DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.11.011

条件弱鞅的极小值不等式①

高玉峰，　冯德成，　王晓艳，　张　潇，　周　霖

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要： 在弱(下)鞅的极小值不等式的基础上，得到了条件弱鞅的一类极小值不等式.

关　键　词： 弱鞅；条件弱鞅；极小值不等式

中图分类号：O211.4　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673-9868(2017)11-0074-07

本文所提到的随机变量都定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{A}, P)$上. 用$E^{\mathscr{F}}(X)$表示随机变量X的条件数学期望，即

$$E^{\mathscr{F}}(X)=E(X \mid \mathscr{F})$$

这里$\mathscr{F}$是$\mathscr{A}$的一个给定的子σ-代数. 记

$$x^{+}=\max\{x, 0\}$$

I_A 表示集合 A 的示性函数.

定义 1[1]　设$\{S_n, n \geqslant 1\}$是一列L^1随机变量，如果对任意$j \geqslant 1$，有

$$E\{(S_{j+1}-S_j)f(S_1, \cdots, S_j)\} \geqslant 0$$

其中f是任意的分量不减的函数且使期望有意义，那么称$\{S_n, n \geqslant 1\}$是一个弱鞅(demimartingale). 进而，若f是非负函数，则称$\{S_n, n \geqslant 1\}$是一个弱下鞅(demisubmartingale).

弱鞅和弱下鞅的概念是由 Newman 和 Wright[1] 提出的，此后许多学者对这一概念进行了系统研究[1-8]. 2010 年，Hadjikyriakou[9] 引入了条件弱鞅和条件弱下鞅的概念.

定义 2[9]　设$\{S_n, n \geqslant 1\}$是一列随机变量，如果对任意$1 \leqslant i < j < \infty$，有

$$E^{\mathscr{F}}\{(S_j-S_i)f(S_1, \cdots, S_i)\} \geqslant 0 \text{ a.s.} \tag{1}$$

其中f是任意的分量不减的函数且使条件期望有意义，那么称$\{S_n, n \geqslant 1\}$是给定$\mathscr{F}$下的一个条件弱鞅($\mathscr{F}$-demimartingale). 进而，若f是非负函数，则称$\{S_n, n \geqslant 1\}$是一个条件弱下鞅($\mathscr{F}$-demisubmartingale).

很容易验证，对于任意$i \geqslant 1$，(1) 式等价于

$$E^{\mathscr{F}}\{(S_{i+1}-S_i)f(S_1, \cdots, S_i)\} \geqslant 0 \text{ a.s.}$$

对于任意满足$E|X|<\infty$的随机变量X，从条件期望的性质$E(E(X \mid \mathscr{F}))=E(X)$可知，定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{A}, P)$上的条件弱鞅和条件弱下鞅分别是概率空间$(\Omega, \mathscr{A}, P)$上的弱鞅和弱下鞅，但是反之并不成立. Hadjikyriakou[9] 给出了一个随机变量序列是弱鞅但不是条件弱鞅的例子.

很多学者给出了许多关于条件弱鞅的结果，比如，Christofides 和 Hadjikyriakou[10] 给出了条件弱鞅的 Chow 型不等式，Wang 等[11] 得到了条件弱鞅的另外一些形式的最大值不等式和矩不等式.

---

① 收稿日期：2016-10-25
基金项目：国家自然科学基金项目(11461061)；西北师范大学青年教师科研能力提升计划项目(NWNU-LKQN-11-2).
作者简介：高玉峰(1991-)，男，河北沧州人，硕士，主要从事随机分析和应用概率的研究.

定义 3[9] 称随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是条件相协的($\mathscr{F}$-associated),如果

$$\mathrm{Cov}^{\mathscr{F}}\{f(X_1, \cdots, X_n), \boldsymbol{g}(X_1, \cdots, X_n)\} \geqslant 0 \text{ a. s.}$$

其中 $f, \boldsymbol{g}$ 是任意的分量不减的函数且使上述条件协方差有意义. 称$\{X_n, n \geqslant 1\}$是条件相协随机变量序列,如果对每个 $n \geqslant 1$,随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是条件相协的.

由条件相协随机变量的定义知,均值为零的条件相协随机变量序列的部分和是一个条件弱鞅.

