的出度, 记为  $\text{deg}^+(i)$ ; 顶点  $i$  的

所有“内邻居”点的个数, 称为  $i$  的入度, 记为  $\deg^-(i)$ . 在  $U(V)$  的所有顶点中,  $U(V)$  的最小出度记为  $\delta^+(V)(\delta^+(U))$ ,  $U(V)$  的最小入度记为  $\delta^-(U)(\delta^-(V))$ .

## 2 符号树的最小秩问题

本节结合文献[5]的符号二部图和文献[6]的算法, 研究了对称符号树和非对称符号树的最小秩问题, 并提供了计算符号树的有效算法, 从而获得了符号对称树与符号非对称树的最小秩.

设  $P$  是一个  $n$  阶符号模式矩阵, 其伴随图为符号树,  $P$  的最小秩也称为符号树的最小秩. 因此, 借助  $P$  的伴随图来研究其最小秩问题.

下面介绍符号模式矩阵的符号特征与其伴随图之间的关系.

**定义 13**<sup>[3]</sup> 设符号模式矩阵  $P = (p_{ij})$  是方阵,  $\{i_0, i_1\}, \{i_1, i_2\}, \dots, \{i_k, i_0\}$  是其符号有向图  $\Gamma'$  中的一个圈  $\gamma$ , 将圈  $\gamma$  的每条边作乘积, 记为

$$\text{sign}(\gamma) = \text{sign}(p_{i_0, i_1} p_{i_1, i_2} \cdots p_{i_k, i_0})$$

称  $\text{sign}(\gamma)$  为  $\gamma$  的符号. 若  $\text{sign}(\gamma) = +1$ ,  $\gamma$  的符号为正; 若  $\text{sign}(\gamma) = -1$ ,  $\gamma$  的符号为负.

**定义 14**<sup>[5]</sup> 在符号二部图  $G(U, V)$  中, 若任意两条边与  $V$  中同一顶点连接, 且两条边符号相同, 称这两条边为一个  $c$ -pair. 若在一个圈中含有偶数(或奇数)个  $c$ -pairs, 称此圈为  $e$ -圈(或  $o$ -圈).

**定义 15**<sup>[5]</sup> 在  $G(U, V)$  中, 设  $M$  是  $P$  中主对角元素所对应的完美匹配. 若一个圈的一条边在  $M$  中, 此外一条边不在  $M$  中, 则称为  $M$ -交替圈.

**引理 1**<sup>[5]</sup> 设在符号有向二部图  $G(U, V)$  中的完美匹配为  $M$ , 且  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$  ( $\tau_i = \tau_{i1}\tau_{i2}\cdots\tau_{ii}\tau_{i1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ) 是  $m$  个不相交的  $M$ -交替圈, 则

$$\text{sign}(\rho) \prod_{i=1}^n P_{i, \rho(i)} = \prod_{i=1}^m (-1)^{t_j-1} \prod_{i=1}^{t_j} P_{\tau_{ji}, \tau_{j, i+1}} \prod_{k \in \tau_{ji}} P_{k, k}$$

**引理 2**<sup>[5]</sup> 设  $P$  是  $n$  阶符号模式矩阵, 其每一主对角元素非零,  $\det P$  为  $P$  的行列式的展开式. 设  $G(U, V)$  是  $P$  的符号二部图,  $M$  是  $P$  中主对角元素所对应的完美匹配, 则:

(1)  $\det P$  的非零项数  $t(P)$  等于  $G(U, V)$  中不相交  $M$ -圈的个数;

(2) 设  $\epsilon$  为  $P$  的所有主对角元素的符号乘积的符号, 则在  $\det P$  中, 符号为  $-\epsilon$  的项数为所有不相交的  $M$ -交替圈中含有奇数个  $M$ -交替  $e$  圈的个数.

根据引理 1 和引理 2, 可以得到如下的推论.

**推论 1** 设  $P$  是  $n$  阶符号模式矩阵, 其每个主对角元素非零. 设  $G(U, V)$  是  $P$  的符号二部图,  $M$  是  $P$  中主对角元素所对应的完美匹配, 则在  $P$  的行列式的展开式中, 非零项数(非零项记为  $x$ )  $t(P)$  是  $G(U, V)$  不相交的  $M$ -圈的个数. 设  $\epsilon$  为  $P$  的所有主对角元素的符号乘积的符号, 则在  $P$  的行列式的展开式中, 符号与  $\epsilon$  相同的非零项的项数是所有不相交的  $M$ -交替圈中含有偶数  $M$ -交替  $e$  圈的个数.

