

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.11.013

一类离散 SIS 传染病模型及 flip 分支研究^①

毛红艳^{1,2}, 蔺小林¹, 曹 慧¹, 王陈陈¹

1. 陕西科技大学 文理学院, 西安 710021; 2. 方城县第五高级中学, 河南 南阳 473200

摘要: 讨论和研究了一类 SIS 传染病模型及其 flip 分支. 在一定条件下, 探讨了该模型平衡点的存在性、稳定性以及平衡点不稳定时可能出现的 flip 分支. 经过计算和数值模拟, 模型存在一个无病平衡点和一个正平衡点. 理论证明了无病平衡点和正平衡点的稳定性, 当正平衡点不稳定时, 模型会存在 flip 分支, 通过详细地计算和推导, 得出 flip 分支是稳定的.

关 键 词: SIS 模型; 平衡点; 基本再生数; flip 分支

中图分类号: O175

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2017)11-0087-09

最近几年, 人们越来越关注离散 SIS 传染病模型^[1]的研究. 由于公共卫生部门的传染病的数据都是通过天、周、月甚至年为单位的离散数据进行采集的, 因此相比连续 SIS 传染病模型, 离散 SIS 传染病模型更准确, 也更符合实际意义. 同时, 连续传染病模型的数值模拟是通过相应的离散模型得到的, 因而离散传染病模型在传染病学的研究中起着日益重要的作用.

对于离散 SIS 传染病模型的研究主要集中在模型平衡点的存在性和稳定性^[2-4]、疾病持久性^[5]、基本再生数以及 fold 分支、flip 分支和 Neimark-Sacker 分支^[6-9]. 在大多数研究离散 SIS 传染病模型的动力学性态文献中, 多数采用双线性发生率 βSI 、非线性发生率 $\beta(I)SI$ 和标准发生率 $\frac{\beta S(t)I(t)}{N(t)}$ 等. 目前, 已经有很多学者研究了具有各种非线性发生率和时滞的传染病模型^[10]. 本文讨论一类具有指数性发生率的离散时滞 SIS 传染病模型的动力学性态.

1 离散 SIS 传染病模型介绍

考虑感染者恢复后不具有免疫力的疾病传播问题, 将总人口 $N(t)$ 分为易感者 $S(t)$ 和染病者 $I(t)$, 且满足 $N(t) = I(t) + S(t)$. 我们忽略所考虑的国家或者地区人口的迁入和迁出. 假设人口输入的唯一方法是生育, 并且为了阻断垂直传播, 假设只有易感者可以生育, 人口生育为常数 Δ .

我们用 p 表示单位时间内个体的存活概率, γI 反映单位时间内社会对于染病者的治愈能力. 其中 $0 < p < 1$ 和 $0 < \gamma < 1$. 随着疾病的发展, 产生的染病者在一定时间内会越来越多, 这就会导致一个易感者不能被感染的概率越来越小, 因此我们用 $e^{-\frac{\beta I(t)}{N(t)}}$ 来刻画单位时间内一个易感者不能被感染的概率. 也就是, $1 - e^{-\frac{\beta I(t)}{N(t)}}$ 表示单位时间内一个易感者被感染的概率. 又因为 t 时刻发生的感染一定与 $t-1$ 时刻的染病者人数有关系, 因此在本文中, 我们采用 $1 - e^{-\frac{\beta I(t-1)}{N(t-1)}}$ 来刻画一个易感者被感染的概率. 尽管文献[6]

① 收稿日期: 2016-08-07

基金项目: 国家自然科学基金项目(11301314, 11401356); 陕西省自然科学基金项目(2014JQ1025); 陕西省教育厅专项科研项目(15JK1081); 陕西科技大学学术团队项目(2013XSD39).

作者简介: 毛红艳(1989-), 女, 河南叶县人, 硕士, 主要从事生物数学理论研究.

