DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.10.011

非负不可约矩阵 Perron 根的上界[①]

钟　琴，　周　鑫

四川大学 锦江学院数学教学部，四川 彭山 620860

摘要：非负矩阵在数学物理、控制论、电力系统理论等领域有广泛的应用. 非负矩阵 Perron 根的估计是矩阵分析理论研究中的重要问题. 利用 $\boldsymbol{M}$-矩阵与非负矩阵之间的关系，给出计算非负不可约矩阵 Perron 根上界的一种新算法，数值例子表明该算法具有可行性.

关　键　词：非负矩阵；Perron 根；不可约；$\boldsymbol{M}$-矩阵

中图分类号：O151.21　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2017)10-0075-04

非负矩阵 Perron 根的理论在很多领域有重要应用. 在实际中，常常需要估计非负矩阵的最大特征值，对于非负矩阵最大特征值上界的估计，文献[1-7]进行了广泛的研究.

为方便叙述，先给出一些记号. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}\geqslant 0$，$\rho(\boldsymbol{B})$ 表示非负矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的谱半径，对 $i=1,2,\cdots,n$，$r_i(\boldsymbol{B})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行行和，$R(\boldsymbol{B})$ 和 $r(\boldsymbol{B})$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的最大行和与最小行和，$C(\boldsymbol{B})$ 和 $c(\boldsymbol{B})$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的最大列和与最小列和.

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}\geqslant 0$，如果存在一个置换矩阵 $\boldsymbol{P}\in R^{n\times n}$ 使得 $\boldsymbol{PBP}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 分别是 k，l 阶方阵，$k\geqslant 1$ 和 $l\geqslant 1$，则称 $\boldsymbol{B}$ 是可约矩阵，否则称 $\boldsymbol{B}$ 是不可约矩阵.

Frobenius[1] 给出了以下定理：

$$R(\boldsymbol{B})\leqslant\rho(\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{B})\tag{1}$$

正矩阵是非负矩阵的子类，具有非负矩阵的所有性质. LEDERMANN W[4]，OSTROWSKI A[5] 和 BRAUER A[6] 在(1)式的基础上给出了正矩阵最大特征值的界值定理.

$\boldsymbol{M}$-矩阵和非负矩阵有着密切的关系. 若 $\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$，且 $\boldsymbol{A}$ 可表示为 $\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{B}\geqslant 0$，当 $k\geqslant\rho(\boldsymbol{B})$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{M}$-矩阵. 特别地，当 $k>\rho(\boldsymbol{B})$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 $\boldsymbol{M}$-矩阵；当 $k=\rho(\boldsymbol{B})$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异 $\boldsymbol{M}$-矩阵. 文献[7]利用 $\boldsymbol{M}$-矩阵与非负矩阵的关系，改进了非负矩阵 Perron 根的上下界，得到了如下的结果：

定理 1[7]　设 $\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}\geqslant 0$，$k>\rho(\boldsymbol{B})$，则有

$$k-\frac{1}{r(\boldsymbol{A}^{-1})}\leqslant\rho(\boldsymbol{B})\leqslant k-\frac{1}{R(\boldsymbol{A}^{-1})}\tag{2}$$

因为

$$k-\frac{1}{R(\boldsymbol{A}^{-1})}\leqslant R(\boldsymbol{B})$$

所以

① 收稿日期：2016-11-15
基金项目：国家自然科学基金面上项目(11471225)；四川省教育厅科研项目(13ZB0357)；四川大学锦江学院青年教师科研项目(QNJJ-2017-A09).

作者简介：钟　琴(1982-)，女，四川自贡人，副教授，主要从事矩阵理论及其应用的研究.

$$\rho(\boldsymbol{B}) \leqslant k - \frac{1}{R(\boldsymbol{A}^{-1})} \leqslant R(\boldsymbol{B})$$

从而可知定理 1 改进了 Frobenius 定理.

