第 39 卷第 11 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2017年11月
Vol. 39　No. 11　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Nov.　2017

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.11.009

GFC-度量空间中的 GR-KKM 定理及其对重合问题的应用①

文开庭

贵州工程应用技术学院 图书馆，贵州 毕节 551700

摘要：引入了 GFC-度量空间，建立了 GFC-度量空间中的 GR-KKM 定理. 作为应用，在非紧框架下得到 GFC-度量空间中的极大元集、变分不等式解集和重合点集为非空紧集.

关　键　词：GFC-度量空间；GR-KKM 映射；极大元；变分不等式；重合

中图分类号：O177.91　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2017)11-0059-05

1956 年，文献[1]引入了超凸度量空间. 1996 年，文献[2]建立了超凸度量空间中的 FKKM 映射原理. 2000 年，文献[3]研究了超凸度量空间中的 GMKKM 映射原理. 2001 年，文献[4]引入了 H-度量空间. 2005 年，文献[5]引入了 G-凸度量空间. 2007 年，文献[6]引入了 L-凸度量空间. 2010 年，文献[7]引入了 FC-度量空间. 本文的目的是在 GFC-空间[8-9]的框架下，引入 GFC-度量空间.

本文沿用文献[2-9]的相关记号、概念和术语，并引入如下概念：

定义 1　设(X, Y, Φ)为 GFC-空间. $F: Y \longrightarrow 2^X$ 称为 GR-KKM 映射，若对 $\forall \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$，存在

$$N:=\{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X \rangle$$

使得对

$$\forall \{x_{i_0}, \cdots, x_{i_k}\} \in \langle N \rangle$$

有

$$\varphi_N(\Delta_k) \subset \bigcup_{j=0}^{k} F(y_{i_j})$$

注 1　定义 1 统一推广了文献[2-9]的 KKM 映射、HKKM 映射、FKKM 映射、GMKKM 映射、GLKKM 映射、R-KKM 映射等概念.

定义 2　设(X, Y, Φ)为 GFC-空间，$\gamma \in \mathbb{R}$ 为实数. 泛函 $f: X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}:=\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 称为关于 y 广义 γ-GR-对角拟凹(或凸)的，如果对 $\forall \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$，存在 $N:=\{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X \rangle$，使得对 $\forall \{x_{i_0}, \cdots, x_{i_k}\} \in \langle N \rangle$ 和 $\forall x \in \varphi_N(\Delta_k)$，有 $\min\limits_{0 \leqslant j \leqslant k} f(x, y_{i_j}) \leqslant \gamma$（相应地 $\max\limits_{0 \leqslant j \leqslant k} f(x, y_{i_j}) \geqslant \gamma$）.

注 2　定义 2 统一推广了文献[4]的广义 γ-H-对角拟凹(或凸)、文献[10-11]的广义 γ-L-对角拟凹

① 收稿日期：2016-07-08
基金项目：国家自然科学基金项目(11361003).
作者简介：文开庭(1962-)，男，贵州大方人，教授，硕士研究生导师，主要从事非线性分析研究.

(或凸)的定义以及文献[12]的定义 2.2.

显然,我们有如下引理:

引理 1 设(X, Y, Φ)为 GFC-空间,$\gamma \in \mathbb{R}$为实数,$f: X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$为泛函,$F: Y \longrightarrow 2^X$ 定义为:$F(y) := \{x \in X: f(x, y) \leqslant \gamma\}$(相应地,$F(y) := \{x \in X: f(x, y) \geqslant \gamma\}$),$\forall y \in Y$. 则泛函 f 是关于 y 广义 γ-GR- 对角拟凹(或凸)的当且仅当 F 是 GR-KKM 映射.

注 3 引理 1 统一推广了文献[3]的引理 2.7、文献[4]的引理 4.1、文献[10]的引理 1.1 以及文献[12]的引理 2.1.

定义 3 设(X, d)为度量空间,(X, Y, Φ)为 GFC-空间. (X, Y, Φ, d)称为 GFC-度量空间,若对 $\forall \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$,存在 $N := \{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X \rangle$,使得 $\varphi_N(\Delta_n) \subset \mathrm{co}(N)$. 设$(X, Y, \Phi, d)$为 GFC-度量空间且$(X, d)$完备,则称$(X, Y, \Phi, d)$为完备 GFC-度量空间.

注 4 1)显然,GFC-度量空间包含了文献[7, 12]的 FC-度量空间,因而,也包含了文献[1-3]的超凸度量空间、文献[4]的 H-度量空间、文献[5]的 G-凸度量空间和文献[6, 10-11]的 L-凸度量空间作为特例.

