DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.11.012

实线性空间中向量优化问题近似真有效解的标量化研究[①]

谢　静，　高　英

重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331

摘要：研究了实线性空间中向量优化问题的近似真有效解及其标量化. 首先，指出已有结果的不合理性，通过例子对其进行了说明. 其次，利用 co-radiant 集给出了实线性空间中一种新的近似真有效解，并对它进行了标量化研究.

关　键　词：实线性空间；向量优化；近似真有效解；标量化

中图分类号：O221.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2017)11－0081－06

在向量优化问题中，解的定义是首要的问题. 1951 年，文献[1]第一次提出了 Pareto 有效解的概念. 同年，文献[2]发现 Pareto 有效解有时无法利用相应的标量化问题的最优解进行刻画，从而，他们首次提出了真有效解的概念，称之为 Kuhn-Tucker 真有效解. 此后，不少学者开始研究不同类型的真有效解. 例如：1968 年，文献[3]对于非可微多目标规划问题提出了 G-真有效解的概念；1977 年，文献[4]利用切锥的性质提出了 Borwein 真有效解；1979 年，文献[5]利用生成锥的性质给出了 Benson 真有效解的概念. 关于真有效解的理论研究有很多：如标量化和对偶理论等[2-7].

近年来，向量优化问题的近似解成为向量优化理论中的研究热点. 由于在非紧性条件下(弱)有效解一般不存在，而近似(弱)有效解在较弱的条件下可能存在，故向量优化问题近似解的研究具有重要的意义. 文献[8]首次提出了数值优化问题 ε-近似解的概念. 随后，文献[9]在文献[8]的基础上，介绍了一般多目标优化问题的 ε-有效解的概念，并研究了 ε-有效解的一些性质. 此后，不少学者研究了不同类型的近似有效解和近似真有效解的概念及相关性质[10-15].

本文在文献[14－15]的基础上在实线性空间中利用(相对)代数内部、向量闭包、代数对偶锥等相关概念及性质[16]引进了向量优化问题的近似真有效解，并给出了标量化结果. 首先，对于文献[14]中主要结果作进一步说明. 其次，给出了一种新的近似真有效解并对它进行了标量化研究.

1　预备知识

本文中，设 X 和 Y 是两个实线性空间，X^* 和 Y^* 分别为 X 和 Y 的线性对偶空间. $A\subseteq Y$，$K\subseteq Y$ 是一个非平凡的凸锥.

K 是点锥，如果 $K\cap(-K)=\{0\}$. $\mathrm{cone}(A)$，$\mathrm{conv}(A)$ 和 $\mathrm{vcl}(A)$ 分别表示 A 的生成锥、凸包、向量闭包. $\mathrm{cor}(A)$，$\mathrm{icr}(A)$ 分别表示 A 的代数内部和相对代数内部. K^+，K^{s+} 分别表示 K 的正极锥和严格正极锥. 其定义为：

---

① 收稿日期：2016－08－03

基金项目：国家自然科学基金项目(11201511)；重庆市科委项目(cstc2015jcyjA00005)；重庆市教委项目(KJ1500309).

作者简介：谢　静(1993－)，女，重庆梁平人，硕士研究生，主要从事向量优化的研究.

通信作者：高　英，副教授.

$$\mathrm{cor}(A)=\{y\in A:\forall y'\in Y,\ \exists\lambda'>0;\ \forall\lambda\in[0,\lambda'],\ y+\lambda y'\in A\}$$
$$\mathrm{icr}(A)=\{y\in A:\forall y'\in L(A),\ \exists\lambda'>0;\ \forall\lambda\in[0,\lambda'],\ y+\lambda y'\in A\}$$
$$\mathrm{vcl}(A)=\{b\in Y:\exists y\in Y;\ \forall\lambda'>0,\ \exists\lambda\in[0,\lambda'];\ b+\lambda y\in A\}$$
$$K^{+}=\{l\in X^{*}:\langle l,a\rangle\geqslant 0,\ \forall a\in K\}$$
$$K^{s+}=\{l\in X^{*}:\langle l,a\rangle>0,\ \forall a\in K\backslash\{0\}\}$$

本文将考虑如下向量优化问题：

(VOP)

$$K\text{-}\mathrm{Min}\{f(x):x\in E\}$$

其中：$E\subseteq X$ 且 $E\neq\varnothing$，$f:E\longrightarrow Y$.