Crabtree[7] 举了一个例子，设 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$，显然 $\boldsymbol{B}$ 是一个非负不可约矩阵，并且 $R(\boldsymbol{B}) = 14 > \rho(\boldsymbol{B})$. 应用定理 1，取 $k = R(\boldsymbol{B})$，得 $\rho(\boldsymbol{B}) < 13.20$. 但是 $R(\boldsymbol{B})$ 是满足定理 4 条件的最合适的数吗？换句话说，能否找到一个数 k'，满足 $k' > \rho(\boldsymbol{B})$，并运用定理 1 得到 $\rho(\boldsymbol{B})$ 更加精确的上界. 本文针对此问题，在文献[7]的基础上将定理 1 推广到非负不可约矩阵，得到非负不可约矩阵 Perron 根更精确的上界. 该方法对所有的非负不可约矩阵均适用，文末附以实例来说明该法的可行性和优越性.

1 非负不可约矩阵 Perron 根的上界

定理 2 设 $\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B} \geqslant 0$ 且不可约，$k > \rho(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{A}^{-1} > 0$ 且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 不可约.

证 因 $\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B} \geqslant 0$，$k > \rho(\boldsymbol{B})$，则有

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{k}\left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{k}\boldsymbol{B}\right)^{-1} = \frac{1}{k}\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{k^2}\boldsymbol{B}^2 + \cdots + \frac{1}{k^n}\boldsymbol{B}^n + \cdots\right) \tag{3}$$

因为 $\boldsymbol{B}$ 非负不可约，所以 $\boldsymbol{B}^n > 0$，根据(3) 式可知 $\boldsymbol{A}^{-1} > 0$，并且正矩阵为不可约矩阵.

定理 3 设 $\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B} \geqslant 0$ 且不可约，$k > \rho(\boldsymbol{B})$ 且 $r(\boldsymbol{B}) < R(\boldsymbol{B})$，则有 $r(\boldsymbol{A}^{-1}) < R(\boldsymbol{A}^{-1})$.

证 显然 $r(\boldsymbol{A}^{-1}) \leqslant R(\boldsymbol{A}^{-1})$. 只需证明 $r(\boldsymbol{A}^{-1}) \neq R(\boldsymbol{A}^{-1})$，此处采用反证法. 假设 $r(\boldsymbol{A}^{-1}) = R(\boldsymbol{A}^{-1})$，则

$$r(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{r(\boldsymbol{A}^{-1})} = \frac{1}{R(\boldsymbol{A}^{-1})} = R(\boldsymbol{A})$$

因此有 $k - R(\boldsymbol{B}) = k - r(\boldsymbol{B})$，这与 $r(\boldsymbol{B}) < R(\boldsymbol{B})$ 矛盾，所以 $r(\boldsymbol{A}^{-1}) < R(\boldsymbol{A}^{-1})$.

定理 4 设 $\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B} \geqslant 0$ 且不可约，$k > \rho(\boldsymbol{B})$ 且 $r(\boldsymbol{B}) < R(\boldsymbol{B})$，则有

$$\rho(\boldsymbol{B}) < k - \frac{1}{R(\boldsymbol{A}^{-1})} \tag{4}$$

证 根据定理 2 和定理 3 知 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 非负不可约且 $r(\boldsymbol{A}^{-1}) < R(\boldsymbol{A}^{-1})$，因此有

$$\rho(\boldsymbol{A}^{-1}) < R(\boldsymbol{A}^{-1}) \tag{5}$$

又因为

$$\frac{1}{\rho(\boldsymbol{A}^{-1})} = \lambda_{\min}(\boldsymbol{A}) = k - \rho(\boldsymbol{B})$$

根据(5) 式可知

$$k - \rho(\boldsymbol{B}) > \frac{1}{R(\boldsymbol{A}^{-1})}$$

注 1 本文中所有关于行和的定理对于列和也同样成立.