中采用过类似的指数发生率,但是与本文中的发生率有着很大的不同.文献[6]中作者采用的是传统的双线性发生率 $\beta I(t)S(t)$,而 $e^{-kI(t-1)S(t-1)}$ 是用来刻画社会对于疾病所采取的一系列有效控制措施对于感染概率 β 的影响.由此本文建立离散 SIS 模型如下:

$$\begin{aligned} S(t+1) &= \Lambda + pe^{-\frac{\beta I(t-1)}{N(t-1)}} S(t) + p\gamma I(t) \\ I(t+1) &= p(1 - e^{-\frac{\beta I(t-1)}{N(t-1)}}) S(t) + p(1 - \gamma) I(t) \end{aligned} \quad (1)$$

将模型(1)中的两个方程相加得:

$$N(t+1) = \Lambda + pN(t) \quad (2)$$

显然方程(2)存在唯一的一个渐近稳定的正平衡点

$$N^* = \frac{\Lambda}{1-p}$$

也就是说

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = N^*$$

这说明模型(1)在 $\mathbb{R}_+^2$ 中的正向不变集是:

$$\Omega = \left\{ (S, I) \in \mathbb{R}_+^2, S + I \leq \frac{\Lambda}{1-p} \right\} \quad (3)$$

利用极限系统理论可以得到模型(1)的极限系统如下:

$$\begin{aligned} S(t+1) &= \Lambda + pe^{-\frac{\beta I(t-1)}{N^*}} S(t) + p\gamma I(t) \\ I(t+1) &= p(1 - e^{-\frac{\beta I(t-1)}{N^*}}) S(t) + p(1 - \gamma) I(t) \end{aligned} \quad (4)$$

由于模型(1)和模型(4)具有相同的动力学性态,所以下面对模型(4)作进一步研究.利用再生矩阵的方法^[11]定义模型(1)的基本再生数为:

$$R_0 = \frac{p\beta}{1-p(1-\gamma)} \quad (5)$$

基本再生数 R_0 是传染病动力学研究中最重要概念之一,它表示所有个体均为易感者时一个染病者在其平均染病期内成功感染的个体数.人们可以利用 R_0 的大小来估计传染病在整个人群中的发展趋势.一般情况下,当 $R_0 < 1$ 时,表示疾病将会在人群中最终消失;而当 $R_0 > 1$ 时,疾病将会在人群中持续下去.当 R_0 大到一定程度,表明疾病很难控制,并有重大疫情可能会爆发,可利用 R_0 的值来判断疾病在人群中是持久流行还是趋于灭绝.

将 $S(t) = N^* - I(t)$ 带入模型(4)的第二个方程中化简得:

$$I(t+1) = p(1 - e^{-\frac{\beta I(t-1)}{N^*}}) [N^* - I(t)] + p(1 - \gamma) I(t) \quad (6)$$

由于模型(6)是一个具有滞后性的限制系统,需要进一步进行简化.令 $x_1(t) = I(t)$, $y_1(t) = I(t-1)$, $N = N^*$ 得:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= p(1 - e^{-\frac{\beta y_1(t)}{N}}) [N - x_1(t)] + p(1 - \gamma) x_1(t) \\ y_1(t+1) &= x_1(t) \end{aligned} \quad (7)$$

化简(7)式得:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= pN + p(x_1(t) - N)e^{-\frac{\beta y_1(t)}{N}} - p\gamma x_1(t) \\ y_1(t+1) &= x_1(t) \end{aligned} \quad (8)$$

构造新的变量

$$x(t) = \frac{x_1(t)}{N} \quad y(t) = \frac{y_1(t)}{N}$$

设 $a = p$, $b = \beta$, $c = p\gamma$, 模型(8)可化简成:

$$x(t+1) = a + a(x(t) - 1)e^{-by(t)} - cx(t)$$

$$y(t+1) = x(t) \quad (9)$$

模型(9)比模型(1)更便于分析, 根据流行性病学的特点, 在 $0 < y(t) < 1$ 和 $0 < x(t) < 1$ 条件下, 参数 a 和 c 存在的范围为:

$$p_+ = \{(c, a) \mid 0 < c < 1, a > c\} \quad (10)$$

在下面的讨论中, 我们将重点研究模型(9). 模型(9)的稳定性和分支分析同样适用于模型(1).