设 $\varepsilon\in K\backslash\{0\}$，下面给出文献[14]中引进的4种近似解的概念.

定义 1[14] 称 $x_0\in E$ 为(VOP)问题的 ε-有效解，若

$$(f(E)-f(x_0)+\varepsilon)\cap(-K\backslash\{0\})=\varnothing$$

当 K 是代数内部非空的，称 $x_0\in E$ 为(VOP)问题的 ε-弱有效解，若

$$(f(E)-f(x_0)+\varepsilon)\cap(-\mathrm{cor}(K))=\varnothing$$

定义 2[14] 称 $x_0\in E$ 为(VOP)问题的 ε-Hurwicz 真有效解(ε-HuV)，若

$$\mathrm{vcl}(\mathrm{conv}(\mathrm{cone}((f(E)-f(x_0))\cup(K+\varepsilon))))\cap(-K)=\{0\}$$

称 $x_0\in E$ 为(VOP)问题的 ε-Benson 真有效解(ε-BeV)，若

$$\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0)+K+\varepsilon))\cap(-K)=\{0\}$$

文献[14]中针对(VOP)问题研究了 ε-HuV 与 ε-BeV 之间的关系，具体结果如下.

引理 1[14] 1) 若 x_0 是(VOP)问题的 ε-HuV，则 x_0 是(VOP)问题的 ε-BeV.

2) 假设 $-\varepsilon\in K$. 若 x_0 是(VOP)问题的 ε-BeV 且 $\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0)+K+\varepsilon)$ 是凸集，则 x_0 是(VOP)问题的 ε-HuV.

下面我们说明 ε-HuV 事实上是精确的有效解，在一定条件下，也是 Benson 真有效解.

引理 2 1) 若 x_0 是(VOP)问题的 ε-HuV，则 x_0 是(VOP)问题的有效解.

2) 假设 K 为点凸锥，若 x_0 是(VOP)问题的 ε-HuV，且 $\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0))$ 和 $\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0)+K)$ 都是闭集，则 x_0 为(VOP)问题的 Benson 真有效解.

证 1) 因为 x_0 是(VOP)问题的 ε-HuV，故

$$\mathrm{vcl}(\mathrm{conv}(\mathrm{cone}((f(E)-f(x_0))\cup(K+\varepsilon))))\cap(-K)=\{0\}$$

从而有

$$\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0)))\cap(-K)=\{0\}\tag{1}$$

因此

$$f(E)-f(x_0)\cap(-K)=\{0\}$$

所以，x_0 是(VOP)问题的有效解.

2) 因为 x_0 是(VOP)问题的 ε-HuV，故由(1)式可得

$$\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0)))\cap(-K)=\{0\}$$

又 $\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0))$ 是闭集. 从而有

$$\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0))\cap(-K)=\{0\}$$

另一方面，K 是点凸锥，所以有

$$\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0)+K)\cap(-K)=\{0\}$$

又由 $\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0)+K)$ 为闭集，从而有

$$\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0)+K))\cap(-K)=\{0\}$$

故 x_0 为(VOP)问题的 Benson 真有效解.

注 1 1) 若 $x_0\in E$ 满足(1)式，但 K 不为点锥，则 x_0 不一定为(VOP)问题的 Benson 真有效解(见例1)；若 $x_0\in E$ 满足(1)式，但 $\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0))$ 或 $\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0)+K)$ 不是闭集，则 x_0 不一定

为(VOP)问题的Benson真有效解(见例2).