Dai[12] 利用弱鞅的性质,给出了非负弱鞅的极小值不等式. 受其启发,本文在文献[12]的基础上,利用条件弱鞅的性质,得到了条件弱鞅的一类极小值不等式.

引理 1[10] 设$\{S_n, n \geqslant 1\}$是一个条件弱鞅或条件弱下鞅,如果 f 是一个不减凸函数,那么$\{f(S_n), n \geqslant 1\}$是一个条件弱下鞅.

引理 2[10] 设$\{S_n, n \geqslant 1\}$是一个条件弱鞅或条件弱下鞅,则$\{S_n^+, n \geqslant 1\}$和$\{S_n^-, n \geqslant 1\}$是一个条件弱下鞅.

引理 3[11] 设$\{S_n, n \geqslant 1\}$是一个条件弱鞅,且 $g(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个不减凸函数,满足 $E^{\mathscr{F}}[g(S_i)] < \infty$ a. s. ,$i \geqslant 1$,则对任意的 $\mathscr{F}$ 可测的随机变量 $\varepsilon > 0$ a. s. ,有

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} g(S_i) \geqslant \varepsilon) \leqslant E^{\mathscr{F}}(g(S_n) I(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} g(S_i) \geqslant \varepsilon)) \text{ a. s.}$$

推论 1 设$\{S_n, n \geqslant 1\}$是条件弱鞅,$S_0 = 0$,则对任何关于 $\mathscr{F}$ 可测的随机变量 $\varepsilon > 0$ a. s. ,有

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant \varepsilon) \leqslant E^{\mathscr{F}}(S_n I(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant \varepsilon)) \text{a. s.}$$

证 在引理 3 中,令 $g(x) = x$,就得到了上述结论.

设 g 是 $\mathbb{R}$ 上的一个凸函数,凸函数 g 的左导数定义如下:

$$h(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

因此,$h(x)$ 是一个不减函数,并且有

$$g(y) - g(x) \geqslant (y - x) h(x)$$

定理 1 设$\{S_n, n \geqslant 1\}$是非负条件弱(下)鞅,$S_0 = 0$,$g(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个不减凸函数,且满足 $g(0) = 0$,$\{c_n, n \geqslant 1\}$是一负的不增的且关于 $\mathscr{F}$ 可测的随机变量序列,则对任何关于 $\mathscr{F}$ 可测的随机变量 $\varepsilon > 0$ a. s. ,有

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(\min_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k g(S_k) \leqslant -\varepsilon) \leqslant -c_n E^{\mathscr{F}}[g(S_n) I(\min_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k g(S_k) \leqslant -\varepsilon)] \text{ a. s.}$$

证 对固定的 $n \geqslant 1$,令

$$A = \{\min_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k g(S_k) \leqslant -\varepsilon\}$$

则 A 可以写为

$$A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

其中

$$A_1 = \{c_1 g(S_1) \leqslant -\varepsilon\}$$

$$A_j = \{c_i g(S_i) > -\varepsilon, 1 \leqslant i < j, c_j g(S_j) \leqslant -\varepsilon\} \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

当 $i \neq j$ 时,

$$A_i \cap A_j = \phi$$

且

$$I_{A_2} = I_{A_1 \cup A_2} - I_{A_1}$$

由于$\{c_n, n \geqslant 1\}$不增,有

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(A) = \sum_{j=1}^{n} P^{\mathscr{F}}(A_j) = \sum_{j=1}^{n} E^{\mathscr{F}}(\varepsilon I_{A_j}) \leqslant \sum_{j=1}^{n} E^{\mathscr{F}}(-c_j g(S_j) I_{A_j}) =$$

$$E^{\mathscr{F}}(-c_1 g(S_1)I_{A_1}) + E^{\mathscr{F}}(-c_2 g(S_2)I_{A_2}) + \sum_{j=3}^{n} E^{\mathscr{F}}(-c_j g(S_j)I_{A_j}) =$$

$$E^{\mathscr{F}}(-c_1 g(S_1)I_{A_1}) + E^{\mathscr{F}}[-c_2 g(S_2)(I_{A_1\cup A_2} - I_{A_1})] + \sum_{j=3}^{n} E^{\mathscr{F}}(-c_j g(S_j)I_{A_j}) =$$