2)由定义 3 可知,设(X, Y, Φ, d)为 GFC-度量空间,则对任意取定的 $x \in X$,$\varphi_{\{x\}}(e_0) = x$.

定理 1 设(X, Y, Φ, d)为 GFC-度量空间,$F: Y \longrightarrow 2^X$ 是有限度量紧闭值集值映射. 则族$\{F(y)\}_{y \in Y}$有有限交性质当且仅当F 是 GR-KKM 映射.

证 若$\{F(y)\}_{y \in Y}$有有限交性质,则对 $\forall \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$,$\bigcap\limits_{i=0}^{n} F(y_i) \neq \varnothing$. 取 $x^* \in \bigcap\limits_{i=0}^{n} F(y_i)$,令 $x_i = x^*$,$i \in \{0, \cdots, n\}$,$N := \{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X \rangle$,则对 $\forall \{x_{i_0}, \cdots, x_{i_k}\} \in \langle N \rangle$,$\{x_{i_0}, \cdots, x_{i_k}\} = \{x^*\}$. 据注 4,

$$\varphi_N(\Delta_k) = \varphi_{\{x^*\}}(e_0) = \{x^*\} \subset \bigcap_{i=0}^{n} F(y_i) \subset \bigcup_{j=0}^{k} F(y_{i_j})$$

故 F 是 GR-KKM 映射.

反之,若 F 是 GR-KKM 映射,则对 $\forall \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle$,存在 $N := \{x_0, \cdots, x_n\} \in \langle X \rangle$,使得对 $\forall \{x_{i_0}, \cdots, x_{i_k}\} \in \langle N \rangle$,有

$$\varphi_N(\Delta_k) \subset \bigcup_{j=0}^{k} F(y_{i_j})$$

又因(X, Y, Φ, d)称为 GFC-度量空间,故

$$\varphi_N(\Delta_k) \subset \varphi_N(\Delta_n) \subset \mathrm{co}(N)$$

因此,

$$\varphi_N(\Delta_k) \subset \bigcup_{j=0}^{k} (\varphi_N(\Delta_n) \cap \mathrm{co}(N) \cap F(y_{i_j}))$$

从而,

$$\Delta_k \subset \bigcup_{j=0}^{k} \varphi_N^{-1}(\varphi_N(\Delta_n) \cap \mathrm{co}(N) \cap F(y_{i_j}))$$

因 F 是有限度量紧闭值的,故对 $\forall j = 0, \cdots, k$,$\mathrm{co}(N) \cap F(y_{i_j})$是紧闭集. 因 φ_N 连续,故 $\varphi_N(\Delta_n)$是紧集,于是 $\varphi_N(\Delta_n) \cap \mathrm{co}(N) \cap F(y_i)$是 $\varphi_N(\Delta_n)$中的闭集. 据 φ_N 连续性,$\varphi_N^{-1}(\varphi_N(\Delta_n) \cap \mathrm{co}(N) \cap F(y_{i_j}))$是 Δ_n 中的闭集. 据传统的 KKM 定理,

$$\bigcap_{i=0}^{n} \varphi_N^{-1}(\varphi_N(\Delta_n) \cap \mathrm{co}(N) \cap F(y_i)) \neq \varnothing$$

因此,

$$\bigcap_{i=0}^{n} (\varphi_N(\Delta_n) \cap \mathrm{co}(N) \cap F(y_i)) \neq \varnothing$$

故

$$\bigcap_{i=0}^{n} F(y_i) \neq \varnothing$$

所以，族$\{F(y)\}_{y\in Y}$有有限交性质.

注 5　定理 1 统一改进和推广了文献[2]的定理 3、文献[3]的定理 2.1、文献[4]的定理 2.1、文献[5]的定理 2.1、文献[6]的引理 1、文献[7]的定理 1、文献[12]的定理 3.1 和文献[13]的定理 2.1.

定理 2　设(X, Y, Φ, d)为完备 GFC-度量空间，$F: X \longrightarrow 2^Y$为集值映射，且F^{-1}是转移紧开值的，$F^*: Y \longrightarrow 2^X$定义为$F^*(y):=X\backslash F^{-1}(y)$，$\forall y \in Y$是 GR-KKM 映射，

$$\inf_{y\in Y}\mu(F^*(y))=0$$

则$\{x \in X: F(x)=\varnothing\}$是非空紧集.