下面由引理 1、引理 2 和推论 1 提供计算符号树最小秩的算法, 从而获得对称符号树与非对称符号树的最小秩.

**算法 1** 设  $P$  为  $n$  阶符号模式矩阵, 其伴随图为对称的(或非对称的)符号树  $T$ . 设  $H$  为  $T$  的高度顶点集, 其中, 若  $\deg(i) \geq 3$  ( $\deg^+(i) \geq 3$  或  $\deg^-(i) \geq 3$ ) 的顶点  $i$  称为高度顶点, 将  $T$  转换为有向二部图  $G(U, V)$ .

若  $H \neq \phi$ :

第一步: 寻找只含有一个高度顶点的团树  $T_{1j}$ ,  $P_{1j}$  为  $T_{1j}$  的符号模式矩阵, 设高度顶点集为  $H_1 \neq \phi$ ;

1) 若  $T_{1j}$  所对应的有向二部图为  $G_{1j}(U_{1j}, V_{1j})$ ,  $M_{1j}$  为  $P_{1j}$  主对角元素所对应的完美匹配.

找出  $m$  个不相交的  $M_{1j}$ -交替圈  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$  ( $\tau_i = \tau_{i1}\tau_{i2}\cdots\tau_{ii}\tau_{i1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ), 并在  $m$  个不相交圈中, 计算  $e$  圈的个数  $k$ . 若  $k$  为奇数, 且  $e$  圈中含有  $T_{1j}$  的高度顶点. 则删除  $G_{1j}(U_{1j}, V_{1j})$  的顶点集  $U_{1j}$  中的高度顶点( $P_{1j}$  中所对应的行). 否则, 转 2);

2) 若  $e$  圈中无高度顶点, 删除  $G_{1j}(U_{1j}, V_{1j})$  的顶点集  $U_{1j}$  中的非高度顶点;

3) 若在  $G_{1j}(U_{1j}, V_{1j})$  的  $k$  ( $k$  为奇数) 个不相交圈  $M_{1j}$ -交替  $e$  圈中, 既含有高度顶点, 也含有非高度的顶点, 则删除  $G_{1j}(U_{1j}, V_{1j})$  的顶点集  $U_{1j}$  中的高度顶点和  $V_{1j}$  中所对应的非高度顶点 ( $P_{1j}$  中所对应的列), 破除  $e$  圈;

4) 若  $G_{1j}(U_{1j}, V_{1j})$  中不含有不相交的  $M_{1j}$ -交替  $e$  圈, 且  $T_{1j}$  的高度顶点与相邻团树的高度顶点不构成  $e$  圈, 将两相邻团树构成一个新的团树.

在所有的  $G_{1j}(U_{1j}, V_{1j})$  中, 设删除  $U_{1j}$  的顶点集为  $R_1$  (对应  $P$  的行集) 和  $V_{1j}$  的顶点集为  $L_1$  (对应  $P$  的列集). 在  $T$  中, 当删除这些顶点后, 得到的树设为  $T_1$ ,  $T_1$  所对应的有向二部图为  $G_1(U_1, V_1)$ , 与之对应的符号模式矩阵为  $P_1$ ;

若  $T_1$  中无高度顶点, 停止; 否则, 转入第二步;

第二步: 在  $T_1$  中找出只含有一个高度顶点的团树  $T_{2j}$ ,  $P_{2j}$  为  $T_{2j}$  的符号模式矩阵, 设高度顶点集为  $H_2 \neq \phi$ . 再转入第一步. 在所有的  $G_{2j}(U_{2j}, V_{2j})$  中, 设删除  $U_{2j}$  的顶点集为  $R_2$  (对应  $P_1$  的行集) 和  $V_{2j}$  的顶点集  $L_2$  (对应  $P_1$  的列集), 在  $T_1$  中, 当删除这些顶点后, 得到  $T_2$ ;

设  $T_2$  所对应的有向二部图为  $G_2(U_2, V_2)$ , 与之对应的符号模式矩阵为  $P_2$ .