$$E^{\mathscr{F}}(-c_2 g(S_2)I_{A_1\cup A_2}) + E^{\mathscr{F}}[(c_2 g(S_2) - c_1 g(S_1))I_{A_1}] + \sum_{j=3}^{n} E^{\mathscr{F}}(-c_j g(S_j)I_{A_j}) \leqslant$$

$$E^{\mathscr{F}}(-c_2 g(S_2)I_{A_1\cup A_2}) + c_2 E^{\mathscr{F}}[(g(S_2) - g(S_1))I_{A_1}] + \sum_{j=3}^{n} E^{\mathscr{F}}(-c_j g(S_j)I_{A_j}) \text{ a. s.}$$

注意到

$$E^{\mathscr{F}}[(g(S_2) - g(S_1))I_{A_1}] \geqslant E^{\mathscr{F}}[(S_2 - S_1)h(S_1)I_{A_1}] \text{ a. s.}$$

因为 $h(S_1)I_{A_1}$ 是关于 S_1 的非负不减函数，由条件弱(下)鞅的定义可知，

$$E^{\mathscr{F}}[(S_2 - S_1)h(S_1)I_{A_1}] \geqslant 0 \text{ a. s.}$$

从而有

$$E^{\mathscr{F}}[(g(S_2) - g(S_1))I_{A_1}] \geqslant 0 \text{ a. s.}$$

又因为$\{c_n, n \geqslant 1\}$ 是负值，有

$$c_2 E^{\mathscr{F}}[(g(S_2) - g(S_1))I_{A_1}] \leqslant 0 \text{ a. s.}$$

所以，我们可以得到

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(A) \leqslant E^{\mathscr{F}}(-c_2 g(S_2)I_{A_1\cup A_2}) + \sum_{j=3}^{n} E^{\mathscr{F}}(-c_j g(S_j)I_{A_j}) =$$

$$E^{\mathscr{F}}(-c_2 g(S_2)I_{A_1\cup A_2}) + E^{\mathscr{F}}(-c_3 g(S_3)I_{A_3}) + \sum_{j=4}^{n} E^{\mathscr{F}}(-c_j g(S_j)I_{A_j}) =$$

$$E^{\mathscr{F}}(-c_2 g(S_2)I_{A_1\cup A_2}) + E^{\mathscr{F}}(-c_3 g(S_3)(I_{A_1\cup A_2\cup A_3} - I_{A_1\cup A_2})) + \sum_{j=4}^{n} E^{\mathscr{F}}(-c_j g(S_j)I_{A_j}) =$$

$$E^{\mathscr{F}}(-c_3 g(S_3)I_{A_1\cup A_2\cup A_3}) + E^{\mathscr{F}}[(c_3 g(S_3) - c_2 g(S_2))I_{A_1\cup A_2}] + \sum_{j=4}^{n} E^{\mathscr{F}}(-c_j g(S_j)I_{A_j}) \leqslant$$

$$E^{\mathscr{F}}(-c_3 g(S_3)I_{A_1\cup A_2\cup A_3}) + c_3 E^{\mathscr{F}}[(g(S_3) - g(S_2))I_{A_1\cup A_2}] + \sum_{j=4}^{n} E^{\mathscr{F}}(-c_j g(S_j)I_{A_j}) \text{ a. s.} \tag{2}$$

注意到

$$E^{\mathscr{F}}[(g(S_3) - g(S_2))I_{A_1\cup A_2}] \geqslant E^{\mathscr{F}}[(S_3 - S_2)h(S_2)I_{A_1\cup A_2}] \text{ a. s.}$$

因为

$$A_1 \cup A_2 = \{\min(c_1 g(S_1), c_2 g(S_2)) \leqslant -\varepsilon\}$$

$h(S_2)I_{A_1\cup A_2}$ 是非负的且关于$\{S_1, S_2\}$ 的每个分量不减的函数，因此，有

$$E^{\mathscr{F}}[(S_3 - S_2)h(S_2)I_{A_1\cup A_2}] \geqslant 0 \text{ a. s.}$$

从而有

$$E^{\mathscr{F}}[g(S_3) - g(S_2)I_{A_1\cup A_2}] \geqslant 0 \text{ a. s.} \tag{3}$$

