DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.11.010

带乘法扰动的 Boussinesq 方程组随机吸引子的上半连续性[①]

敬　贵，　李扬荣，　佘连兵

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：主要研究带乘法扰动的随机 Boussinesq 方程组解的渐近行为，证明由方程组所生成的随机动力系统在平方可积空间上的随机吸引子的存在性和上半连续性.

关　键　词：随机 Boussinesq 方程组；随机吸引子的存在性；上半连续性

中图分类号：O177.8　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2017)11－0064－10

Boussinesq 方程组作为一个热流体动力学数学模型，描述了受温度影响的粘性不可压缩流体的运动规律. 对确定性的 Boussinesq 方程组，Temma 在文献[1] 中证明了方程在 $L^2(D)^2 \times L^2(D)$ 中存在全局吸引子，其中 $D=(0,1)\times(0,1)$. 对随机 Boussinesq 方程组的随机吸引子的存在性，许多学者也做了大量的研究，如文献[2] 就讨论了 MHD 方程带乘法噪音的解的长时间行为，但就我们所知，没有文献涉及到带乘法扰动的随机 Boussinesq 方程组的随机吸引子的上半连续性.

本文将考虑定义在 $D=(0,1)\times(0,1)\subset\mathbb{R}^2$ 上带乘性白噪声的随机 Boussinesq 方程组：

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{v}+[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-\nu\nabla\boldsymbol{v}+\nabla p]\mathrm{d}t=e_2(T-T_1)\mathrm{d}t+\varepsilon\boldsymbol{v}\circ\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t) \\ \mathrm{d}T+[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)T-\kappa\Delta T]\mathrm{d}t=0 \\ \mathrm{div}\boldsymbol{v}=0,\ \boldsymbol{v}(x,0)=\boldsymbol{v}_0(x),\ T(x,0)=T_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

其边界条件为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}\mid_{x_2=0}=\boldsymbol{v}\mid_{x_2=1}=0,\ T\mid_{x_2=0}=T_0,\ T\mid_{x_2=1}=T_1=T_0-1 \\ \phi\mid_{x_1=0}=\phi\mid_{x_1=1} \end{cases} \tag{2}$$

其中：$\phi=\boldsymbol{v},\ T,\ p,\ \dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial T}{\partial x_1}$. 方程(1) 中，$\varepsilon\in(0,1]$，$e_1$，$e_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的基，未知量 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$，P 和 T 分别代表流体的流速、所受的压强和温度，$\nu>0$，$\kappa>0$ 分别表示粘质系数和热传导参数，T_1 表示在顶点 $x_2=1$ 处的温度，而 $T_0=T_1+1$ 表示在下边界 $x_2=0$ 处的温度. 随机函数 $\boldsymbol{W}(t)=(w_1(t),w_2(t))$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P,\theta_t)$ 上的双边实值 Wiener 过程. 这样，过程 $\boldsymbol{W}(t,\omega)$ 可视为标准过程 $\omega(t)$ 且有 $\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t,\omega)=\mathrm{d}\omega(t)$.

---

① 收稿日期：2017－02－24

基金项目：国家自然科学基金项目(11571283).

作者简介：敬　贵(1993－)，女，甘肃庆阳人，硕士研究生，主要从事随机动力系统研究.

1 随机动力系统

为便于考虑，我们首先作变量代换，令

$$\eta = T - T_0 + x_2 \tag{3}$$

将 P 换为 $P - \left(x_2 + \frac{x_2^2}{2}\right)$，则方程(1)改写为

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{v} + [(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} - \nu \nabla \boldsymbol{v} + \nabla p]\mathrm{d}t = e_2 \eta \mathrm{d}t + \varepsilon \boldsymbol{v} \circ \mathrm{d}\boldsymbol{W}(t) \\ \mathrm{d}\eta + [(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\eta - \kappa \Delta \eta]\mathrm{d}t = v_2 \mathrm{d}t \\ d\,\mathrm{iv}\boldsymbol{v} = 0, \ \boldsymbol{v}(x, 0) = \boldsymbol{v}_0(x), \ \eta(x, 0) = \eta_0(x) \end{cases} \tag{4}$$

同时边界条件变为

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}\,|_{x_2=0} = \boldsymbol{v}\,|_{x_2=1} = 0, \ \eta\,|_{x_2=0} = \eta_0, \ T\,|_{x_2=1} = 0 \\ \phi\,|_{x_1=0} = \phi\,|_{x_1=1} \end{cases} \tag{5}$$

其中：$\phi = \boldsymbol{v}, \eta, p, \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_1}, \frac{\partial \eta}{\partial x_1}$. 为讨论方程组(1)相应的随机动力系统的存在性，接下来我们先给出相关的函数空间. 设乘积希尔伯特空间 $H = H_1 \times H_2$，其中 $H_2 = L^2(D)$ 以及

$$H_1 = \{\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_1, u_2) \in L^2(D)^2 : \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0, \ u_i\,|_{x_i=0} = u_i\,|_{x_i=1}, \ i = 1, 2\}$$

引入空间 $V = V_1 \times V_2$，其中 $V_1 = \{\boldsymbol{u} \in {V_2}^2 : \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0\}$，$V_2$ 是满足在 $x_2 = 0$，$x_2 = 1$ 处为零，而在 x_1 方向具有周期性的函数全体构成的 $H^1(D)$ 的子空间，具有等价内积和范数

对 $v_1, v_2 \in V_2$，$((v_1, v_2)) = \int_D \nabla v_1 \cdot \nabla v_2 \mathrm{d}x$，$\|\boldsymbol{u}\|_{V_2} = \int_D |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}x$，$\boldsymbol{u} \in V_2$.

求解方程组(1)，令

$$\boldsymbol{u}(t, w, \boldsymbol{u}_0) = \boldsymbol{v}(t, w, \boldsymbol{v}_0)\mathrm{e}^{-\varepsilon z(\theta_t w)} \tag{6}$$

其中

$$z(\theta_t w) := -\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\tau}(\theta_t w)(\tau)\mathrm{d}\tau$$

是一维方程 $\mathrm{d}z + z\mathrm{d}t = \mathrm{d}w(t)$ 的解，则随机变量 $z(w)$ 是缓增的，且存在一个保测的 θ_t 不变集 $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ 使得对所有 $w \in \tilde{\Omega}$，$t \longrightarrow z(\theta_t w)$ 连续，且 $z(\theta_t w)$ 满足

$$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{|z(\theta_t \omega)|}{t} = 0$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{t}\int_0^t z(\theta_t \omega)\mathrm{d}t = 0 \tag{7}$$