2 平衡点的存在性

本节研究模型(9)平衡点的存在性, $E_0(0, 0)$ 是一个平衡点, 设 $E(x, y)$ 为模型(9)正平衡点, 当 $a > c$ 时, $R_0 > 1$, 满足以下条件:

$$(1+c)x - a(x-1)e^{-bx} = a, y = x \quad (11)$$

定义函数:

$$f(x) = (1+c)x - a(x-1)e^{-bx}, x \in [0, 1] \quad (12)$$

显然 $f(0) = a$, 对式(12)进行求导得:

$$f'(x) = 1+c + a e^{-bx} (bx - b - 1) \quad (13)$$

定义 $g_1(x) = bx - b - 1, x \in [0, 1]$, 易知函数 $g_1(x)$ 是单调递增的. 当 $x \in [0, 1]$ 时, $g_1(x) < 0$. 由于

$$f''(x) = a b e^{-bx} (2 + b - bx) \quad (14)$$

当 $x \in [0, 1]$ 时, $f''(x) > 0$, 这说明函数 $f(x)$ 是凹函数. 因为函数 $f'(x)$ 是单调递增的, 并且 $f'(0) = 1+c-a-ab < 0, f'(1) = 1+c-a e^{-b} > 0$, 故存在 $x^* \in [0, 1]$, 使得 $f'(x^*) = 0$. 根据上述一系列的计, 得到以下结论:

定理 1 模型(9)存在一个正平衡点 $E_1(x^*, x^*)$, 满足 $x^* \in [0, 1]$, 并且

a) 当 $x \in [0, x^*]$ 时, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 是减函数;

b) 当 $x \in [x^*, 1]$ 时, $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 是增函数.

由于 $f(0) = a < f(1) = 1+c$, 可以得到, 当 $x^* \in [0, 1]$ 时, 模型(9)只有一个正平衡点 $E_1(x^*, x^*)$.

3 平衡点的稳定性

若点 $E(x, x)$ 是模型(9)的平衡点, 利用 Jacobian 矩阵分析研究平衡点的稳定性. 对于动力系统 $x(t+1) = F(x(t))$, $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 如果 $F(x_0) = x_0$, 那么 x_0 是一个驻点, 系统接近驻点时的性态通常可以由其雅克比矩阵 $J(x_0)$ 的特征方程的特征值决定.

矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a \cdot e^{-bx} - c & -ab(x-1) \cdot e^{-bx} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

对应的特征方程为:

$$\lambda^2 - (a \cdot e^{-bx} - c)\lambda + ab(x-1)e^{-bx} = 0 \quad (15)$$

我们有如下的结论:

- a) 当 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$ 时, $E(x, x)$ 称为焦点, 是局部渐近稳定的;
- b) 当 $|\lambda_1| > 1$ 且 $|\lambda_2| > 1$ 时, $E(x, x)$ 称为结点, 是不稳定的;
- c) 当 $|\lambda_1| > 1$ 和 $|\lambda_2| < 1$ 或 $|\lambda_1| < 1$ 和 $|\lambda_2| > 1$, $E(x, x)$ 称为鞍点;
- d) 当 $|\lambda_1| = 1$ 且 $|\lambda_2| \neq 1$ (或 $|\lambda_1| \neq 1$ 且 $|\lambda_2| = 1$), $E(x, x)$ 称为非双曲的.

3.1 无病平衡点的稳定性

对于模型(9), 当 $0 < x(t) < 1$ 和 $0 < y(t) < 1$ 时, 得到以下结论:

定理 2 如果 $(c, a) \in p_+$, 且 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点是全局渐近稳定的.

证 当 $0 < c < a < 1$ 时, 有 $R_0 < 1$ 成立. 令 $E(x, x) = E_0(0, 0)$, 则:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a-c & ab \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

对应的特征方程为

$$\lambda^2 - (a-c)\lambda - ab = 0$$

求解后得,

$$\lambda_1 = \frac{(a-c) - \sqrt{(a-c)^2 + 4ab}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{a-c + \sqrt{(a-c)^2 + 4ab}}{2}$$

易知, $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$, 利用 Jury 判据^[12] 可知当 $R_0 < 1$ 时, $E_0(0, 0)$ 是局部渐近稳定的.

为了便于证明无病平衡点的全局稳定性, 将模型(9) 改写成:

$$x(t+1) = a + a(x(t) - 1) \cdot e^{-bx(t-1)} - cx(t) \quad (16)$$

由 $0 < x(t) < 1$ 可知

$$x(t+1) \leq a + a(x(t) - 1) - cx(t) = (a-c)x(t)$$

令

$$z(t) = x(t)$$

则函数

$$z(t+1) = (a-c)z(t)$$

可得

$$z(t) = (a-c)^t z(0)$$

因此, 方程(16) 的无病平衡点在 $0 < c < a < 1$ 的条件下是全局渐近稳定的, 从 $0 < c < a < 1$ 和 $R_0 < 1$ 的等价性可知, 当 $R_0 < 1$ 时, 模型的无病平衡点是全局渐近稳定的, 即定理 2 成立.