2)当K为点锥时，引理1 2)中的假设$-\varepsilon \in K$和$\varepsilon \in K$意味着$\varepsilon = 0$，但文献[14]中要求$\varepsilon \in K\backslash\{0\}$，这表明当$K$为点锥时，条件$-\varepsilon \in K$是不合理的.由此可知，在点凸锥这个条件下，要由ε-BeV得到ε-HuV，必须要求$\varepsilon = 0$，即要由近似解得精确解，必须要有$\varepsilon = 0$这个条件.

例1　设$E \subseteq \mathbb{R}^2$，$f: E \longrightarrow \mathbb{R}^2$，$E = \{(x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1, x_1 \geqslant 0\}$，$f(x) = x$，$K = \{(x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geqslant 0\}$，$x_0 = (0, 0)^{\mathrm{T}} \in E$.可得到

$$\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(f(E) - f(x_0))) \cap (-K) = \{0\}$$

但

$$\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(f(E) - f(x_0) + K)) \cap (-K) \neq \{0\}$$

所以，x_0不是(VOP)问题的Benson真有效解.

例2　设$E \subseteq \mathbb{R}^2$，$f: E \longrightarrow \mathbb{R}^2$，$E = \{(x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}$，$f(x) = x$，$K = \{(x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geqslant -x_1(x_1 \leqslant 0), x_2 > -x_1(x_1 > 0)\}$，$x_0 = (0, 0)^{\mathrm{T}} \in E$.我们可得到

$$\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(f(E) - f(x_0))) \cap (-K) = \{0\}$$

但

$$\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(f(E) - f(x_0) + K)) \cap (-K) \neq \{0\}$$

所以，x_0不是(VOP)问题的Benson真有效解.

2　近似真有效解及标量化研究

本节在文献[15]的基础上给出了实线性空间中一种新的近似真有效解，并在引理3的基础上给出了其对应的线性标量化.

设非空集合$C \subseteq Y$，若对任意的$\alpha \geqslant 1$，有$\alpha C \subseteq C$，则称集合C是*co*-radiant集.令$C(\varepsilon) = \varepsilon C$，$\forall \varepsilon > 0$. $C(0) = \bigcup\limits_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon)$[2].

关于非空集合$Q \subseteq Y$的支撑函数$\sigma_Q: Y^* \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$为$\sigma_Q(y^*) = \sup\limits_{y \in Q}\{y^*(y)\}$，$\forall y^* \in Y^*$.

定义3[11]　设$E \subseteq X$，$f: E \longrightarrow Y$，若$\mathrm{cone}(f(E) + K)$为凸集，则称$f(E)$是在E上关于K的广义次类凸函数.

定义4[15]　称$x_0 \in E$是(VOP)问题关于C的ε有效解，若

$$(f(x_0) - C(\varepsilon)) \cap f(E) \subseteq \{f(x_0)\}$$

称$x_0 \in E$是(VOP)问题关于C的ε弱有效解，若

$$(f(x_0) - \mathrm{int}C(\varepsilon)) \cap f(E) = \varnothing$$

定义5[15]　设$\varepsilon \geqslant 0$.称$x_0 \in E$是(VOP)问题关于C的ε真有效解，若

$$\mathrm{cl\ cone}(f(E) + C(\varepsilon) - f(x_0)) \cap (-C(\varepsilon)) \subseteq \{0\}$$

引理3[14]　设M, K是Y上的两个非平凡的向量闭凸锥，M, K均相对代数内部非空，K^+代数内部非空.若$M \cap K = \{0\}$，则存在函数$l \in Y^*$使得

$$\langle l, k\rangle \geqslant 0 \geqslant \langle l, m\rangle \qquad \forall (k \in K, m \in M)$$

进一步有

$$\langle l, k\rangle > 0 \qquad \forall k \in K\backslash\{0\}$$

定义6　称$x_0 \in E$是(VOP)问题关于C的ε-Hurwicz真有效解(ε-HuV)，若

$$\mathrm{vcl}(\mathrm{conv}(\mathrm{cone}((f(E) - f(x_0)) \cup C(\varepsilon)))) \cap \mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(-C)) = \{0\}$$

称$x_0 \in E$是(VOP)问题关于C的ε-Benson真有效解(ε-BeV)，若

$$\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(f(E) - f(x_0) + C(\varepsilon))) \cap \mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(-C)) = \{0\}$$