证　定义$\mathrm{cl}F^*: Y \longrightarrow 2^X$为$\mathrm{cl}F^*(y):=\mathrm{cl}_X F^*(y)$，$\forall y \in Y$，则$\mathrm{cl}F^*$是闭值的，从而是有限度量紧闭值的. 因$F^*$是 GR-KKM 映射，故$\mathrm{cl}F^*$是 GR-KKM 映射. 据定理 1，$\{\mathrm{cl}F^*(y)\}_{y\in Y}$有有限交性质. 因$(X, Y, \Phi, d)$为完备 GFC-度量空间，故$X$完备. 注意到

$$\inf_{y\in Y}\mu(\mathrm{cl}F^*(y))=\inf_{y\in Y}\mu(F^*(y))=0$$

据文献[3]的引理 4.1，$\bigcap_{y\in Y}\mathrm{cl}F^*(y)$是非空紧集.

现定义$\hat{F}: Y \longrightarrow 2^X$为

$$\hat{F}(y):=F^*(y)\cap\bigcap_{z\in Y}\mathrm{cl}F^*(z) \qquad \forall y \in Y$$

因F^{-1}是转移紧开值的，故F^*是转移紧闭值的. 注意到$\bigcap_{z\in Y}\mathrm{cl}F^*(z)$是非空紧集，故$\hat{F}$是转移闭值的. 据文献[3]的引理 2.4，

$$\bigcap_{y\in Y}\hat{F}(y)=\bigcap_{y\in Y}\mathrm{cl}_X\hat{F}(y)$$

于是，

$$\begin{aligned}\{x \in X: F(x)=\varnothing\} &= \bigcap_{y\in Y}F^*(y)= \\ &\bigcap_{y\in Y}\Big(F^*(y)\cap\bigcap_{z\in Y}\mathrm{cl}F^*(z)\Big)= \\ &\bigcap_{y\in Y}\hat{F}(y)=\bigcap_{y\in Y}\mathrm{cl}_X\hat{F}(y)= \\ &\bigcap_{y\in Y}\mathrm{cl}_X\Big(F^*(y)\cap\bigcap_{z\in Y}\mathrm{cl}F^*(z)\Big)= \\ &\bigcap_{y\in Y}\mathrm{cl}F^*(y)\end{aligned}$$

所以，$\{x \in X: F(x)=\varnothing\}$是非空紧集.

注 6　定理 2 统一改进和推广了文献[2]的定理 4、文献[3]的推论 2.6、文献[7]的定理 2、文献[10]的定理 2.1 和文献[12]的定理 3.2.

定理 3　设(X, Y, Φ, d)为完备 GFC-度量空间，$\gamma \in \mathbb{R}$为实数. 泛函$f: X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$关于$y$是广义$\gamma$-GR-对角拟凹的，关于$x$是$\gamma$-转移紧下半连续的，且

$$\inf_{y\in Y}\mu(\{x \in X: f(x, y)\leqslant\gamma\})=0$$

则$\{x \in X: f(x, y)\leqslant\gamma,\ \forall y \in Y\}$是非空紧集.

证　定义$F: X \longrightarrow 2^Y$为

$$F(x):=\{y \in Y: f(x, y)>\gamma\} \qquad \forall x \in X$$

则对$\forall y \in Y$，

$$F^{-1}(y)=\{x \in X: f(x, y)>\gamma\}$$

$$F^{*}(y)=X\backslash F^{-1}(y)=\{x\in X:f(x,y)\leqslant\gamma\}$$

因 $f(x,y)$ 关于 x 是 γ-转移紧下半连续的，据文献[12]的引理2.2，F^{*} 是转移紧闭值的，因此，F^{-1} 是转移紧开值的. 因 $f(x,y)$ 关于 y 是广义 γ-GR-对角拟凹的，据引理1，F^{*} 是GR-KKM映射. 注意到

$$\inf_{y\in Y}\mu(F^{*}(y))=\inf_{y\in Y}\mu(\{x\in X:f(x,y)\leqslant\gamma\})=0$$

故据定理2，$\{x\in X:f(x,y)\leqslant\gamma,\ \forall y\in Y\}=\{x\in X:F(x)=\varnothing\}$ 是非空紧集.

注7 定理3改进和推广了文献[3]的定理2.8、文献[4]的定理4.1、文献[10]的定理2.2、文献[12]的定理3.3和文献[14]的定理4.