取 $a=0.86$, $b=1.34$, $c=0.95$, 当取初值分别为 $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=4$, $x_4=6$, $x_5=8$ 时得到数值模拟结果如图 1, 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点是全局渐近稳定的.

3.2 正平衡点的稳定性

下面我们利用

$$-ab(x-1)e^{-bx} = -b[(1+c)x - a]$$

简化模型(9) 的 Jacobian 矩阵 $\mathbf{A}$, 对于平衡点 $E(x, x)$, 则:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{a - (1+c)x}{1-x} - c & ab - b(1+c)x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

故矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征方程为

$$h(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{a - (1+c)x}{1-x} - c \right) \lambda - b[a - (1+c)x] = 0$$

讨论矩阵 $\mathbf{A}$ 特征方程的根, 引用文献[9] 中的引理如下:

引理 1^[9] 令 $F(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda + C$. 假设存在 λ_1 和 λ_2 , 使得 $F(\lambda_1) = F(\lambda_2) = 0$, 并且 $F(1) > 0$. 则有下面的结论成立:

- $F(-1) > 0$, $C < 1$, 当且仅当 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| < 1$;
- $F(-1) = 0$, $B \neq 0$, 或 $B \neq 2$, 当且仅当 $|\lambda_1| = -1$ 且 $|\lambda_2| \neq 1$;
- $F(-1) < 0$, 当且仅当 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| > 1$;

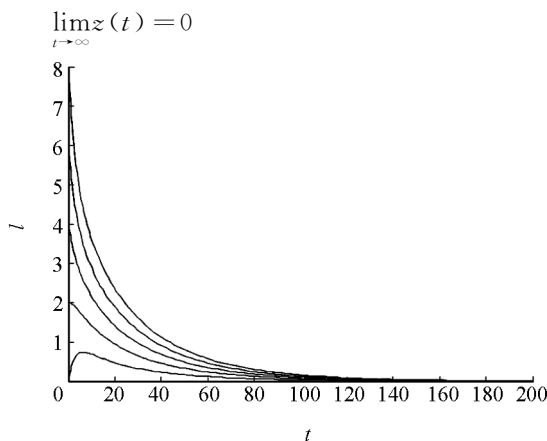


图 1 无病平衡点的稳定性

d) $F(-1) > 0, C=1$, 当且仅当 $|\lambda_1| > 1$ 且 $|\lambda_2| > 1$;

e) $B^2 - 4C < 0, C=1$, 当且仅当 $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$.

定理 3 当 $R_0 > 1$ 时, 模型(9) 的正平衡点是局部渐近稳定的.

证 令 $\lambda = 1$ 代入 $h(\lambda)$, 定义函数

$$g_2(x) = -b(1+c)x^2 + b(1+a+c)x + 1+c-a-ab$$

易得:

$$h(1) = \frac{g_2(x)}{1-x}, h(-1) = \frac{1}{1-x}(-b(1+c)x^2 + b[b(1+c+a)-2]x + 1+a-c-ab)$$

当 $x \in [0, 1]$ 时, 因为 $F(1) > 0$, 所以 $g_2(x) > 0$. 函数 $g_2(x)$ 的判别式

$$\Delta = b^2(1+a+c)^2 + \frac{4b(1+c)}{1+c-a}(1-R_0)$$

当 $\Delta > 0$ 时, 有 $1 < R_0 < M$, 其中

$$M = 1 + \frac{b(1+a+c)^2(1+c-a)}{4(1+c)}$$

由

$$g_2(0) = 1+c-a-ab < 0 \quad g_2(1) = 1+c-a > 0$$

得函数 $g_2(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 上的零点为 $x_1 = \frac{b(1+a+c) + \sqrt{\Delta}}{2b(1+c)}$, 对称轴为 $x = \frac{1+a+c}{2(1+c)}$, 为确定对称轴的位置, 讨论以下两种情况:

a) 当 $\frac{1+a+c}{2(1+c)} > 1$, 则有 $a > 1+c$, 显然不符合假定条件 $R_0 > 1$;

b) 当 $\frac{1+a+c}{2(1+c)} < 1$, 则有 $a < 1+c$, 符合假定条件 $R_0 > 1$.