第三步: 在  $T_2$  中, 若含有高度顶点, 转入第二步. 否则, 在  $G_2(U_2, V_2)$  中的顶点集  $U_2$  (或  $V_2$ ) 中找孤立点和具有相同的“内邻居”点 (或“外邻居”点) 的顶点. 若有, 删除孤立点和其中具有相同的“内邻居”点 (或“外邻居”点) 的顶点. 在  $G(U, V)$  中, 设删除  $U$  的顶点集为  $R$  (对应的  $P$  行集) 和  $V$  的顶点集为  $L$  (对应的  $P$  列集) 后, 得到有向二部图  $G'(U', V')$ , 与之对应的符号模式矩阵为  $P'$ .

**定理 1** 设  $P$  为  $n$  阶符号模式矩阵, 其伴随图为 (对称的或非对称的) 符号树  $T$ . 根据算法 1, 则  $\text{mr}(P) = n - k$ , 其中,  $k = \max\{|R|, |L|\}$ .

**证** 设  $H$  为  $T$  中高度顶点集,  $G(U, V)$  为  $T$  的有向二部图. 在有向二部图为  $G_{ij}(U_{ij}, V_{ij})$  中,  $M_{ij}$  为  $P_{ij}$  主对角元素所对应的完美匹配. 若在  $m$  个不相交的  $M_{ij}$ -交替圈  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$  ( $\tau_i = \tau_{i1}\tau_{i2}\dots\tau_{ii}\tau_{i1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ) 中,  $M_{ij}$ -交替  $e$  圈的个数为偶数, 由推论 1 知,  $P_{ij}$  是非奇异的; 若  $e$  圈的个数为奇数, 由算法 1 的第一步和第二步, 删除不相交的  $M_{ij}$ -交替  $e$  圈  $\tau_i = \tau_{i1}\tau_{i2}\dots\tau_{ii}\tau_{i1}$  中的顶点, 以致于破除  $e$  圈. 在  $G(U, V)$  中, 设删除  $U$  的顶点集为  $R$  (对应的  $P$  行集) 和  $V$  的顶点集为  $L$  (对应的  $P$  列集) 后, 得到有向二部图  $G'(U', V')$ , 与之对应的符号模式矩阵为  $P'$ . 若在  $G'(U', V')$  中既无孤立点, 也无相同的“内邻居”点 (或“外邻居”点) 的顶点, 则在  $P'$  中既无全零的行 (或列) 和元素相同的两行 (或列), 则  $P'$  为非奇异的符号模式矩阵. 因此,  $\text{mr}(P) = n - k$ , 其中,  $k = \max\{|R|, |L|\}$ .

下面利用算法 1 分别计算对称符号树的最小秩 (图 1) 和非对称符号树的最小秩 (图 2).

**例 1** 计算图 1 中对称符号树  $T$  的最小秩.

**解:**  $T$  中每个顶点处的符号 (对应于符号模式矩阵  $P$  的主对角元素) 如图 1 所示, 若无符号显示, 则为零元素.  $T$  中每对对称边的符号 (对应于符号模式矩阵  $P$  的一对对称的非主对角元素) 为正, 高度顶点集为  $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

将  $T$  转换为有向二部图为  $G(U, V)$ .

根据算法 1 的第一步: 仅含有一个高度点的团树为  $T_{11}, T_{12}$  和  $T_{13}$ , 且  $H_1 = \{1, 4, 6\}$ .  $T_{11}, T_{12}$  和  $T_{13}$  所对应的有向二部图分别为  $G_{11}(U_{11}, V_{11}), G_{12}(U_{12}, V_{12})$  和  $G_{13}(U_{13}, V_{13})$ . 在  $G_{11}(U_{11}, V_{11})$  中有一个  $e$  圈为  $1-7'-7-1'-1$ ,  $T$  中顶点 1 与顶点 10 又构成一个  $e$  圈  $1-10'-10-1'-1$ . 由此, 删除顶点 1. 在  $G_{12}(U_{12}, V_{12})$  中有一个  $e$  圈为  $4-12'-12-15'-15-4'-4$  和另一个  $e$  圈为  $12-13'-13-12'-12$ . 由此, 删除顶点 4 和顶点  $13'$ . 在  $G_{13}(U_{13}, V_{13})$  中, 在不同的完美匹配  $(6-17', 17-6'), (6-18', 18-6'), (6-19', 19-6')$  和  $(20-19', 19-20')$  中各自对应于一个  $e$  圈, 分别为  $6-17'-17-6'-6, 6-18'-18-6'-6, 6-19'-19-6'-6$  和  $20-19'-19-20'-20$ . 因此, 删除顶点 6 与顶点  $20'$ .