定理4 设 (X,Y,Φ,d) 为完备GFC-度量空间，$f:X\longrightarrow Y$ 为单值映射，$F:X\longrightarrow 2^{Y}$ 为集值映射，$G:Y\longrightarrow 2^{X}$ 定义为 $G(y):=\{x\in X:f(x)\in F(x)\}$，$\forall y\in Y$ 是转移紧闭值的GR-KKM映射且

$$\inf_{y\in Y}\mu(G(y))=0$$

则 $\{x\in X:f(x)\in F(x)\}$ 是非空紧集.

证 定义泛函 $g:X\times Y\longrightarrow\mathbb{R}$ 为：

$$g(x,y):=\begin{cases}0 & \text{if } f(x)\in F(x)\\ 1 & \text{if } f(x)\notin F(x)\end{cases}$$

则

$$G(y):=\{x\in X:f(x)\in F(x)\}=\{x\in X:g(x,y)\leqslant 0\}\qquad\forall y\in Y$$

因 G 是转移紧闭值的，据文献[12]的引理2.2，$g(x,y)$ 关于 x 是0-转移紧下半连续的. 因 G 是GR-KKM映射，据引理1，$g(x,y)$ 关于 y 是广义0-GR-对角拟凹的. 又因

$$\inf_{y\in Y}\mu(\{x\in X:g(x,y)\leqslant 0\})=\inf_{y\in Y}\mu(G(y))=0$$

据定理3，$\{x\in X:f(x)\in F(x)\}=\{x\in X:g(x,y)\leqslant 0,\ \forall y\in Y\}$ 是非空紧集.

参考文献：

[1] ARONSZAJN N, PANITCHPAKDI P. Extension of Uniformly Continuous Transformation and Hyperconvex Metric Space [J]. Pacific J Math, 1956, 6: 405−439.

[2] KHAMSI M A. KKM and Ky Fan Theorems in Hyperconvex Metric Spaces [J]. J Math Anal Appl, 1996, 204: 298−306.

[3] KIRK W A, SIMS B, YUAN X Z. The Knaster-Kuratowski and Mazurkiewicz Theory in Hyperconvex Metric Spacesand some of Its Applications [J]. Nonlinear Anal, 2000, 39: 611−627.

[4] DING XIE-PING, XIA FU-QUAN. Generalized H-KKM Type Theorems in H-Metric Spaces with Application [J]. Appl Math Mech (English Edition), 2001, 22(10): 1140−1148.

[5] 孟 莉，沈自飞，程小力. G-凸度量空间中的KKM定理及其应用 [J]. 应用泛函分析学报，2005，7(3)：273−279.

[6] WEN Kai-ting. A Ky Fan Matching Theorem in Complete L-Convex Metric Spaces and Its Application to Abstract Economies [J]. Math Appl, 2007, 20(3): 593−597.

[7] 文开庭. FC-度量空间中的R-KKM定理及其对抽象经济的应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2010，35(1)：45−49.

[8] KHANH P Q, QUAN N H, YAO J C. Generalized KKM-type Theorems in GFC-Spaces and Applications [J]. NonlinearAnal, 2009, 71(3−4): 1227−1234.

[9] WEN Kaiting. A GFs-KKM Theorem in GFC-Spaces and the Application to Coincidence Problems [J]. Math Appl, 2015, 28(3): 533−539.

[10] WEN Kai-ting. A GLKKM Type Theorem for Noncompact Complete L-convex Metric Spaces with Applications to Variational Inequalities and Fixed Points [J]. J Math Res Exposition，2009，29(1)：19－27.

[11] DING Xie-ping. Generalized L-KKM Type Theorems in L-Convex Spaces with Applications [J]. Computers Math Appl，2002，43：1249－1256.

[12] 文开庭. FC-度量空间中的 R-KKM 定理及其对变分不等式和不动点的应用 [J]. 应用泛函分析学报，2010，12(3)：266－273.

[13] WEN Kai-ting. GLKKM Theorems in L-Convex Metric Spaces with Application [J]. Acta Anal FunctAppl，2008，10(2)：109－115.

[14] 刘学文. 完备 H-度量空间中非紧型 KKM 定理的应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2003，28(2)：159－161.

A GR-KKM Theorem in GFC-Metric Spaces and Its Application to Coincidence Problems

WEN Kai-ting

Library of Guizhou University of Engineering Science，Bijie Guizhou 551700，China

Abstract：In this paper，the GFC-metric space is introduced and a GR-KKM theorem in it is established. As applications，in noncompact settings，we obtain that maximal element sets，solution sets of variational inequalities and coincidence sets in GFC-metric spaces are nonempty and compact.

Key words：GFC-metric space；GR-KKM mapping；maximal element；variational inequality；coincidence

责任编辑　张　枸