当 $x \in [0, 1]$ 时, $h(-1) > 1$ 和 $C = b(1+c)x - ab < 1$ 成立. 当 $x \in [0, x^*]$ 时, $f'(x) < 0$. 当 $x \in [\min(x_1, x^*), 1]$ 时, $F(1) > 0$, 从而引理 1 a) 成立, 则模型(9) 的正平衡点是局部渐近稳定的.

取 $a = 0.72, b = 2.38, c = 0.69$, 取初值分别为 $x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 7, x_4 = 10, x_5 = 12$ 时, 得到数值模拟结果如图 2, 当 $R_0 > 1$ 时, 正平衡点是渐近稳定的.

4 Flip 分支

在离散传染病动力学模型中, 随着参数取值的变化, 可能会导致模型产生不同的分支, 模型也会表现出不同的动力学现象. 一般来讲, 当离散传染病模型的平衡点的稳定性发生变化时, 可能会产生各类不同的分支出现. 本节将讨论 flip 分支的动力学现象.

在 $R_0 > 1$ 的情况下, 本节研究模型(9) 的 flip 分支. 定理 1 表明, 模型(9) 在 $x \in [0, 1]$ 范围内只有一个正平衡点 $E_1(x^*, x^*)$. 引理 1 表明, 当正平衡点 $E_1(x^*, x^*)$ 失去稳定性时, 当其雅克比矩阵对应的

特征方程存在特征根 $\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 \neq 1$, 模型(9) 可能存在 flip 分支. 当 $b > 2, c = ae^{-\frac{1}{2}b}\left(1 - \frac{b}{2}\right) + 1$ 时, 正平衡点 $E_1(x^*, x^*)$ 的雅克比矩阵的特征根满足 $\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 \neq 1$, 其中 $E_1(x^*, x^*) = E_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. 因为方程(11), 当 $c = ae^{-\frac{1}{2}b}\left(1 - \frac{b}{2}\right) + 1$ 时, $\frac{4(a-c)}{2a+c-1} = b$. 通过计算和中心流行理论证明, 得到在

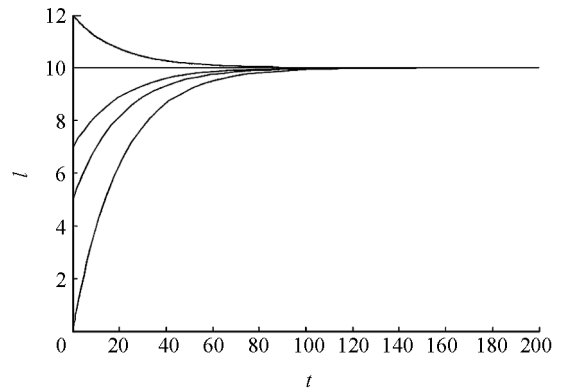


图 2 正平衡点的稳定性

$E_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 处存在 flip 分支, 且通过 matlab 数值模拟得到 flip 分支是 2 周期稳定的.

模型(9) 的平衡点 $E_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 对应的矩阵 $\mathbf{A}$ 为:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ae^{-\frac{1}{2}b} - c & \frac{1}{2}abe^{-\frac{1}{2}b} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\lambda^2 - (ae^{-\frac{1}{2}b} - c)\lambda - \frac{1}{2}abe^{-\frac{1}{2}b} = 0 \quad (17)$$

取

$$F(\lambda) = \lambda^2 - (ae^{-\frac{1}{2}b} - c)\lambda - \frac{1}{2}abe^{-\frac{1}{2}b}$$

令

$$F(-1) = 0$$

则

$$c = ae^{-\frac{1}{2}b} \left(1 - \frac{b}{2}\right) + 1$$

方程(17) 有两个根分别为 $\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 = \frac{1}{2}abe^{-\frac{1}{2}b}$, 则模型(9) 在平衡点 $E_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 可能存在 flip 分支.

定理 4 当 $c = ae^{-\frac{1}{2}b} \left(1 - \frac{b}{2}\right) + 1$, 并且 $b > 2$ 时, 模型(9) 将会在平衡点 $E_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 处产生 flip 分支, 且其 2 周期分支是稳定的.