当删除这些顶点后, 则  $R_1 = \{1, 4, 6\}, L_1 = \{13', 20'\}$ , 得到新的团树为  $T_1$ , 它所对应的符号模式矩阵为

$$P_1 = \begin{bmatrix} + & - & - & + & 0 & 0 \\ - & + & 0 & 0 & - & 0 \\ - & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & + & 0 & - \\ 0 & - & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & + \end{bmatrix}$$

根据算法 1 的第二步, 在  $T_1$  中, 高度顶点集为  $H_2 = \{2\}$ . 设对应的团树为  $T_{21}$ , 将  $T_{21}$  转换为有向二部图  $G_{21}(U_{21}, V_{21})$ , 在  $G_{21}(U_{21}, V_{21})$  中不含有  $e$  圈和孤立点, 则  $P_1$  是非奇异的. 则  $R_2 = \phi$ ,  $L_2 = \phi$ .

由第一步和第二步得  $R = \{1, 4, 6\}$ ,  $L = \{13', 20'\}$ .

在  $G(U, V)$  中, 删除  $R$  和  $L$  后, 得到有向二部图  $G'(U', V')$ . 在  $G'(U', V')$  中, 既无孤立点, 也无相同的“内邻居”点(或“外邻居”点)的顶点, 则与  $G'(U', V')$  所对应的符号模式矩阵  $P'$  为非奇异的矩阵. 则  $k = 3$ ,  $\text{mr}(T) = 20 - 3 = 17$ .

**例 2** 计算图 2 中非对称符号树  $T$  的最小秩.

解:  $T$  中每个顶点处的符号(与之对应的符号模式矩阵  $P$  的主对角元素)如图 2 所示, 若无符号显示, 则为零元素.  $T$  中每条边的符号(与之对应的符号模式矩阵  $P$  的非主对角元素)在图中已标识, 高度顶点集为  $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

根据算法 1 的第一步, 仅含有一个高度点的团树为  $T_{11}$ ,  $T_{12}$  和  $T_{13}$ , 且  $H_1 = \{1, 4, 6\}$ .  $T_{11}$ ,  $T_{12}$  和  $T_{13}$  转换后的有向二部图分别为  $G_{11}(U_{11}, V_{11})$ ,  $G_{12}(U_{12}, V_{12})$  和  $G_{13}(U_{13}, V_{13})$ . 在  $G_{11}(U_{11}, V_{11})$  中无  $e$  圈, 但  $T_{11}$  的顶点 1 与其相邻团树的顶点 10 构成  $e$  圈  $1-10'-10-1'-1$ , 由此, 删除顶点 1. 在  $G_{12}(U_{12}, V_{12})$  中, 不同的匹配  $4-14'$ ,  $14-4'$  和  $12-13'$ ,  $13-12'$  所对应的  $e$  圈分别为  $4-14'-14-4'-4$  和  $12-13'-13-12'-12$ . 另外,  $T_{12}$  的顶点 4 与其相邻团树的顶点 3 构成  $e$  圈  $4-3'-3-4'-4$ , 由此, 将顶点 4 和  $13'$  删除. 在  $G_{13}(U_{13}, V_{13})$  中, 在不同的完美匹配  $(6-17', 17-6')$ ,  $(6-18', 18-6')$ ,  $(6-19', 19-6')$  和  $(20-19', 19-20')$  中各自对应于一个  $e$  圈分别为  $6-17'-17-6'-6$ ,  $6-18'-18-6'-6$ ,  $6-19'-19-6'-6$  和  $20-19'-19-20'-20$ . 另外,  $T_{13}$  的顶点 6 与其相邻团树的顶点 5 构成  $e$  圈  $6-5'-5-6'-6$ . 因此, 删除顶点 6 与顶点  $19'$ .