则方程(4)有如下等价形式

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + \mathrm{e}^{\varepsilon z(\theta_t w)}(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - \nu \Delta \boldsymbol{u} + \mathrm{e}^{-\varepsilon z(\theta_t w)} \nabla p = e_2 \eta + \varepsilon \boldsymbol{u} z(\theta_t w) \\ \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} + \mathrm{e}^{\varepsilon z(\theta_t w)}(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\eta - \kappa \Delta \eta = u_2 \mathrm{e}^{\varepsilon z(\theta_t w)} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0, \ \boldsymbol{u}(x, 0) = \boldsymbol{u}_0(x) = \boldsymbol{v}_0 \mathrm{e}^{-\varepsilon z(\theta_t w)}, \ \eta(x, 0) = \eta_0(x) \end{cases} \tag{8}$$

同时边界条件为

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}\,|_{x_2=0} = \boldsymbol{u}\,|_{x_2=1} = 0, \ \eta\,|_{x_2=0} = \eta_0, \ T\,|_{x_2=1} = 0 \\ \phi\,|_{x_1=0} = \phi\,|_{x_1=1} \end{cases} \tag{9}$$

其中：$\phi = \boldsymbol{u}, \eta, p, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}, \frac{\partial \eta}{\partial x_1}$. 运用 Galerkin 逼近，参考文献[1]中定理 3.3.1 的证明可得，对 P. a. e.

$w \in \Omega$ 和所有的$(\boldsymbol{u}_0, \eta_0) \in H$，方程组(8)－(9)存在唯一解

$$(\boldsymbol{u}(t, w, \boldsymbol{u}_0), \eta(t, w, \eta_0)) \in C([0, \infty); H) \cap L^2_{\mathrm{loc}}((0, \infty); V)$$

其中

$$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}(0, w, \boldsymbol{u}_0) \qquad \eta_0 = \eta(0, w, \eta_0)$$

从而，对所有的 $t \geqslant 0$，映射 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}_0, \eta_0) \longmapsto ((\boldsymbol{u}(t, w, \boldsymbol{u}_0), \eta(t, w, \eta_0)))$ 从 H 映到 H 是连续的. 则$(\boldsymbol{v}, \eta)$是随机系统(4)－(5)的解，其中 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\mathrm{e}^{\varepsilon z(\theta_t w)}$. 现定义一个连续的随机动力系统 φ：$\mathbb{R}^+ \times \Omega \times H \longrightarrow H$

$$\varphi(t, w)(\boldsymbol{v}_0, \eta_0) = (\boldsymbol{v}(t, w, \boldsymbol{v}_0), \eta(t, w, \eta_0)) \qquad \forall (t, w, (\boldsymbol{v}_0, \eta_0)) \tag{10}$$

其中

$$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}(0, w, \boldsymbol{v}_0) \qquad \eta_0 = (0, w, \eta_0)$$

同时我们假定 $\mathscr{B}$ 是 $H = H_1 \times H_2$ 上缓增随机子集的全体，即：

$$\mathscr{B} = \{B = \{B(w)\}_{w \in \Omega}: B(w) \subset eq\ H, t \longrightarrow \infty \text{ 时}, \mathrm{e}^{-\delta t} \| B(\theta_{-t} w) \|_H \longrightarrow 0\} \tag{11}$$

2　随机吸引子的存在性

根据有界域上随机吸引子存在的充要条件，本节我们证明 V 空间存在随机吸收集.

引理 1　设 $\varepsilon \in (0, 1]$，则对任意的 $B \in B$，P－a. e. $w \in \Omega$，存在 $T = T_B(w) > 0$，使得对所有 $t \geqslant T_B(w)$，$(\boldsymbol{v}_0, \eta_0) \in B(\theta_{-t} w)$，有

$$\| \eta(t, \theta_{-t} w, \eta_0(\theta_{-t} w)) \|^2 \leqslant r_1(w) + 1 \tag{12}$$

$$\| \boldsymbol{u}(t, \theta_{-t} w, \boldsymbol{u}_0(\theta_{-t} w)) \|^2 \leqslant r_{2\varepsilon}(w) + 1 \tag{13}$$

其中：

$$r_1(w) = 4 \| \eta_0(\theta_{-t} w) \|^2 \mathrm{e}^{-2\kappa t} + c\,\mathrm{e}^{-2\kappa t} + c \tag{14}$$

$$r_{2\varepsilon}(w) = \| \boldsymbol{u}_0(\theta_{-t} w) \|^2 \mathrm{e}^{-\lambda t + 2\varepsilon \int_{-t}^{0} z(\theta_\tau w) \mathrm{d}\tau} + \frac{1}{\nu} \| \eta(t) \|^2 \int_{-t}^{0} \mathrm{e}^{\lambda s + 2\varepsilon \int_s^0 z(\theta_\tau w) \mathrm{d}\tau} \mathrm{d}s \tag{15}$$

证　在方程(1)第二式两边同时乘以 T，再在 D 上积分得：

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| T \|^2 + \kappa \| \nabla T \|^2 = 0$$

由 Poincare 不等式，取 $c = 1$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| T \|^2 + 2\kappa \| T \|^2 \leqslant 0$$

再在$(0, t)$上由 Gronwall 引理有

$$\| T(t) \|^2 \leqslant \| T(0) \|^2 \mathrm{e}^{-2\kappa t} \tag{16}$$

已知 $\eta = T - T_0 + x_2$，则由(16)式可得，

$$\begin{aligned} \| \eta(t, w, \eta_0) \|^2 &\leqslant 2(\| T(t) \|^2 + c) \leqslant \\ &2(\| T(0) \|^2 \mathrm{e}^{-2\kappa t} + c) \leqslant 4 \| \eta_0(w) \|^2 \mathrm{e}^{-2\kappa t} + c\,\mathrm{e}^{-2\kappa t} + c \end{aligned} \tag{17}$$

将(17)式中所有的 w 用 $\theta_{-t} w$ 来代替，则有

$$\| \eta(t, \theta_{-t} w, \eta_0(\theta_{-t} w)) \|^2 \leqslant 4 \| \eta_0(\theta_{-t} w) \|^2 \mathrm{e}^{-2\kappa t} + c\,\mathrm{e}^{-2\kappa t} + c \tag{18}$$

由假设知$(\boldsymbol{v}_0(\theta_{-t} w), \eta_0(\theta_{-t} w))$，所以存在 $T_B(w) > 0$，当 $t > T_B(w)$ 时有

$$\| \eta(t, \theta_{-t} w, \eta_0(\theta_{-t} w)) \|^2 \leqslant r_1(w) + 1 \tag{19}$$