注2　1)定义6中的关于C的ε-Hurwicz真有效解是在定义2的基础上得到的.与引理1的结果1)类似可得到：若x_0是(VOP)问题关于C的ε-HuV，则有

$$\mathrm{vcl}(\mathrm{conv}(\mathrm{cone}((f(E) - f(x_0)) \cup C(\varepsilon)))) \cap \mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(-C)) = \{0\}$$

从而

$$\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0)))\cap\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(-C))=\{0\}$$

所以 x_0 是(VOP)问题的有效解.

2)若 x_0 是(VOP)问题关于 C 的 ε-BeV,则 x_0 不一定是(VOP)问题关于 C 的 ε 有效解,见例3.

在引理1的基础上我们可得到如下结果.

定理1 1)若 x_0 是(VOP)问题关于 C 的 ε-HuV,则 x_0 是(VOP)问题关于 C 的 ε-BeV.

2)假设 $0\in C$,若 x_0 是(VOP)问题关于 C 的 ε-BeV 且 $\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0)+C(\varepsilon))$ 为凸集,则 x_0 是(VOP)问题关于 C 的 ε-HuV.

注3 1)定理1 1)的逆命题不一定成立,见例3.

2)若 x_0 是(VOP)问题关于 C 的 ε-BeV,则由假设 $0\in C$,我们可得 x_0 是(VOP)问题的有效解. 这是因为,若 x_0 是(VOP)问题关于 C 的 ε-BeV,则有

$$\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0)+C(\varepsilon)))\cap\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(-C))=\{0\}$$

又 $0\in C$,所以有

$$\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0)))\cap\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(-C))=\{0\}$$

故 x_0 是(VOP)问题的有效解. 特别地,以 $K+\varepsilon$ 来代替 $C(\varepsilon)$,则有 $0\in C(\varepsilon)=K+\varepsilon$,$-\varepsilon\in K$. 当 K 为点凸锥时,有 $\varepsilon=0$,这时,近似解之间的关系就转化为精确解之间的关系了.

例3 设 $E\subseteq\mathbb{R}^2$,$f:E\longrightarrow\mathbb{R}^2$,$E=\{(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\mid x_1=0,x_2\geqslant 0\}$,$f(x)=x$,$C=\{(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\mid x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_1+x_2\geqslant 1\}$,取 $\varepsilon=\dfrac{1}{4}$,$x_0=\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$,则我们可以得到:$x_0$ 是(VOP)问题关于 C 的 ε-BeV,但不是(VOP)问题关于 C 的 ε-HuV(如图1,2所示).

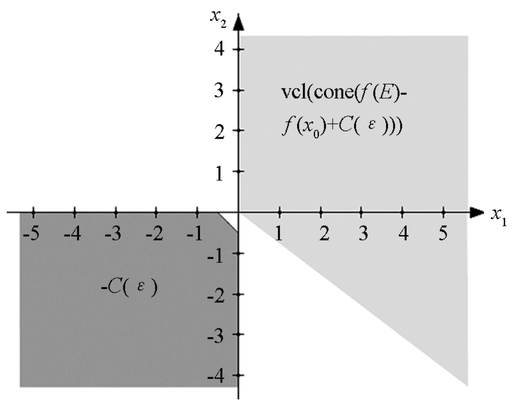

图1 x_0 是(VOP)问题关于 C 的 ε-BeV

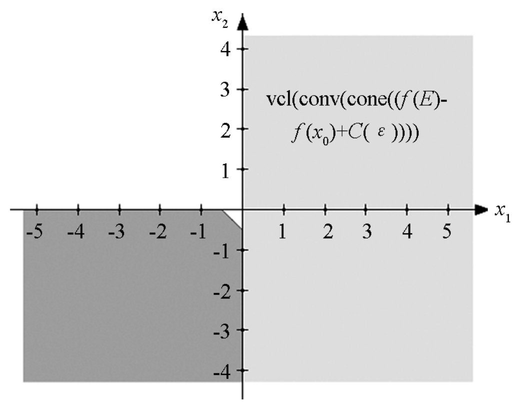

图2 x_0 不是(VOP)问题关于 C 的 ε-HuV

下面利用引理3建立(VOP)问题关于 C 的 ε-BeV 的线性标量化.