由(2) 式和(3) 式，注意到 c_n，$n \geqslant 1$ 是负值，就有

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(A) \leqslant E^{\mathscr{F}}(-c_3 g(S_3)I_{A_1\cup A_2\cup A_3}) + \sum_{j=4}^{n} E^{\mathscr{F}}(-c_j g(S_j)I_{A_j}) \text{a. s.}$$

重复上述步骤，可以得到

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(A) \leqslant E^{\mathscr{F}}(-c_{n-1} g(S_{n-1})I_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}}) + E^{\mathscr{F}}(-c_n g(S_n)I_{A_n}) =$$

$$E^{\mathscr{F}}(-c_{n-1} g(S_{n-1})I_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}}) + E^{\mathscr{F}}[-c_n g(S_n)(I_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n} - I_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}})] =$$

$$-c_nE^{\mathscr{F}}(g(S_n)I_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n})+E^{\mathscr{F}}[(c_ng(S_n)-c_{n-1}g(S_{n-1}))I_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}}]\leqslant$$
$$-c_nE^{\mathscr{F}}(g(S_n)I_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n})+c_nE^{\mathscr{F}}[(g(S_n)-g(S_{n-1}))I_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}}]\ \text{a. s.}\tag{4}$$

因为

$$E^{\mathscr{F}}[(g(S_n)-g(S_{n-1}))I_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}}]\geqslant$$
$$E^{\mathscr{F}}[(S_n-S_{n-1})h(S_{n-1})I_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}}]\ \text{a. s.}$$

并且

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}=\{\min(c_1g(S_1),c_2g(S_2),\cdots,c_{n-1}g(S_{n-1}))\leqslant-\varepsilon\}$$

所以 $I_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}}$ 是非负的且关于$\{S_1,S_2,\cdots,S_{n-1}\}$的每个分量不减的函数，又因为$\{S_n,n\geqslant1\}$是非负条件弱(下)鞅，$\{c_n,n\geqslant1\}$是一负的不增的随机变量序列，故

$$c_nE^{\mathscr{F}}[(S_n-S_{n-1})h(S_{n-1})I_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}}]\leqslant0\ \text{a. s.}\tag{5}$$

结合(4)式和(5)式，就有

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(A)\leqslant-c_nE^{\mathscr{F}}(g(S_n)I_A)\ \text{a. s.}$$

证毕.

推论2 设$\{S_n,n\geqslant1\}$是非负条件弱(下)鞅，$S_0=0$，$\{c_n,n\geqslant1\}$是一负的不增的且关于$\mathscr{F}$可测的随机变量序列，则对任何关于$\mathscr{F}$可测的随机变量$\varepsilon>0$ a.s.，有

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(\min_{1\leqslant k\leqslant n}c_kS_k\leqslant-\varepsilon)\leqslant-c_nE^{\mathscr{F}}[S_nI(\min_{1\leqslant k\leqslant n}c_kS_k\leqslant-\varepsilon)]\ \text{a. s.}$$

证 在定理1，令$g(x)=x$就可以得到推论2的结果.

在定理1中，若取$g(x)=x^+$，则$g(x)$是一个非负的凸函数，因此，就有下面的推论.

推论3 设$\{S_n,n\geqslant1\}$是非负条件弱(下)鞅，$S_0=0$，且$\{c_n,n\geqslant1\}$是一负的不增的且关于$\mathscr{F}$可测的随机变量序列，则对任何关于$\mathscr{F}$可测的随机变量$\varepsilon>0$ a.s.，有

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(\min_{1\leqslant k\leqslant n}c_kS_k^+\leqslant-\varepsilon)\leqslant-c_nE^{\mathscr{F}}[S_n^+I(\min_{1\leqslant k\leqslant n}c_kS_k^+\leqslant-\varepsilon)]\ \text{a. s.}$$

定理2 设$\{S_n,n\geqslant1\}$是非负条件弱鞅，$S_0=0$，$\{c_n,n\geqslant1\}$是一负的不减的且关于$\mathscr{F}$可测的随机变量序列，则对任何关于$\mathscr{F}$可测的随机变量$\varepsilon>0$ a.s.，有

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(\min_{1\leqslant k\leqslant n}c_kS_k\leqslant-\varepsilon)\leqslant-c_1E^{\mathscr{F}}(S_1)+c_nE^{\mathscr{F}}[S_nI(\min_{1\leqslant k\leqslant n}c_kS_k>-\varepsilon)]\ \text{a. s.}$$