再用 $\boldsymbol{u}$ 对方程(8)第一式两边在 H_1 中作内积，并由 Poincare 不等式及 Young 不等式可得：

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \boldsymbol{u} \|^2 + \nu \| \nabla \boldsymbol{u} \|^2 = (\eta, u_2) + \varepsilon z(\theta_t w) \| \boldsymbol{u} \|^2 \leqslant \frac{\nu}{2} \| \boldsymbol{u} \|^2 + \frac{1}{2\nu} \| \eta \|^2 + \varepsilon z(\theta_t w) \| \boldsymbol{u} \|^2 \tag{20}$$

由 Poincare 不等式，存在 $\lambda > 0$，有

$$\lambda \| \boldsymbol{u} \|^2 \leqslant \frac{\nu}{2} \| \nabla \boldsymbol{u} \|^2$$

则(20)式整理可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \boldsymbol{u} \|^2 + \frac{\nu}{2} \| \nabla \boldsymbol{u} \|^2 \leqslant \frac{1}{\nu} \| \eta \|^2 + (2\varepsilon z(\theta_t w) - \lambda) \| \boldsymbol{u} \|^2 \tag{21}$$

再在$(0, t)$上由 Gronwall 引理,并将(21)式中的 w 换为$\theta_{-t} w$ 有:

$$\| \boldsymbol{u}(t, \theta_{-t} w, \boldsymbol{u}_0(\theta_{-t} w)) \|^2 \leqslant$$

$$\| \boldsymbol{u}_0(\theta_{-t} w) \|^2 \mathrm{e}^{-\lambda t + 2\varepsilon \int_{-t}^{0} z(\theta_\tau w)\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{\nu} \| \eta(t) \|^2 \int_{-t}^{0} \mathrm{e}^{\lambda s + 2\varepsilon \int_{s}^{0} z(\theta_\tau w)\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}s \tag{22}$$

由 $\tau \longmapsto z(\theta_\tau \omega)$ 是连续的,由(7)式和(22)式有

$$\| \boldsymbol{u}_0(\theta_{-t} w) \|^2 \mathrm{e}^{-\lambda t + 2\varepsilon \int_{-t}^{0} z(\theta_\tau w)\mathrm{d}\tau} \leqslant \| \boldsymbol{u}_0(\theta_{-t} w) \|^2 \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{t} t}$$

$$\frac{1}{\nu} \| \eta(t) \|^2 \int_{-t}^{0} \mathrm{e}^{\lambda s + 2\varepsilon \int_{s}^{0} z(\theta_\tau w)\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}s \leqslant \frac{2}{\nu\lambda} \| \eta(t) \|^2 \tag{23}$$

再由于$(\boldsymbol{v}_0, \eta_0) \in B(\theta_{-t} w)$,存在 $T_B(w) > 0$,当 $t \geqslant T_B(w) > 0$ 时,有

$$\| \boldsymbol{u}(t, \theta_{-t} w, \boldsymbol{u}_0(\theta_{-t} w)) \leqslant r_{2\varepsilon}(w) + 1 \tag{24}$$

因此,由(19),(24)式可知,该引理成立.

引理 2 设 $\varepsilon \in (0, 1]$,则对任意的 $B \in \mathscr{B}$, $P - a.e.\ w \in \Omega$,存在 $T = T_B(w) > 0$ 和两个缓增随机变量 $r_{3\varepsilon}(w)$,$r_{4\varepsilon}(w)$,使得对所有 $t \geqslant T_B(w)$,$(\boldsymbol{v}_0, \eta_0) \in B(\theta_{-t} w)$,有

$$\int_{t}^{t+1} \| \nabla \eta(s, \theta_{-t-1} w, \eta_0(\theta_{-t-1} w)) \|^2 \leqslant r_{3\varepsilon}(w) + 1 \tag{25}$$

$$\int_{t}^{t+1} \| \nabla \boldsymbol{u}(s, \theta_{-t-1} w, \boldsymbol{u}_0(\theta_{-t-1} w)) \|^2 \leqslant r_{4\varepsilon}(w) + 1 \tag{26}$$

证 首先,在(15)式中,由 T_1 代替 T,$\theta_{-t} w$ 代替 w,并给所得式子两端分别乘以 $\mathrm{e}^{2\kappa(T_1 - t)}$ 得

$$\mathrm{e}^{2\kappa(T_1 - t)} \| \eta(T_1, \theta_{-t} w, \eta_0(\theta_{-t} w)) \|^2 \leqslant 4\mathrm{e}^{-2\kappa t} \| \eta_0(\theta_{-t} w) \|^2 + c\mathrm{e}^{-2\kappa t} + c \tag{27}$$

给(4)式中的第二式两边同乘 η:

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \eta \|^2 + \kappa \| \nabla \eta \|^2 = (v_2, \eta) \tag{28}$$

由 Poincare 不等式,存在 $\xi > 0$,有 $\xi \| \eta \|^2 \leqslant \frac{\kappa}{2} \| \nabla \eta \|^2$,则对(28)式联合 Young 不等式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \eta \|^2 + \kappa \| \nabla \eta \|^2 + \xi \| \eta \|^2 \leqslant \frac{1}{\xi} \mathrm{e}^{2\varepsilon z(\theta_t w)} \| \boldsymbol{u} \|^2 \tag{29}$$

则对(29)式当 $t \geqslant T_1$,在(T_1, t)上由 Gronwall 引理,并将所得式子中 w 替换为$\theta_{-t} w$ 有

$$\int_{T_1}^{t} \mathrm{e}^{\xi(s-t)} \| \nabla \eta(s, \theta_{-t} w, \eta_0(\theta_{-t} w)) \|^2 \mathrm{d}s \leqslant$$

$$\frac{1}{\kappa} \| \eta(T_1, \theta_{-t} w, \eta_0(\theta_{-t} w)) \|^2 \mathrm{e}^{\xi(T_1 - t)} + \frac{1}{\xi\kappa} \| \boldsymbol{u}(t) \|^2 \int_{T_1 - t}^{0} \mathrm{e}^{2\varepsilon z(\theta_\tau w)} \mathrm{d}\tau \tag{30}$$

由 $\tau \longmapsto z(\theta_\tau \omega)$ 是连续的,令 $\kappa = \frac{\xi}{2}$,由引理 1 和(27)式可得:

$$\int_{T_1}^{t} \mathrm{e}^{\xi(s-t)} \| \nabla \eta(s, \theta_{-t} w, \eta_0(\theta_{-t} w)) \|^2 \mathrm{d}s \leqslant$$

$$\frac{8}{\xi} \mathrm{e}^{-\xi t} \| \eta_0(\theta_{-t} w) \|^2 + c\mathrm{e}^{-\xi T_1} + c + \frac{2}{\xi^2}(r_{2\varepsilon}(w) + 1) =$$

$$c\mathrm{e}^{-\xi t} \| \eta_0(\theta_{-t} w) \|^2 + c(r_{2\varepsilon}(w) + 1) \tag{31}$$