令

$$D=\mathrm{vcl}(C(0)\cup\{0\})=\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}C)$$

定理2 设 $\varepsilon\geqslant 0$,$x_0\in E$,C 是代数内部非空的凸集,$f(E)-f(x_0)$ 是在 E 上关于 $C(\varepsilon)$ 的广义次类凸函数. 若 x_0 是(VOP)问题关于 C 的 ε-BeV,则 x_0 为标量化问题 $\min\limits_{x\in E}\varphi(f(x))$ 的 $-\varepsilon\sigma_{-C}(\varphi)$ 最优解.

证 由 x_0 是(VOP)问题关于 C 的 ε-BeV,有

$$\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0)+C(\varepsilon)))\cap\{\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(-C))\}=\{0\}$$

所以

$$\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0)+C(\varepsilon)))\cap\{(-D)\}=\{0\}$$

又由假设:$f(E)-f(x_0)$ 是在 E 上关于 $C(\varepsilon)$ 的广义次类凸函数,得到 $\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}((f(E)-f(x_0))+C(\varepsilon)))$ 为凸集. 所以,由引理3,存在 $\varphi\in D^{s+}$ 使得

$$\varphi\in\mathrm{vcl}(\mathrm{cone}(f(E)-f(x_0)+C(\varepsilon)))^{+}$$

因此，有

$$\varphi(f(x)-f(x_0))+\varepsilon\varphi(d)\geqslant 0 \qquad \forall x\in E,\ d\in C$$

故

$$\varphi(f(x))\geqslant\varphi(f(x_0))-\varepsilon\inf_{d\in C}\{\varphi(d)\}=\varphi(f(x_0))+\varepsilon\sigma_{-C}(\varphi) \qquad \forall x\in E$$

所以，x_0 为标量化问题 $\min\limits_{x\in E}\varphi(f(x))$ 的 $-\varepsilon\sigma_{-C}(\varphi)$ 最优解.

注 4　若 $0\in C$ 且 $C(0)=D$，则当 $\varepsilon=0$ 时，定理 2 可以退化到文献[16]中定理 4.2 的结果.

定理 3　设 $\varepsilon\geqslant 0$，$x_0\in E$. 若存在 $\varphi\in D^{s+}$ 使得

$$\varphi(f(x))\geqslant\varphi(f(x_0))+\varepsilon\sigma_{-C}(\varphi) \qquad \forall x\in E$$

则 x_0 是(VOP)问题关于 C 的 ε-BeV.

证　假设 x_0 不是(VOP)问题关于 C 的 ε-BeV，则存在 $y\neq 0$ 使得

$$y\in\operatorname{vcl}(\operatorname{cone}(f(E)-f(x_0)+C(\varepsilon)))\cap\operatorname{vcl}(\operatorname{cone}(-C))$$

因为 $\varphi\in D^{s+}$，故 $\varphi(y)<0$. 又因

$$y\in\operatorname{vcl}(\operatorname{cone}(f(E)-f(x_0)+C(\varepsilon)))$$

从而存在 $y'\in Y$ 和序列 $\lambda_n\to 0^+$，使得

$$y+\lambda_n y'\in\operatorname{cone}(f(E)-f(x_0)+C(\varepsilon)) \qquad \forall n\in N$$

这表明，存在序列 $\{\alpha_n\}\subseteq[0,+\infty)$，$\{x_n\}\subseteq E$ 和 $\{d_n\}\subseteq C$，使得

$$y+\lambda_n y'=\alpha_n(f(x_n)-f(x_0)+\varepsilon d_n)$$

另一方面

$$\varphi(f(x))\geqslant\varphi(f(x_0))+\varepsilon\sigma_{-C}(\varphi) \qquad \forall x\in E$$