证 设 μ 为一个变量, 对模型(9) 做变换, 令 $\tilde{x} = x - \frac{1}{2}$, $\tilde{y} = y - \frac{1}{2}$, $\tilde{\mu} = \mu - \frac{4(a-c)}{2a+c-1}$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t+1) &= p(1 - e^{-\left(\tilde{y}(t) + \frac{4(a-c)}{2a+c-1}\right)\left(\tilde{y}(t) + \frac{1}{2}\right)}) \left(\frac{1}{2} - \tilde{x}(t)\right) + (a-c) \left(\tilde{x}(t) + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \\ \tilde{\mu}(t+1) &= \tilde{\mu}(t) \\ \tilde{y}(t+1) &= \tilde{x}(t) \end{aligned} \quad (18)$$

模型(18) 在 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\mu}) = (0, 0, 0)$ 处进行泰勒展开, 得:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t+1) &= (2\epsilon - c)\tilde{x}(t) + k\epsilon\tilde{y}(t) + \frac{1}{2}\epsilon\tilde{\mu}(t) + \tilde{p}(\tilde{x}(t), \tilde{\mu}(t), \tilde{y}(t)) \\ \tilde{\mu}(t+1) &= \tilde{\mu}(t) \\ \tilde{y}(t+1) &= \tilde{x}(t) \end{aligned} \quad (19)$$

其中,

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\tilde{x}(t), \tilde{\mu}(t), \tilde{y}(t)) &= \\ &= -\frac{1}{2}k^2\epsilon\tilde{y}^2(t) - \frac{1}{8}\epsilon\tilde{\mu}^2(t) - 2k\epsilon\tilde{x}(t)\tilde{y}(t) - \epsilon\tilde{x}(t)\tilde{\mu}(t) + \\ &+ \left(1 - \frac{1}{2}k\right)\epsilon\tilde{y}(t)\tilde{\mu}(t) + \frac{1}{6}k^3\epsilon\tilde{y}^3(t) + \frac{1}{48}\epsilon\tilde{\mu}^3(t) + k^2\epsilon\tilde{x}(t)\tilde{y}^2(t) + \\ &+ \frac{1}{4}\epsilon\tilde{x}(t)\tilde{\mu}^2(t) + \left(\frac{1}{4}k^2 - k\right)\epsilon\tilde{y}^2(t)\tilde{\mu}(t) + \left(\frac{1}{8}k - \frac{1}{2}\right)\epsilon\tilde{y}(t)\tilde{\mu}^2(t) + \\ &+ (2-k)\epsilon\tilde{x}(t)\tilde{y}(t)\tilde{\mu}(t) + o(\tilde{x}^4(t), \tilde{\mu}(t), \tilde{y}^4(t)) \end{aligned}$$

令

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{k\epsilon}{2(1-k\epsilon)} & k\epsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{k\epsilon}{2(1-k\epsilon)} & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{1+k\epsilon} & \frac{k\epsilon}{2(1+k\epsilon)} & \frac{-1}{1+k\epsilon} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{1+k\epsilon} & \frac{k\epsilon}{k^2\epsilon^2-1} & \frac{1}{1+k\epsilon} \end{bmatrix}$$

对模型(19) 进行如下变换:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\mu}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u(t) \\ \mu(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

则模型(19) 为

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(t+1) \\ \tilde{\mu}(t+1) \\ \tilde{v}(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & k\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ \tilde{\mu}(t) \\ \tilde{v}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-1}{k\epsilon+1}p(\tilde{u}(t), \tilde{\mu}(t), \tilde{v}(t)) \\ 0 \\ \frac{1}{k\epsilon+1}p(\tilde{u}(t), \tilde{\mu}(t), \tilde{v}(t)) \end{pmatrix} \quad (20)$$

其中:

$$\begin{aligned} p(\tilde{u}(t), \tilde{\mu}(t), \tilde{v}(t)) = & \left[\left(2\epsilon - \frac{1}{2}k\epsilon - k^3\epsilon^2 \right) \mu + \sum_{k=2}^{\infty} p_{1k}\mu^k \right] u + \\ & \left[(-2k^2\epsilon^2(1+k\epsilon) - k\epsilon)\mu + \sum_{k=2}^{\infty} p_{2k}\mu^k \right] v + \\ & \left[2k\epsilon - \frac{1}{2}k^2\epsilon + \sum_{k=1}^{\infty} p_{3k}\mu^k \right] u^2 + \left[2k\epsilon(1-k\epsilon) - k^2\epsilon + \sum_{k=1}^{\infty} p_{4k}\mu^k \right] uv + \\ & \left[k^4\epsilon^3 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{5k}\mu^k \right] v^2 + \left[\frac{1}{6}k^3\epsilon - k^2\epsilon \right] u^3 + \left[\frac{1}{2}k^3\epsilon + k^2\epsilon(k\epsilon - 2) \right] u^2v + \\ & \left[\frac{1}{2}k^3\epsilon - k^2\epsilon \right] uv^2 + \left[\frac{1}{2}k^3\epsilon + k^3\epsilon^2 \right] v^3 + o(u^4, \mu, v^4) \\ & \frac{4(a-c)}{2a+c-1} = k, \quad \frac{1}{2}p e^{-\frac{1}{2}k} = \epsilon \end{aligned}$$