对(31) 式，由 $t+1$ 代替 t，t 代替 T_1

$$\int_t^{t+1} e^{\xi(s-t-1)} \|\nabla \eta(s, \theta_{-t-1}w, \eta_0(\theta_{-t-1}w))\|^2 ds \leqslant c^{-\xi(t+1)} \|\eta_0(\theta_{-t-1}w)\|^2 + c(r_{2\varepsilon}(w)+1) \tag{32}$$

由于 $s \in [t, t+1]$，有 $e^{\xi(s-t-1)} \geqslant e^{-\xi}$，因此由(32) 式可得：

$$e^{-\xi t}\int_t^{t+1} \|\nabla \eta(s, \theta_{-t-1}w, \eta_0(\theta_{-t-1}w))\|^2 ds \leqslant c e^{-\xi(t+1)} \|\eta_0(\theta_{-t-1}w)\|^2 + c(r_{2\varepsilon}(w)+1) \tag{33}$$

再因$(\boldsymbol{v}_0, \eta_0 \in B(\theta_{-t}w))$，则存在 $T_B(w) > 0$，当 $t \geqslant T_B(w) > 0$ 时，有

$$e^{-\xi(t+1)} \|\eta_0(\theta_{-t-1}w)\|^2 \leqslant r_{3\varepsilon}(w) \tag{34}$$

则由(33) 及(34) 式即可得

$$\int_t^{t+1} \|\nabla \eta(s, \theta_{-t-1}w, \eta_0(\theta_{-t-1}w))\|^2 \leqslant r_{3\varepsilon}(w)+1$$

设 $T_2 \in (0, t)$，在(22) 式中，用 T_2 替换 t，并在所得式子两端同乘以 $e^{\lambda(T_2-t)+2\varepsilon\int_s^t z(\theta_{\tau-t}w)d\tau}$ 得

$$\begin{aligned}
& e^{\lambda(T_2-t)+2\varepsilon\int_{T_2}^t z(\theta_{\tau-t}w)d\tau} \|\boldsymbol{u}(T_2, \theta_{-t}w, \boldsymbol{u}_0(\theta_{-t}w))\|^2 \leqslant \\
& e^{-\lambda t+2\varepsilon\int_0^t z(\theta_{\tau-t}w)d\tau} \|\boldsymbol{u}_0(\theta_{-t}w)\|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^{T_2} e^{\lambda(s-T_2)+2\varepsilon\int_s^t z(\theta_{\tau-t})d\tau} \|\eta(s, w, \eta_0)\|^2 ds \leqslant \\
& e^{-\frac{\lambda}{2}t} \|\boldsymbol{u}_0(\theta_{-t}w)\|^2 + \frac{2}{\lambda\nu}(r_1(w)+1)
\end{aligned} \tag{35}$$

对(21) 式在(T_2, t) 上由 Gronwall 引理，并将所得式子中的 w 替换为 $\theta_{-t}w$，我们有

$$\begin{aligned}
& \frac{\nu}{2}\int_{T_2}^t e^{\lambda(s-t)+2\varepsilon\int_s^t z(\theta_{\tau-t}w)d\tau} \|\nabla \boldsymbol{u}(s, \theta_{-t}w, \boldsymbol{u}_0(\theta_{-t}w))\|^2 ds \leqslant \\
& e^{\lambda(T_2-t)+2\varepsilon\int_{T_2}^t z(\theta_{\tau-t}w)d\tau} \|\boldsymbol{u}(T_2, \theta_{-t}w, \boldsymbol{u}_0(\theta_{-t}w))\|^2 + \\
& \frac{1}{\nu}\int_{T_2}^t e^{\lambda(s-t)+2\varepsilon\int_s^t z(\theta_{\tau-t}w)d\tau} \|\eta(s, \theta_{-t}w, \eta_0(\theta_{-t}w))\|^2 ds
\end{aligned} \tag{36}$$

其中，当 $t \to +\infty$ 时，

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\nu}\int_{T_2}^t e^{\lambda(s-t)+2\varepsilon\int_s^t z(\theta_{\tau-t}w)d\tau} \|\eta(s, \theta_{-t}w, \eta_0(\theta_{-t}w))\|^2 ds = \\
& \frac{1}{\nu}\int_{T_2-t}^0 e^{\lambda s+2\varepsilon\int_{s-t}^0 z(\theta_\tau w)d\tau} \|\eta(s, \theta_{-t}w, \eta_0(\theta_{-t}w))\|^2 ds \leqslant \frac{c}{\nu\lambda}(r_1(w)+1)
\end{aligned} \tag{37}$$

我们结合(36),(37) 式有

$$\begin{aligned}
& \int_{T_2}^t e^{\lambda(s-t)+2\varepsilon\int_s^t z(\theta_{\tau-t}w)d\tau} \|\nabla \boldsymbol{u}(s, \theta_{-t}w, \boldsymbol{u}_0(\theta_{-t}w))\|^2 ds \leqslant \\
& c e^{-\frac{\lambda}{2}} \|\boldsymbol{u}_0(\theta_{-t}w)\|^2 + \frac{c}{\nu}(r_1(w)+r_{2\varepsilon}(w)+1)
\end{aligned} \tag{38}$$

对(38) 式，用 $t+1$ 代替 t，t 代替 T_2 有

$$\begin{aligned}
& \int_t^{t+1} e^{\lambda(s-t-1)+2\varepsilon\int_s^{t+1} z(\theta_{\tau-t-1}w)d\tau} \|\nabla \boldsymbol{u}(s, \theta_{-t-1}w, \boldsymbol{u}_0(\theta_{-t-1}w))\|^2 ds \leqslant \\
& c e^{-\frac{\lambda}{2}(t+1)} \|\boldsymbol{u}_0(\theta_{-t-1}w)\|^2 + \frac{c}{\nu}(r_1(w)+r_{2\varepsilon}(w)+1)
\end{aligned} \tag{39}$$

注意到，当 $s \in [t, t+1]$，有

$$e^{\lambda(s-t-1)+2\varepsilon\int_s^{t+1} z(\theta_{\tau-t-1}w)d\tau} \geqslant e^{-\lambda+2\varepsilon\int_{s-t-1}^0 z(\theta_\tau w)d\tau} \tag{40}$$