证 对固定的$n\geqslant1$，令

$$A=\{\min_{1\leqslant k\leqslant n}c_kS_k\leqslant-\varepsilon\}$$

则A可以写成

$$A=\bigcup_{j=1}^{n}A_j$$

其中

$$A_1=\{c_1S_1\leqslant-\varepsilon\}$$
$$A_j=\{c_iS_i>-\varepsilon,1\leqslant i<j,c_jS_j\leqslant-\varepsilon\}\qquad 1\leqslant j\leqslant n$$

当$i\neq j$时，

$$A_i\cap A_j=\phi$$

且

$$I_{A_2}=I_{A_1^c}-I_{A_1^cA_2^c}$$

根据$\{c_n,n\geqslant1\}$的单调性，有

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(A)=\varepsilon\sum_{j=1}^{n}P^{\mathscr{F}}(A_j)=\sum_{j=1}^{n}E^{\mathscr{F}}(\varepsilon I_{A_j})\leqslant\sum_{j=1}^{n}E^{\mathscr{F}}(-c_jS_jI_{A_j})=$$
$$E^{\mathscr{F}}(-c_1S_1I_{A_1})+\sum_{j=2}^{n}E^{\mathscr{F}}(-c_jS_jI_{A_j})=$$

$$E^{\mathscr{F}}(-c_1S_1)-E^{\mathscr{F}}(-c_1S_1I_{A_1^c})+E^{\mathscr{F}}(-c_2S_2I_{A_2})+\sum_{j=3}^{n}E^{\mathscr{F}}(-c_jS_jI_{A_j})\leqslant$$

$$E^{\mathscr{F}}(-c_1S_1)-c_2E^{\mathscr{F}}(-S_1I_{A_1^c})+E^{\mathscr{F}}(-c_2S_2I_{A_2})+\sum_{j=3}^{n}E^{\mathscr{F}}(-c_jS_jI_{A_j})=$$

$$E^{\mathscr{F}}(-c_1S_1)-c_2E^{\mathscr{F}}(-S_1I_{A_1^c})+E^{\mathscr{F}}(-c_2S_2I_{A_1^c})-E^{\mathscr{F}}(-c_2S_2I_{A_1^cA_2^c})+\sum_{j=3}^{n}E^{\mathscr{F}}(-c_jS_jI_{A_j})=$$

$$E^{\mathscr{F}}(-c_1S_1)+c_2E^{\mathscr{F}}(S_1-S_2)+c_2E^{\mathscr{F}}[(S_2-S_1)I_{A_1}]+\sum_{j=3}^{n}E^{\mathscr{F}}(-c_jS_jI_{A_j})\text{a. s.}$$

因为 I_{A_1} 是关于 S_1 的非负不减函数，由条件弱鞅的定义可知，

$$E^{\mathscr{F}}[(S_2-S_1)I_{A_1}]\geqslant 0\text{ a. s.}$$

注意到 c_n，$n\geqslant 1$ 是负值，就有

$$c_2E^{\mathscr{F}}[(S_2-S_1)I_{A_1}]\leqslant 0\text{ a. s.}$$

而且，由条件弱鞅的定义可知，

$$E^{\mathscr{F}}S_1=E^{\mathscr{F}}S_n\text{ a. s.，}n\geqslant 1$$

所以，可以得到

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(A)\leqslant E^{\mathscr{F}}(-c_1S_1)-E^{\mathscr{F}}(-c_2S_2I_{A_1^cA_2^c})+\sum_{j=3}^{n}E^{\mathscr{F}}(-c_jS_jI_{A_j})\leqslant$$

$$E^{\mathscr{F}}(-c_1S_1)-c_3E^{\mathscr{F}}(-S_2I_{A_1^cA_2^c})+E^{\mathscr{F}}(-c_3S_3I_{A_3})+\sum_{j=4}^{n}E^{\mathscr{F}}(-c_jS_jI_{A_j})=$$

$$E^{\mathscr{F}}(-c_1S_1)-c_3E^{\mathscr{F}}(-S_2I_{A_1^cA_2^c})+E^{\mathscr{F}}(-c_3S_3I_{A_1^cA_2^c})-E^{\mathscr{F}}(-c_3S_3I_{A_1^cA_2^cA_3^c})+\sum_{j=4}^{n}E^{\mathscr{F}}(-c_jS_jI_{A_j})=$$