根据离散系统的中心流形理论, 知道模型(19) 存在一个局部流形. 设局部流形有以下展开形式:

$$\begin{aligned} v(t) = h(u(t), \mu(t)) = & \\ & m_1 u^2(t) + m_2 u(t)\mu(t) + m_3 \mu^2(t) + m_4 u^3(t) + m_5 u^2(t)\mu(t) + \\ & m_6 u(t)\mu^2(t) + m_7 \mu^3(t) + o(u^4, \mu^4, v^4) \end{aligned} \quad (21)$$

将模型(20) 变换成(21) 后, 利用局部流形的不变性, 可得到:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{k^2\epsilon}{2(k^2\epsilon^2-1)} \\ m_2 &= \frac{1}{(1+k\epsilon)^2} \left(2\epsilon - \frac{1}{2}k\epsilon - k^3\epsilon^2 \right) \\ m_3 &= 0 \\ m_i &= 0 \quad i=4, 5, 6 \end{aligned}$$

从模型(20)的第二个方程可知, $\mu(t)$ 的值是恒定的. 因此, 三维模型(20)引起的中心流形为:

$$u(t+1) = G(u(t), \mu)$$

其中:

$$\begin{aligned} G(u(t), \mu) = & \left(-1 - \frac{1}{1+k\epsilon} \left(2\epsilon - \frac{1}{2}k\epsilon - k^3\epsilon^2 \right) \mu + \sum_{k=2}^{\infty} n_{1k}\mu^k \right) u(t) + \\ & \left(-\frac{1}{1+k\epsilon} \left(2k\epsilon - \frac{1}{2}k^2\epsilon \right) + \sum_{k=1}^{\infty} n_{2k}\mu^k \right) + \\ & \left(-\frac{1}{1+k\epsilon} \left(m_1(-k^2\epsilon - 2k^2\epsilon^2 + 2k\epsilon) + \frac{1}{6}k^3\epsilon - k^2\epsilon \right) + \sum_{k=1}^{\infty} n_{3k}\mu^k \right) + \\ & o(u, \mu) \end{aligned} \quad (22)$$

经计算,

$$\begin{aligned} G(0, \mu) &= 0 & \frac{\partial G(0, 0)}{\partial u} &= -1 \\ \frac{\partial^2 G(0, 0)}{\partial u \partial \mu} &= -\frac{1}{1+k\epsilon} \left(2\epsilon - \frac{1}{2}k\epsilon - k^3\epsilon^2 \right) < 0 \end{aligned}$$

并且

$$\frac{\partial^3 G(0, 0)}{\partial u^3} = -\frac{1}{1+k\epsilon} \left(m_1(-k^2\epsilon - 2k^2\epsilon^2 + 2k\epsilon) + \frac{1}{6}k^3\epsilon - k^2\epsilon \right) < 0$$

以上的计算表明模型(9)在 $E_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 处有 flip 分支, 且是渐近稳定的. 给定参数 $b=5, a=0.98$, 对应的 flip 分支数值模拟见图 3.

5 结 论

本文主要以差分方程理论^[13]为基础建立了一类离散 SIS 传染病模型, 并讨论了该模型的平衡点的存在性、稳定性以及平衡点不稳定时出现的 flip 分支问题. 本文借助传染病动力学的一个重要指标——基本再生数讨论了模型平衡点的存在性, 得到所讨论模型

只存在一个正平衡点和一个无病平衡点, 利用 Jury 判据和全局渐近稳定性定义得到无病平衡点的稳定性, 再利用二次函数的性质等基础知识证明了唯一的正平衡点是渐近稳定的, 在正平衡点出现不稳定状态. 该模型存在 flip 分支, 对 flip 分支进行了详细地计算和推导, 得出 2 周期 flip 分支是稳定的. 这一结果将丰富复杂的离散流行病模型^[14]的动力学研究内容.