则由(39),(40) 式可得

$$e^{-\lambda+2\varepsilon\int_{-1}^{0}z(\theta_\tau w)\mathrm{d}\tau}\int_t^{t+1}\|\nabla \boldsymbol{u}(s,\theta_{-t-1}w,\boldsymbol{u}_0(\theta_{-t-1}w))\|^2\mathrm{d}s \leqslant$$

$$e^{-\frac{\lambda}{2}(t+1)}e^{2\varepsilon z(\theta_{-t-1}w)}\|\boldsymbol{v}_0(\theta_{-t-1}w)\|^2+\frac{c}{\nu}(r_1(w)+r_{2\varepsilon}(w)+1)+\frac{c}{\nu}(r_1(w)+r_{2\varepsilon}(w)+1) \tag{41}$$

再由$(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{\eta}_0)\in B(\theta_{-t}w)$，所以存在$T_B(w)>0$，当$t\geqslant T_B(w)$，由(40),(41)式有

$$\int_t^{t+1}\|\nabla \boldsymbol{u}(s,\theta_{-t-1}w,\boldsymbol{u}_0(\theta_{-t-1}w))\|^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{c}{\lambda}e^{\lambda-2\varepsilon\int_{-1}^{0}z(\theta_\tau w)\mathrm{d}\tau}(r_1(w)+r_{2\varepsilon}(w)+2)$$

引理3 设$\varepsilon\in(0,1]$，则对任意的$B\in\mathscr{B}$，$P-a.e.\ w\in\Omega$，存在$T=T_B(w)>0$和一个缓增随机变量$M_\varepsilon(w)$，使得对所有$t\geqslant T_B(w)$，$(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{\eta}_0)\in B(\theta_{-t}w)$，有

$$\|\nabla \boldsymbol{u}(t,\theta_{-t}w,\boldsymbol{u}_0)\|^2+\|\nabla\boldsymbol{\eta}(t,\theta_{-t}w,\boldsymbol{\eta}_0)\|^2\leqslant M_\varepsilon(w) \tag{42}$$

证 给(8)式中的第一式两端同乘$-\Delta\boldsymbol{u}$，则有：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2+\nu\|\Delta\boldsymbol{u}\|^2=(e_2\eta,-\Delta\boldsymbol{u})+\varepsilon\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2z(\theta_tw)+e^{\varepsilon z(\theta_tw)}[(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\Delta\boldsymbol{u}] \tag{43}$$

给(8)式中的第二式两端同乘$-\Delta\eta$，则有：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\boldsymbol{\eta}\|^2+\kappa\|\Delta\eta\|^2=-e^{\varepsilon z(\theta_tw)}(u_2,\Delta\eta)+e^{\varepsilon z(\theta_tw)}[(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\eta,\Delta\eta] \tag{44}$$

又由文献[1]及Young不等式可得：

$$e^{\varepsilon z(\theta_tw)}[(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\Delta\boldsymbol{u}]=e^{\varepsilon z(\theta_tw)}b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\Delta\boldsymbol{u})\leqslant$$

$$\frac{\nu}{8}\|\Delta\boldsymbol{u}\|^2+ce^{4\varepsilon z(\theta_tw)}\|\boldsymbol{u}\|^2\|\nabla\boldsymbol{u}\|^4 \tag{45}$$

$$e^{\varepsilon z(\theta_tw)}[(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\eta,\Delta\eta]=e^{\varepsilon z(\theta_tw)}b(\boldsymbol{u},\eta,\Delta\eta)\leqslant$$

$$\frac{\kappa}{4}\|\Delta\eta\|^2+\frac{\nu}{8}\|\Delta\boldsymbol{u}\|^2+ce^{4\varepsilon z(\theta_tw)}\|\boldsymbol{u}\|^2\|\nabla\boldsymbol{\eta}\|^4 \tag{46}$$

再结合(43)—(46)及Young不等式整理可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2+\|\nabla\boldsymbol{\eta}\|^2)+\lambda(\|\Delta\boldsymbol{u}\|^2+\|\Delta\eta\|^2)\leqslant$$

$$ce^{4\varepsilon z(\theta_tw)}(\|\boldsymbol{u}\|^2\|\nabla\boldsymbol{u}\|^4+\|\boldsymbol{u}\|^2\|\nabla\boldsymbol{\eta}\|^4)+$$

$$\frac{1}{\nu}\|\boldsymbol{\eta}\|^2+\frac{1}{2\kappa}e^{2\varepsilon z(\theta_tw)}\|\boldsymbol{u}\|^2+\varepsilon\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2z(\theta_tw) \tag{47}$$

其中，

$$\lambda\leqslant\min\left(\frac{\nu}{2},\frac{\lambda}{2}\right)$$

我们令

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{u},\eta)$$

由(47)式有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\boldsymbol{\xi}\|^2+\lambda\|\Delta\boldsymbol{\xi}\|^2\leqslant$$

$$ce^{4\varepsilon z(\theta_tw)}\|\boldsymbol{u}\|^2\|\nabla\boldsymbol{\xi}\|^4+c\|\boldsymbol{\eta}\|^2+ce^{2\varepsilon z(\theta_tw)}\|\boldsymbol{u}\|^2+\varepsilon\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2z(\theta_tw) \tag{48}$$

为便于讨论，我们令

$$G_\varepsilon(t,w)=e^{4\varepsilon z(\theta_tw)}\|\boldsymbol{u}\|^2\|\nabla\boldsymbol{\xi}\|^2;\ H_\varepsilon(t,w)=$$

$$c\|\boldsymbol{\eta}\|^2+ce^{2\varepsilon z(\theta_tw)}\|\boldsymbol{u}\|^2+\varepsilon\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2z(\theta_tw) \tag{49}$$

结合(48),(49)式可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\boldsymbol{\xi}\|^2 \leqslant cG_\varepsilon(t, w)\|\nabla\boldsymbol{\xi}\|^2 + H_\varepsilon(t, w) \tag{50}$$

令 $s\in(t, t+1)$，对(50) 式在$(t, t+1)$ 上由 Gronwall 引理可得：

$$\|\nabla\boldsymbol{\xi}(t+1, w, \boldsymbol{\xi}_0)\|^2 \leqslant \|\nabla\boldsymbol{\xi}(s, w, \boldsymbol{\xi}_0)\|^2 \mathrm{e}^{\int_t^{t+1} cG_\varepsilon(r, w)\mathrm{d}r} + \int_t^{t+1}\mathrm{e}^{\int_\tau^{t+1} cG_\varepsilon(r, w)\mathrm{d}r} H_\varepsilon(\tau, w)\mathrm{d}\tau \tag{51}$$