所以

$$\begin{aligned}\varphi(f(x_n)-f(x_0)+\varepsilon d_n)&=\varphi(f(x_n))-\varphi(f(x_0))+\varepsilon\varphi(d_n)\geqslant\\&\varphi(f(x_n))-\varphi(f(x_0))-\varepsilon\sigma_{-C}(\varphi)\geqslant 0\end{aligned}$$

即

$$\varphi(y+\lambda_n y')\geqslant 0$$

当 $\lambda_n\to 0^+$ 时，有 $\varphi(y)\geqslant 0$，这与前述 $\varphi(y)<0$ 矛盾. 所以 x_0 是(VOP)问题关于 C 的 ε-BeV.

注 5　若 $0\in C$ 且 $C(0)=D$，则当 $\varepsilon=0$ 时，定理 3 的结果可退化为 x_0 是(VOP)问题的 Benson 真有效解.

参考文献：

[1]　KOOPMANS T C. Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities [M] //Koopmans T C. Activity Analysis of Production and Allocation. New York：John Wiley and Sons，1951.

[2]　KUHN H W，TUCKER A W. Nonlinear programming [C] //Proceeding of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley：University of California Press，1951：481－492.

[3]　GEOFFRION A M. Proper Efficiency and the Theory of Vector Maximization [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1968，22：618－630.

[4]　BORWEIN J M. Proper Efficiency Points for Maximization with Respect to Cones [J]. Siam Journal on Control and Optimization，1997，15：57－63.

[5]　BENSON H P. An Improved Version of Proper Efficiency for Vector Minimization with Respect to Cones [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1979，71：232－241.

[6]　LALITHA C S，ARORA R. Proximal Proper Efficiency for Minimisation with Respect to Normal Cones [J]. Bull Austral Math Soc，2005，71：215－224.

[7]　李小燕，高　英. 多目标优化问题 Proximal 真有效解的最优性条件 [J]. 应用数学和力学，2015，36(6)：668－676.

[8]　KUTATELADZE S S. Convex ε-Programming [J]. Soviet Mathematical Dokl，1979，20：390－393.

[9]　LORIDAN P. ε-Solutions in Vector Minimization Problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1984，43(2)：265－276.

[10] GUTIERREZ C, JIMENEZ B, NOVO V. A Unified Approach and Optimality Conditions for Approximate Solutions of Vector Optimization Problems [J]. SIAM Journal on Optimization, 2006, 17(3): 688-710.
[11] GUTIERREZ C, JIMENEZ B, NOVO V. On Approximate Efficiency in Multiobjective Programming [J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2006, 64(1): 165-185.
[12] 岳瑞雪, 高 英. 变分不等式的解与非光滑向量优化问题拟近似解的关系 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(1).
[13] GAO Y, YANG X M. Scalarizations and Lagrange Multipliers for Approximate Solutions in the Vector Optimization Problems with Set-Valued Maps [J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2015, 11(2): 673-683.
[14] KIYANI E, SOLEIMANI-DAMANEH M. Approximate Proper Efficiency on Real Linear Vector Spaces [J]. Pacific Journal of Optimization, 2014, 10(4): 715-734.
[15] GAO Y, YANG X M. Optimality Conditions for Approximate Solutions of Vector Optimization Problems [J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2011, 7(2): 483-496.
[16] ADAN M, NOVO V. Proper Efficiency in Vector Optimization on Real Linear Spaces [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2004, 121(121): 515-540.

Scalarization for Approximate Proper Efficiency Solutions of Vector Optimization Problems on Real Linear Spaces

XIE Jing, GAO Ying

School of Mathematical Sciences of Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China

Abstract: In this paper, we introduce the approximate proper efficiency solutions of vector optimization problems and present their linear scalarizations. First, we point out the irrationality of the existing results and give a description by examples. Then, using the co-radiant set, we introduce a new kind of approximate proper efficiency solutions in real linear spaces and present linear scalarizations for these solutions.

Key words: real linear space; vector optimization; approximate proper efficiency solutions; scalarization

责任编辑 张 枸