$$E^{\mathscr{F}}(-c_1S_1)+c_3E^{\mathscr{F}}[(S_2-S_3)I_{A_1^cA_2^c}]-E^{\mathscr{F}}(-c_3S_3I_{A_1^cA_2^cA_3^c})+\sum_{j=4}^{n}E^{\mathscr{F}}(-c_jS_jI_{A_j})=$$

$$E^{\mathscr{F}}(-c_1S_1)+c_3E^{\mathscr{F}}[(S_3-S_2)I_{A_1\cup A_2}]-E^{\mathscr{F}}(-c_3S_3I_{A_1^cA_2^cA_3^c})+\sum_{j=4}^{n}E^{\mathscr{F}}(-c_jS_jI_{A_j})\text{a. s.}$$

因为

$$A_1\cup A_2=\{\min(c_1S_1,\ c_2S_2)\leqslant-\varepsilon\}$$

$I_{A_1\cup A_2}$ 是非负的且关于$\{S_1,S_2\}$的每个分量不减的函数，因此，有

$$E^{\mathscr{F}}[(S_3-S_2)I_{A_1\cup A_2}]\geqslant 0\text{ a. s.}$$

又$\{c_n,\ n\geqslant 1\}$是负值，就有

$$c_3E^{\mathscr{F}}[(S_3-S_2)I_{A_1\cup A_2}]\leqslant 0\text{ a. s.}$$

从而就有

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(A)\leqslant E^{\mathscr{F}}(-c_1S_1)-E^{\mathscr{F}}(-c_3S_3I_{A_1^cA_2^cA_3^c})+\sum_{j=4}^{n}E^{\mathscr{F}}(-c_jS_jI_{A_j})\text{a. s.}$$

重复以上步骤，就得到

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(A)\leqslant-c_1E^{\mathscr{F}}(S_1)+c_nE^{\mathscr{F}}(S_nI_{A^c})\text{a. s.}$$

证毕.

上面的定理1,2及推论2,3，给出了非负条件弱(下)鞅的最小值不等式，采用同样的方法，可以得到非正条件弱鞅类似的结果.

定理3 设$\{S_n, n\geqslant 1\}$是非正条件弱鞅，$S_0=0$，$\{c_n, n\geqslant 1\}$是一正的不减的且关于$\mathscr{F}$可测的随机变量序列，则对任何关于$\mathscr{F}$可测的随机变量$\varepsilon>0$ a.s.，有

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(\min_{1\leqslant k\leqslant n} c_k S_k\leqslant -\varepsilon)\leqslant -c_n E^{\mathscr{F}}[S_n I(\min_{1\leqslant k\leqslant n} c_k S_k\leqslant -\varepsilon)]\text{ a.s.}$$

证 与定理1的证法类似.

在定理3中，令$c_k=1$，a.s.，$k\geqslant 1$，可得下面的推论.

推论4 设$\{S_n, n\geqslant 1\}$是条件弱鞅，$S_0=0$，则对任何关于$\mathscr{F}$可测的随机变量$\varepsilon>0$ a.s.，有

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(\min_{1\leqslant k\leqslant n} S_k\leqslant -\varepsilon)\leqslant E^{\mathscr{F}}[-S_n I(\min_{1\leqslant k\leqslant n} S_k\leqslant -\varepsilon)]\text{ a.s.}$$

定理4 设$\{S_n, n\geqslant 1\}$是条件弱鞅，$S_0=0$，则对任何关于$\mathscr{F}$可测的随机变量$\varepsilon>0$ a.s.，有

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant\varepsilon)\leqslant E^{\mathscr{F}}[S_n(I(\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k\geqslant\varepsilon)-I(\min_{1\leqslant k\leqslant n} S_k\leqslant -\varepsilon))]\text{ a.s.}$$

证 令

$$A_n=\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k\geqslant\varepsilon\}\qquad B_n=\{\min_{1\leqslant k\leqslant n} S_k\leqslant -\varepsilon\}$$