再对(51) 式关于 s 在$(t, t+1)$ 上积分，并在所得式子中由 $\theta_{-t-1}w$ 代替 w 可得：

$$\|\nabla\boldsymbol{\xi}(t+1, w, \boldsymbol{\xi}_0)\|^2 \leqslant \mathrm{e}^{\int_t^{t+1} cG_\varepsilon(r, w)\mathrm{d}r}\int_t^{t+1}\|\nabla\boldsymbol{\xi}(s, w, \boldsymbol{\xi}_0)\|^2\mathrm{d}s + \int_t^{t+1}\mathrm{e}^{\int_\tau^{t+1} cG_\varepsilon(r, w)\mathrm{d}r} H_\varepsilon(\tau, w)\mathrm{d}\tau \tag{52}$$

由引理 1，存在 $T_B(w) > 0$，当 $t\geqslant T_B(w)$ 时，我们有

$$\|\boldsymbol{u}(r, \theta_{-t-1}w, \boldsymbol{u}_0)\|^2 = \|\boldsymbol{u}(r, \theta_{-r}\circ\theta_{r-t-1}w, \boldsymbol{u}_0)\|^2 \leqslant r_{2\varepsilon}(\theta_{r-t-1}w) + 1 \leqslant \sup_{r\in(0, 1]} r_{2\varepsilon}(\theta_{-r}w) + 1 =: R_{1\varepsilon}(w) \tag{53}$$

则

$$\int_t^{t+1} G_\varepsilon(r, \theta_{-t-1}w)\mathrm{d}r = \int_t^{t+1}\mathrm{e}^{4\varepsilon z(\theta_{-t-1}w)}\|\boldsymbol{u}(r, \theta_{-t-1}w, \boldsymbol{u}_0)\|^2\|\nabla\boldsymbol{\xi}(r, \theta_{r-t-1}w, \boldsymbol{\xi}_0)\|^2\mathrm{d}r \leqslant R_{1\varepsilon}(w)\sup_{r\in(0, 1]}\mathrm{e}^{4\varepsilon z(\theta_r w)}\int_t^{t+1}\|\nabla\boldsymbol{\xi}(r, \theta_{-t-1}w, \boldsymbol{\xi}_0)\|^2\mathrm{d}x \tag{54}$$

由引理 2，存在 $T_B(w) > 0$，当 $t\geqslant T_B(w)$ 时，我们有

$$\int_t^{t+1}\|\nabla\boldsymbol{\xi}(s, \theta_{-t-1}w, \boldsymbol{\xi}_0)\|^2\mathrm{d}s \leqslant r_{3\varepsilon} + r_{4\varepsilon} + c \tag{55}$$

结合(54),(55) 式可得

$$\int_t^{t+1} G_\varepsilon(r, \theta_{-t-1}w)\mathrm{d}r \leqslant R_{1\varepsilon}(w)\sup_{r\in(0, 1]}\mathrm{e}^{4\varepsilon z(\theta_r w)}(r_{3\varepsilon} + r_{4\varepsilon} + c) =: R_{2\varepsilon}(w) \tag{56}$$

而

$$\int_t^{t+1} H_\varepsilon(\tau, \theta_{-t-1}w)\mathrm{d}\tau = \int_t^{t+1}(c\|\boldsymbol{\eta}(\tau, \theta_{-t-1}w, \eta_0)\|^2 + c\,\mathrm{e}^{2\varepsilon z(\theta_{\tau\tau-t-1}w)}\|\boldsymbol{u}(\tau, \theta_{-t-1}w, \boldsymbol{u}_0)\|^2 + \varepsilon\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2 z(\theta_{\theta_{\tau-t-1}}w))\mathrm{d}\tau \tag{57}$$

其中，由引理 1

$$\|\boldsymbol{\eta}(\tau, \theta_{-t-1}w, \eta_0)\|^2 = \|\boldsymbol{\eta}(\tau, \theta_{-t}\circ\theta_{t-t-1}w, \eta_0)\|^2 \leqslant r_1(\theta_{-1}w) + 1 =: R_{3\varepsilon}(w)$$

$$\|\boldsymbol{u}(\tau, \theta_{-t-1}w, \boldsymbol{u}_0)\|^2 = \|\boldsymbol{u}(\tau, \theta_{-t}\circ\theta_{t-t-1}w, \boldsymbol{u}_0)\|^2 \leqslant r_{2\varepsilon}(\theta_{-1}w) + 1 =: R_{4\varepsilon}(w) \tag{58}$$

则结合(57),(58) 式及引理 2，并由 $\tau\longrightarrow z(\theta_\tau w)$ 的连续性可得：

$$\int_t^{t+1} H_\varepsilon(\tau, \theta_{-t-1}w)\mathrm{d}\tau \leqslant \int_t^{t+1}(cR_{3\varepsilon}(w) + c\,\mathrm{e}^{2\varepsilon z(\theta_{\tau-t-1}w)}R_{4\varepsilon}(w) + \varepsilon(r_{3\varepsilon}(w) + 1)z(\theta_{\tau-t-1}w))\mathrm{d}\tau =: R_{5\varepsilon}(w) \tag{59}$$

则由(55)—(59) 式我们有：

$$\|\nabla\boldsymbol{u}(t, \theta_{-t}w, \boldsymbol{u}_0)\|^2 + \|\nabla\boldsymbol{\eta}(t, \theta_{-t}w, \eta_0)\|^2 \leqslant c\,\mathrm{e}^{R_{2\varepsilon}(w)}(R_{3\varepsilon}(w) + R_{4\varepsilon}(w) + R_{5\varepsilon}(w) + c) =: M_\varepsilon(w)$$

由引理 3 以及 V 到 H 的 Soblev 紧嵌入，我们得到 H 空间中随机吸引子的存在唯一性.

定理 1　固定 $\varepsilon\in(0, 1]$，则方程(4) 在 H 上存在唯一的随机吸引子. 特别地，带乘性白噪声的随机 Boussinesq 方程组在 H 上存在唯一的随机吸引子 $\mathscr{A}_\varepsilon = \{A_\varepsilon(\omega): \omega\in\Omega\}\in\mathscr{B}$.

证 由引理1－3可得该定理成立.

3 Boussinesq 方程组随机吸引子的上半连续性

现在考虑当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，吸引子的渐近行为.

接下来记 $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon=(u^\varepsilon, \eta^\varepsilon)$ 是方程(8)的解，$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{u}, \eta)$ 是方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-\nu\Delta\boldsymbol{u}+\nabla p=e_2\eta\\ \dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\eta-\kappa\Delta\eta=u_2\\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}=0\end{cases}\tag{60}$$

的解. 将由(4)式生成的动力系统记为 φ_ε.

由文献[3]随机吸引子的上半连续性的理论结果，证明系统的收敛性.