注 2 在定理 4 中，$\rho(\boldsymbol{B})$ 严格小于 $k - \dfrac{1}{R(\boldsymbol{A}^{-1})}$，这不同于定理 1. 考虑矩阵 $\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}$，其中 k 和 $\rho(\boldsymbol{B})$ 满足定理 4 的条件，则有 $\rho(\boldsymbol{B}) < k - \dfrac{1}{R(\boldsymbol{A}^{-1})}$. 设 $k' = k - \dfrac{1}{R(\boldsymbol{A}^{-1})} > \rho(\boldsymbol{B})$，构造矩阵 $\boldsymbol{A}' = k'\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}'$ 是一个 $\boldsymbol{M}$-矩阵，再一次运用定理 4，考虑到 $\dfrac{1}{R(\boldsymbol{A}'^{-1})} > 0$，得到

$$\rho(\boldsymbol{B}) < k' - \frac{1}{R(\boldsymbol{A}'^{-1})} = k - \frac{1}{R(\boldsymbol{A}^{-1})} - \frac{1}{R(\boldsymbol{A}'^{-1})} < k - \frac{1}{R(\boldsymbol{A}^{-1})}$$

如果按照此办法继续做下去将得到 $\rho(\boldsymbol{B})$ 更加精确的上界.

例 1　设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&0&9\\3&0&6\\5&5&4\end{pmatrix}$，$r(\boldsymbol{B})<R(\boldsymbol{B})=14$.

Crabtree[7] 已经得到了 $\rho(\boldsymbol{B})<13.20$，此处运用定理 4 来改进 $\boldsymbol{B}$ 的 Perron 根的上界.

令 $k_1=13.20$，$\boldsymbol{A}_1=k_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，应用定理 4 得 $\rho(\boldsymbol{B})<13.118\ 5$.

令 $k_2=13.118\ 5$，$\boldsymbol{A}_2=k_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，再次应用定理 4 得 $\rho(\boldsymbol{B})<13.109\ 6$.

应用同样的方法，令 $k_3=13.109\ 6$，$\boldsymbol{A}_3=k_3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，有 $\rho(\boldsymbol{B})<13.108\ 6$，实际上 $\rho(\boldsymbol{B})\cong 13.108\ 5$.

注 3　从上面的例子可以看出，对于非负不可约矩阵 $\boldsymbol{B}$，满足 $r(\boldsymbol{B})<R(\boldsymbol{B})$，令 $k_1=R(\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{A}_1=k_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，可以形成一个序列 $\{\boldsymbol{A}_n\}$，$n=1,2,\cdots$，其中 $\boldsymbol{A}_n=k_n\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，$k_n=k_{n-1}-\dfrac{1}{R(\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1})}$，当 $\left(\dfrac{1}{r(\boldsymbol{A}_n^{-1})}-\dfrac{1}{R(\boldsymbol{A}_n^{-1})}\right)<\varepsilon$ 时停止迭代，此处 ε 是一个给定的充分小的正数.

例 2　设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&3&3\\4&1&1\end{pmatrix}$，$r(\boldsymbol{B})<R(\boldsymbol{B})=8$，$\rho(\boldsymbol{B})\cong 5.741\ 7$.

对于正矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 Perron 根的上界，有表 1 的比较结果.

表 1　正矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 Perron 根的上界比较结果

文献来源	行	列
文献[1]	$\rho(\boldsymbol{B})<8$	$\rho(\boldsymbol{B})<7$
文献[4]	$\rho(\boldsymbol{B})<7.866\ 1$	$\rho(\boldsymbol{B})<6.925\ 9$
文献[5]	$\rho(\boldsymbol{B})<7.654\ 7$	$\rho(\boldsymbol{B})<6.816\ 5$
文献[6]	$\rho(\boldsymbol{B})<7.464\ 2$	$\rho(\boldsymbol{B})<6.701\ 6$
定理 4	$\rho(\boldsymbol{B})<6.326\ 1(k=R(\boldsymbol{B})=8)$	$\rho(\boldsymbol{B})<5.952\ 4(k=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B})=7)$
	$\rho(\boldsymbol{B})<5.927\ 5(k=6.326\ 1)$	$\rho(\boldsymbol{B})<5.782\ 8(k=5.952\ 4)$

2　算法和数值例子

下面给出一个改进非负不可约矩阵 Perron 根上界的算法. 对于非负不可约矩阵 $\boldsymbol{B}$，有 $r(\boldsymbol{B})\leqslant\rho(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{B})$，如果 $r(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{B})$，则有 $\rho(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{B})$，所以此处假设 $r(\boldsymbol{B})<R(\boldsymbol{B})$.