因为，

$$\begin{aligned}P^{\mathscr{F}}(A_n\cup B_n)=&P^{\mathscr{F}}(\{\min_{1\leqslant k\leqslant n} S_k\leqslant -\varepsilon\}\cup\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k\geqslant\varepsilon\})=\\&P^{\mathscr{F}}(\{-\min_{1\leqslant k\leqslant n} S_k\geqslant\varepsilon\}\cup\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k\geqslant\varepsilon\})=\\&P^{\mathscr{F}}(\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}(-S_k)\geqslant\varepsilon\}\cup\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k\geqslant\varepsilon\})=\\&P^{\mathscr{F}}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant\varepsilon)\text{ a.s.}\end{aligned}$$

所以，有

$$\begin{aligned}P^{\mathscr{F}}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant\varepsilon)=&P^{\mathscr{F}}(A_n\cup B_n)\leqslant\\&P^{\mathscr{F}}(A_n)+P^{\mathscr{F}}(B_n)\leqslant\\&\frac{1}{\varepsilon}E^{\mathscr{F}}(S_nI_{A_n})+\frac{1}{\varepsilon}E^{\mathscr{F}}(-S_nI_{B_n})=\\&\frac{1}{\varepsilon}E^{\mathscr{F}}[S_n(I_{A_n}-I_{B_n})]\text{ a.s.}\end{aligned}$$

因此，就有

$$\varepsilon P^{\mathscr{F}}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant\varepsilon)\leqslant E^{\mathscr{F}}[S_n(I(\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k\geqslant\varepsilon)-I(\min_{1\leqslant k\leqslant n} S_k\leqslant -\varepsilon))]\text{ a.s.}$$

证毕.

参考文献：

[1] NEWMAN C M，WRIGHT A L. Associated Random Variables and Martingale Inequalities [J]. Z Wahrsch Verw Geb，1982，59(3)：361－371.

[2] CHRISTOFIDES T C. Maximal Inequalities for Demimartingales and a Strong Law of Large Numbers [J]. Statistics and Probability Letters，2000，50(4)：357－363.

[3] CHRISTOFIDES T C. U-Statistics on Associated Random Variables [J]. Journal of Statistical Planning and Inference，2004，119(1)：1－15.

[4] WANG Jian-feng. Maximal Inequalities for Associated Random Variables and Demimartingales [J]. Statistics and Probability Letters，2004，66(3)：347－354.

[5] WANG Xue-jun，HU Shu-he. Maximal Inequalities for Demimartingales and Their Applications [J]. Science in China Series A：Mathematics，2009，52(10)：2207－2217.

[6] HU Shu-he，WANG Xue-jun，YANG Wen-zhi，et al. The Hàjek-Rènyi-Type Inequality for Associated Random Variables [J]. Statistics and Probability Letters，2009，79(7)：884－888.

[7] PRAKASA RAO B L S. On Some Inequalities for Demisubmartingales and N-Demisupermartingales [J]. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics，2007，8(4)：1－37.
[8] WANG Xue-jun，PRAKASA RAO B L S，HU Shu-he，et al. On Some Maximal Inequalities for Demimartingales and N-Demimartingales Based on Concave Young Functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2012，396(2)：434－440.
[9] HADJIKYRIAKOU M. Probability and Moment Inequalities for Demimartingales and Associated Random Variables [D]. Nicosia：University of Cyprus，2010.
[10] CHRISTOFIDES T C，HADJIKYRIAKOU M. Conditional Demimartingales and Related Results [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2013，398(1)：380－391.
[11] WANG Xing-hui，WANG Xue-jun. Some Inequalities for Conditional Demimartingales and Conditional N-Demimartingales [J]. Statistics and Probability Letters，2013，83(3)：700－709.
[12] DAI Ping-ping，SHEN Yan，HU Shu-he，et al. Some Results for Demimaringales and N-Demimartingales [J]. Journal of Inequalities and Applications，2014，2014(1)：1－12.

Some Minimal Inequalities for Conditional Demimartingales

GAO Yu-feng， FENG De-cheng， WANG Xiao-yan，
ZHANG Xiao， ZHOU Lin

College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China

Abstract：Some minimal inequalities for conditional demimartingales are obtained on the basis of minimal inequalities for demi(sub)martingales.

Key words：demimartingale；conditional demimartingale；minimal inequality

责任编辑 张 构