引理4 给定 $\varepsilon\in(0, 1]$，$\boldsymbol{\xi}^\varepsilon$，$\boldsymbol{\xi}$ 分别为(4)式和(60)式的解，则对 $P-a.e.\ \omega\in\Omega$，$t>0$，当 $\varepsilon\to0$，$\boldsymbol{\xi}_0{}^\varepsilon\to\boldsymbol{\xi}_0$ 时，有

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\|\boldsymbol{\xi}^\varepsilon(t, \omega, \boldsymbol{\xi}_0{}^\varepsilon)-\boldsymbol{\xi}(t, \boldsymbol{\xi}_0)\|=0\tag{61}$$

证 令

$$\boldsymbol{W}=(\boldsymbol{W}_1, W_2)=(u^\varepsilon-\boldsymbol{u}, \eta^\varepsilon-\eta)=\boldsymbol{\xi}^\varepsilon-\boldsymbol{\xi}$$

则由(4)式中第一式和(60)式中第一式可得：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{W}_1}{\mathrm{d}t}-\nu\Delta\boldsymbol{W}_1=-\mathrm{e}^{\varepsilon z(\theta_t w)}(u^\varepsilon\cdot\nabla)u^\varepsilon+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-\mathrm{e}^{\varepsilon z(\theta_t w)}\nabla p+\nabla p+\varepsilon u^\varepsilon z(\theta_t w)\tag{62}$$

对(62)式在 H_1 中用 $\boldsymbol{W}_1$ 作内积，其中

$$(-\mathrm{e}^{\varepsilon z(\theta_t w)}(u^\varepsilon\cdot\nabla)u^\varepsilon+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{W}_1)=-\mathrm{e}^{\varepsilon z(\theta_t w)}b(\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{W}_1)-(\mathrm{e}^{\varepsilon z(\theta_t w)}-1)b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{W}_1)\tag{63}$$

则对(60)式在 H_1 中用 $\boldsymbol{W}_1$ 作内积有：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{W}_1\|^2+\nu\|\nabla\boldsymbol{W}_1\|^2=\\&-\mathrm{e}^{\varepsilon z(\theta_t w)}b(\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{W}_1)-(\mathrm{e}^{\varepsilon z(\theta_t w)}-1)b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{W}_1)+\varepsilon z(\theta_t w)(u^\varepsilon, \boldsymbol{W}_1)\end{aligned}\tag{64}$$

而

$$\begin{aligned}-\mathrm{e}^{\varepsilon z(\theta_t w)}b(\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{W}_1)\leqslant c\,\mathrm{e}^{\varepsilon z(\theta_t w)}\|\boldsymbol{W}_1\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{W}_1\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{W}_1\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{W}_1\|^{\frac{1}{2}}\leqslant\\ c\,\mathrm{e}^{2\varepsilon z(\theta_t w)}\|\nabla\boldsymbol{W}_1\|^2\|\boldsymbol{W}_1\|^2+c\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2\end{aligned}\tag{65}$$

$$\begin{aligned}b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{W}_1)\leqslant c\|\boldsymbol{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{W}_1\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\boldsymbol{W}_1\|^{\frac{1}{2}}\leqslant\\ c(\|\boldsymbol{u}\|^2\|+1)+c\|\boldsymbol{W}_1\|^2\|\nabla\boldsymbol{W}_1\|^2\end{aligned}\tag{66}$$

$$\varepsilon z(\theta_t w)(u^\varepsilon, \boldsymbol{W}_1)\leqslant c\varepsilon\,|z(\theta_t w)|^2\|u^\varepsilon\|^2+\|\boldsymbol{W}_1\|^2\tag{67}$$

结合(64)－(67)式，我们有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{W}_1\|^2\leqslant c(\mathrm{e}^{2\varepsilon z(\theta_t w)}\|\nabla\boldsymbol{W}_1\|^2+|\mathrm{e}^{\varepsilon z(\theta_t w)}-1|\,\|\nabla\boldsymbol{W}_1\|^2+1)\|\boldsymbol{W}_1\|^2+\\ c[|\mathrm{e}^{\varepsilon z(\theta_t w)}-1|(\|\boldsymbol{u}\|^2+1)+1]\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2\end{aligned}\tag{68}$$

其中令

$$M_\varepsilon(t, w)=\mathrm{e}^{2\varepsilon z(\theta_t w)}\|\nabla\boldsymbol{W}_1\|^2+|\mathrm{e}^{\varepsilon z(\theta_t w)}-1|\,\|\nabla\boldsymbol{W}_1\|^2+1$$

$$N_\varepsilon(t, w)=[|\mathrm{e}^{\varepsilon z(\theta_t w)}-1|(\|\boldsymbol{u}\|^2+1)+1]\|\nabla\boldsymbol{u}\|^2$$

对(68)式在 $(0, t)$ 上由 Gronwall 引理可得：

$$\| \boldsymbol{W}_1(t, w, W_{10}) \|^2 \leqslant e^{c\int_0^t M_\varepsilon(\tau, w)\mathrm{d}\tau} \| W_{10} \|^2 + c\int_0^t e^{c\int_s^t M_\varepsilon(r, w)\mathrm{d}r} N_\varepsilon(s, w)\mathrm{d}s$$

$$e^{c\int_0^t M_\varepsilon(\tau, w)\mathrm{d}\tau} + c e^{c\int_0^t M_\varepsilon(r, w)\mathrm{d}r}\int_s^t N_\varepsilon(s, w)\mathrm{d}s \tag{69}$$

由 $\tau \longmapsto z(\theta_\tau\omega)$ 是连续的，对任意的 $t > 0$，$w \in \Omega$，有

$$\int_0^t N_\varepsilon(\tau, w)\mathrm{d}\tau = \int_0^t [| e^{\varepsilon z(\theta_t w)} - 1 | (\| \boldsymbol{u} \|^2 + 1) + 1] \| \nabla \boldsymbol{u} \|^2 \mathrm{d}\tau \leqslant$$

$$\sup_{\tau \in (0, t)} | e^{\varepsilon z(\theta_t w)} - 1 | (\| \boldsymbol{u} \|^2 + 1)\int_0^t \| \nabla \boldsymbol{u} \|^2 \mathrm{d}\tau < \infty \tag{70}$$

同理

$$\int_0^t M_\varepsilon(\tau, w)\mathrm{d}\tau < \infty \tag{71}$$

结合(69)—(71) 式，由 Lebesgue 控制收敛定理，当 $\varepsilon \to 0$ 时有 $\| \boldsymbol{W}_1(t, w, W_{10}) \| \to 0$

$$\| \boldsymbol{W}_1(t, w, W_{10}) \| \to 0 \tag{72}$$

由(8) 式中的第二式及(64) 式可得

$$\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}t} - \kappa\Delta W_2 = -e^{\varepsilon z(\theta_t w)}(u^\varepsilon \cdot \nabla)\eta^\varepsilon + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\eta - (e^{\varepsilon z(\theta_t w)} - 1)\, u_2{}^\varepsilon \tag{73}$$