算法：

第一步：输入非负不可约矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和一个充分小的正数 ε，令 $n=0$.

第二步：令 $k_0=R(\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{A}_0=k_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$.

第三步：如果 $\left(\dfrac{1}{r(\boldsymbol{A}_n^{-1})}-\dfrac{1}{R(\boldsymbol{A}_n^{-1})}\right)\geqslant\varepsilon$，计算 $k_{n+1}=k_n-\dfrac{1}{R(\boldsymbol{A}_n^{-1})}$ 和 $\boldsymbol{A}_{n+1}=k_{n+1}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，令 $n=n+1$，转到第三步.

第四步：计算 $k_n-\dfrac{1}{R(\boldsymbol{A}_n^{-1})}$，停止.

例 3　设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&4&4&1&5&0\\2&5&7&8&1&3\\8&3&7&6&2&4\\1&1&0&2&3&6\\2&6&7&0&3&4\\7&2&8&4&5&5\end{pmatrix},\ r(\boldsymbol{B})<R(\boldsymbol{B})$$

表 2 给出了非负不可约矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 Perron 根的迭代次数和上界.

表2 非负不可约矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 Perron 根的迭代次数和上界比较

迭代次数	ε	上界
3	0.1	23.694 443 419 257 60
5	0.01	23.676 989 461 682 54
6	0.001	23.676 177 391 547 14
8	0.000 1	23.675 935 345 756 37
10	0.000 01	23.675 921 366 852 62
11	0.000 001	23.675 920 715 944 82
13	0.000 000 1	23.675 920 521 926 16

实际上 $\rho(\boldsymbol{B}) \simeq 23.675\ 920\ 510\ 034\ 04$. 从上面的数值例子中可以看出应用该算法可以方便的得到精度比较高的 Perron 根的上界.

3 结束语

利用非负不可约矩阵与 $\boldsymbol{M}$-矩阵的关系，有效地改进了非负不可约矩阵 Perron 根的上界. 在此基础上，给出计算非负不可约矩阵 Perron 根上界的一个算法，以上的数值例子表明利用该算法可以方便的得到精度比较高的 Perron 根的上界.

参考文献:

[1] VARGA R S. Matrix Iterative Analysis [M]. 2版. 北京：科学出版社，2006：36.

[2] 钟 琴，周 鑫，牟谷芳. 非负矩阵谱半径的上界估计 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(6)：50－53.

[3] 廖 辉. 矩阵特征值估计的一个改进结果 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2013，35(6)：46－49.

[4] LEDERMANN W. Bounds for the Greatest Latent Roots of a Positive Matrix [J]. Journal of the London Mathematical Society，1950，25(4)：265－268.

[5] OSTROWSKI A. Bounds for the Greatest Latent Root of a Positive Matrix [J]. London Mathematical Society，1952，27(1)：253－256.

[6] BRAUER A. The Theorem of Ledermann and Ostrowski on Positive Matrices [J]. Duke Math J，1957，24(2)：265－274.

[7] CRABTREE D E. Applications of M-matrices to Nonnegative Matrices [J]. Duke Math J，1966，33(1)：197－208.

Upper Bound for the Perron Root of a Nonnegative Irreducible Matrix

ZHONG Qin， ZHOU Xin

Department of Mathematics，Jinjiang College of Sichuan University，Pengshan Sichuan 620860，China

Abstract：Nonnegative matrix is applied widely in mathematical physics，cybernetics，electric system theory and other fields. The estimation of the Perron root of a nonnegative matrix is an important problem in the matrix analysis theories. Based on the relationship between the $\boldsymbol{M}$-matrix and the nonnegative matrix，this paper proposes a new algorithm for the estimation of the upper bound of the Perron root of nonnegative irreducible matrices so as to improve the known corresponding results. Numerical examples show that the algorithm is effective.

Key words：nonnegative matrix；Perron root；irreducible；$\boldsymbol{M}$-matrix

责任编辑 崔玉洁
廖 坤