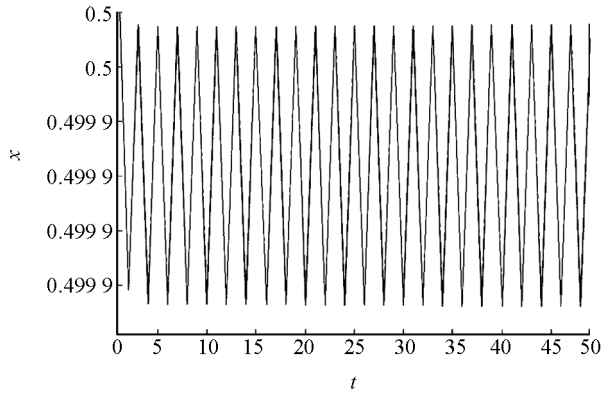


图 3 flip 分支示意图

参考文献:

- [1] CASTILLO-CHAVEZ C, YAKUBU A A. Discrete-Time SIS Models with Complex Dynamics [J]. Nonlinear Anal, 2001, 47: 4753-4762.
- [2] 李文娟. 一类离散 SIRS 传染病模型的稳定性分析 [D]. 太原: 山西大学, 2015.
- [3] HU Z, TENG Z, JIANG H. Stability Analysis in a Class of Discrete SIRS Epidemic Models [J]. Nonlinear Anal, 2012, 13: 2017-2033.
- [4] THIEME H R. Covergence Results and a Poincare-Bendixson Trichotomy for Asymptotically Autonomous Differential Equations [J]. Math Biol, 1992, 30: 755-763.
- [5] 曹 慧, 王玉萍. 具有饱和治愈率的离散 SIS 传染病模型的动力学性 [J]. 陕西科技大学学报(自然科学版), 2013, 31(5): 147-150.
- [6] CAO H, ZHOU Y C, MA Z E. Bifurcation Analysis of a Discrete SIS Model with Bilinear Incidence Depending on New

Infection [J]. Mathmatical Biosciences and Engineering, 2013, 10: 1339—1417.

[7] CHEN Q L, TENG Z D, WANG L, et al. The Existence of Codimension-Two Bifurcation in a Discrete SIS Epidemic Model with Standard Incidence [J]. Nonlinear Dyn, 2013, 71: 55—73.

[8] GRANDMONET J M. Nonlinear Difference Equations, Bifurcations and Chaos [J]. An Introduction Research in Economics, 2008, 62: 120—177.

[9] HU Z J, TENG Z D, ZHANG L. Stability and Bifurcation Analysis in a Discrete SIR Epidemic Model [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2014, 97: 80—93.

[10] 曹 慧, 周义仓. 具有饱和治疗的离散 SEIS 结核病模型的动力学性态 [J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(18): 209—221.

[11] ALLEN L J S, VAN DEN DRIESSCHE P. The Basic Reproduction Number in Ssome Discrete-Time Epidemic Models [J]. Difference Equ Appl, 2008, 14: 1127—1147.

[12] 龚德恩. 经济控制论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.

[13] BEYN W J, LORENZ J. Center Manifolds of Dynamical Systems Under Discretization [J]. Numer Funct Anal Optimiz, 1987, 9: 381—414.

[14] CELIK C, DUMAN O. Allee Effect in a Discrete-Time Predator-Prey System [J]. Chaos Soliton & Fractals, 2009, 40: 1956—1962.

An Analysis of a Discrete-Time SIS Epidemic Model and Its Flip Bifurcation

MAO Hong-yan^{1,2}, LIN Xiao-lin¹, CAO Hui¹, WANG Chen-chen¹

1. School of Art and Sciences, Shaanxi University of Science & Technology, Xi'an 710021, China;
2. Fangcheng Fifth High School, Nanyang He'nan 473200, China

Abstract: This paper discusses and studies a discrete-time SIS epidemic model and its flip bifurcation and, under given conditions, investigates the existence and stability of the model and the possible flip bifurcation of the model when the equilibrium point is unstable. Calculation and numerical simulation show that there is a disease-free equilibrium and a positive equilibrium in this model and they are stable. A detailed calculation and derivation shows that the flip bifurcation is stable.

Key words: SIS model; equilibrium point; basic reproduction number; flip bifurcation

责任编辑 张 枸