由算法 1 第一步,  $G(U, V)$  中被删除的顶点集为  $R_1 = \{1, 4, 6\}$ ,  $L_1 = \{13', 19'\}$ , 得到新的团树  $T_1$ ,  $T_1$  所对应的符号模式矩阵设为:

$$P_1 = \begin{bmatrix} + & - & - & + & 0 & 0 \\ - & + & 0 & 0 & - & 0 \\ - & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & + & 0 & - \\ 0 & - & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & + \end{bmatrix}$$

根据算法 1 的第二步, 在  $T_1$  中,  $H_2 = \{2\}$ . 设对应的团树为  $T_{21}$ , 转换后的有向二部图  $G_{21}(U_{21}, V_{21})$ . 在  $G_{21}(U_{21}, V_{21})$  中, 不同的完美匹配  $(2-3', 3-2')$ ,  $(2-10', 10-2')$ ,  $(2-5', 5-2')$ ,  $(3-11', 11-3')$  和  $(5-16', 16-5')$  中各自对应于一个  $e$  圈分别为  $2-3'-3-2'-2$ ,  $2-10'-10-2'-2$ ,  $2-5'-5-2'-2$ ,  $3-11'-11-3'-3$ ,  $5-16'-16-5'-5$ , 将顶点 2,  $11'$  和  $16'$  删除.

由算法 1 第二步,  $G(U, V)$  中被删除的顶点集为  $R_2 = \{2\}$ ,  $L_1 = \{11', 16'\}$ . 得到新的团树为  $T_2$ ,  $T_2$  中无高度点.

由第一步和第二步得  $R = \{1, 2, 4, 6\}$ ,  $L = \{11', 13', 19', 20'\}$ . 在  $G(U, V)$  中, 删除  $R$  和  $L$  后, 得到有向二部图  $G'(U', V')$ . 在  $G'(U', V')$  中, 不含有不相交的  $M$ -交替  $e$  圈. 既无孤立点, 也无相同的“内邻居”点(或“外邻居”点)的顶点, 则与  $G'(U', V')$  所对应的符号模式矩阵  $P'$  为非奇异的矩阵. 因此,  $\text{mr}(T) = 20 - 4 = 16$ .



## 参考文献:

- [1] 江世明, 李敬文, 江红豆. 图的点可区别边染色猜想的算法 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(10): 47—54.
- [2] 董 威, 贾西贝, 李小慧, 等. 随机图的邻点可区别  $I$ -全染色算法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(4): 8—15.
- [3] BRUALDI R A, SHADER B L. Matrices of Sign-Solvable Linear Systems [M]. Cambridge University Press, 1995.
- [4] HOGBEN L. A Note on Minimum Rank and Maximum Nullity of Sign Patterns [J]. Electron Jarnal of Linear Algebra Ela, 2011, 22(1): 203—213.
- [5] HELTON J W, KLEP I, GOMEZ R. Determinant Expansions of Signed Matrices and of Certain Jacobians [J]. Siam Journal on Matrix Analysis & Applications, 2009, 31(2): 732—754.
- [6] DEALBA L M, HARDY T L, HENTZEL I R, et al. Minimum Rank and Maximum Eigenvalue Multiplicity of Symmetric Tree Sign Patterns [J]. Linear Algebra & Its Applications, 2006, 418(2): 389—415.
- [7] LI Z S, GAO Y B, ARAV M, et al. Sign Patterns with Minimum Rank Two and Upper Bounds on Minimum Ranks [J]. Linear & Multilinear Algebra, 2014, 61(7): 895—908.
- [8] BARIOLI F, FALLAT S M, H TRACY HALL, et al. On the Minimum Rank of not Necessarily Symmetric Matrices: A Preliminary Study [J]. Electronic Journal of Linear Algebra Ela, 2009, 18(1): 126—145.
- [9] 张先迪, 李正良. 图论及其应用 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.

## The Minimum Rank Problem of Signed Trees

MOU Gu-fang<sup>1</sup>, HUANG Jie<sup>2</sup>, ZHONG Qin<sup>3</sup>

1. College of Mathematics and Information Science, Leshan Normal University, Leshan Sichuan 614000, China;

2. School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China;

3. Department of Mathematics, Jinjiang College of Sichuan University, Pengshan Sichuan 620860, China

**Abstract:** For an sign pattern matrix  $P$ , we can analyze its sign characteristics with the help of its associated digraph. In this paper, we convert the signed trees into directed bipartite graphs to study the minimum rank problems of symmetric and asymmetric signed trees and provide an algorithm for computing the minimum ranks of symmetric and asymmetric signed trees.

**Key words:** sign pattern matrix; directed bipartite graph; signed tree; minimum rank

责任编辑 崔玉洁