对(73) 式在 H_2 中用 W_2 作内积，其中

$$(-e^{\varepsilon z(\theta_t w)}(u^\varepsilon \cdot \nabla)\eta^\varepsilon + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\eta, W_2) =$$

$$-e^{\varepsilon z(\theta_t w)} b(\boldsymbol{W}_1, \eta, W_2) - (e^{\varepsilon z(\theta_t w)} - 1) b(\boldsymbol{u}, \eta, W_2) \tag{74}$$

则对(73) 式在 H_2 中用 W_2 作内积有：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| W_2 \|^2 + \kappa \| \nabla W_2 \|^2 =$$

$$-e^{\varepsilon z(\theta_t w)} b(\boldsymbol{W}_1, \eta, W_2) - (e^{\varepsilon z(\theta_t w)} - 1) b(\boldsymbol{u}, \eta, W_2) + (e^{\varepsilon z(\theta_t w)} - 1) u_2{}^\varepsilon \tag{75}$$

而

$$-e^{\varepsilon z(\theta_t w)} b(\boldsymbol{W}_1, \eta, W_2) \leqslant c e^{\varepsilon z(\theta_t w)} \| \boldsymbol{W}_1 \|^{\frac{1}{2}} \| \nabla \boldsymbol{W}_1 \|^{\frac{1}{2}} \| \nabla \eta \| \, \| W_2 \|^{\frac{1}{2}} \| \nabla W_2 \|^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$c e^{4\varepsilon z(\theta_t w)} \| W_2 \|^2 \| \nabla W_2 \|^2 + c \| \boldsymbol{W}_1 \|^2 \| \nabla \boldsymbol{W}_1 \|^2 + c \| \nabla \eta \|^2 \tag{76}$$

$$b(\boldsymbol{u}, \eta, W_2) \leqslant c \| \boldsymbol{u} \|^{\frac{1}{2}} \| \nabla \boldsymbol{u} \|^{\frac{1}{2}} \| \nabla \eta \| \, \| W_2 \|^{\frac{1}{2}} \| \nabla W_2 \|^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$c \| W_2 \|^2 \| \nabla W_2 \|^2 + c \| \boldsymbol{u} \|^2 \| \nabla \boldsymbol{u} \|^2 + c \| \nabla \eta \|^2 \tag{77}$$

结合(75)—(77) 式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| W_2 \|^2 \leqslant c(e^{4\varepsilon z(\theta_t w)} \| \nabla W_2 \|^2 + \| \nabla W_2 \|^2) \| W_2 \|^2 + c \| \boldsymbol{W}_1 \|^2 \| \nabla \boldsymbol{W}_1 \|^2 +$$

$$c \| \boldsymbol{u} \|^2 \| \nabla \boldsymbol{u} \|^2 + c \| \nabla \eta \|^2 + | e^{\varepsilon z(\theta_t w)} - 1 | \, \| u^\varepsilon \|^2 \tag{78}$$

与对(69) 式的讨论类似，当 $\varepsilon \to 0$ 时我们有

$$\| W_2(t, w, W_{20}) \| \to 0 \tag{79}$$

结合(69) 及(79) 式可知该引理成立，即

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \| \boldsymbol{\xi}^\varepsilon(t, \omega, \boldsymbol{\xi}_0{}^\varepsilon) - \boldsymbol{\xi}(t, \boldsymbol{\xi}_0) \| = 0$$

定理 2　给定 $\varepsilon \in (0, 1]$，令 $\mathscr{A}_\varepsilon = \{A_\varepsilon(w)\}_{w \in \Omega}$ 是方程组(4) 的随机吸引子，$\mathscr{A}$ 是方程组(60) 的全局吸引子，则对 P — a. e. $w \in \Omega$，有

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{dist}(\mathscr{A}_\varepsilon(w), \mathscr{A}) = 0$$

证　由引理 1，定义如下的 $K_\varepsilon = \{K_\varepsilon(w)\}_{w \in \Omega}$：

$$K_{\varepsilon}(w)=\{\xi \in H, \|\xi\|^{2} \leqslant r_{1}(w)+r_{2\varepsilon}(w)+c\}$$

其中 $r_1(w)$ 和 $r_{2\varepsilon}(w)$ 分别由(14)和(15)式给出. 从而有

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \| K_{\varepsilon}(w) \| \leqslant c$$

即 K_ε 存在一致的上界. 由引理3知, $E_{\varepsilon}(w)=\{\xi \in H: \|\xi\|_V^2 \leqslant M_{\varepsilon}(w)\}$ 是 H 中紧的随机吸收集. 由引理3的证明过程易知: $M_\varepsilon(w)$ 关于 ε 是递增的(类似于 $r_{1\varepsilon}(w)$), 则

$$\bigcup_{0<\varepsilon\leqslant 1} A_{\varepsilon}(w) \subset \bigcup_{0<\varepsilon\leqslant 1} E_{\varepsilon}(w) \subset E_1(w), w \in \Omega$$

所以, $\bigcup_{0<\varepsilon\leqslant 1} A_{\varepsilon}(w)$ 在 H 中是预紧的. 由文献[4]的理论结果和引理4, 结论成立.

参考文献:

[1] TEMAM R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics [M]. New York: Springer-Verlag, 1988.

[2] CUI H Y, LI Y R, YIN J Y. Long Time Behavior of Stochastic MHD Equations Perturbed by Multiplicative Noise [J]. Journal of Applied Analysis and Computation, 2016, 6(4): 1081-1104.

[3] LI Y R, GU A H, LI J. Existence and Continuity of Bi-Spatial Random Attractors and Application to Stochastic Semilinear Laplacian Equations [J]. J Differential Equations, 2014, 258(2): 504-534.

[4] WANG B X. Upper Semicontinuity of Random Attractors for Non-Compact Random Dynamical Systems [J]. E J Differential Equations, 2009, (2009)139: 1-18.

[5] 华晓玲, 李扬荣. 随机耗散 Camassa-Hoim 方程随机吸引子的上半连续性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(2): 51-57.

Upper Semicontinuity of Random Attractors for Boussinesq Equations with Multiplicative Noise

JING Gui, LI Yang-rong, SHE Lian-bing

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we study the asymptotic behavior of solutions for the Boussinesq equations with multiplicative noise, and prove that the random dynamical system generated by the equation has a unique random attractor in a square integrable space, and it is upper semi-continuous.

Key words: stochastic Boussinesq equation; existence of random attractors; upper semicontinuity

责任编辑 张 枸