第 39 卷第 12 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2017年12月
Vol. 39 No. 12　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Dec. 2017

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.12.008

变量核齐次分数次积分在 Morrey 空间上的估计①

陶双平，　刘钰琦

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要： 利用空间分解技术和核函数估计，在核函数满足一定的 L^s-Dini 条件下，得到了变量核齐次分数次积分 $T_{\Omega,\alpha}$ 是从 Morrey 空间 $L^{\frac{\lambda}{\alpha},\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 到 BMO($\mathbb{R}^n$) 上的有界算子，同时从 $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 到 Campanato 空间 $\mathscr{E}_{l,n\left(\frac{\alpha}{n}-\frac{\lambda}{np}\right)}(\mathbb{R}^n)$ 也是有界的.

关 键 词： 变量核；齐次分数次积分算子；Morrey 空间；Campanato 空间

中图分类号：O174.2　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673-9868(2017)12-0052-07

设函数 $\Omega(x, z)$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$，满足对任意的 $x, z \in \mathbb{R}^n$ 和 $\lambda > 0$ 有

$$\Omega(x, \lambda z) = \Omega(x, z) \tag{1}$$

对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x, z') \mathrm{d}\sigma(z') = 0 \tag{2}$$

$$\| \Omega \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\int_{S^{n-1}} | \Omega(x, z') |^r \mathrm{d}\sigma(z')\right)^{\frac{1}{r}} < \infty \tag{3}$$

其中，$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : | x | = 1\}$，$r \geqslant 1$，$\mathrm{d}\sigma$ 表示其上的 Lebesgue 测度.

设 $0 < \alpha < n$，$f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，变量核齐次分数次积分算子定义为

$$T_{\Omega,\alpha} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x, x-y)}{| x-y |^{n-\alpha}} f(y) \mathrm{d}y$$

变量核的奇异积分算子在研究具有不连续系数的椭圆方程时发挥着重要作用[1-2]，它的研究一直得到人们的广泛关注[3-9]. 当 $\Omega(x, z) = 1$ 时，文献[8] 证明了 $T_{1,\alpha}$ 是从 Morrey 空间 $L^{\frac{\lambda}{\alpha},\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 到 BMO($\mathbb{R}^n$) 上的有界算子. 当 $\Omega(x, z) = \Omega(x)$ 并满足一定的正则性条件时，$T_{\Omega,\alpha}$ 的有界性的研究结果可参见文献[10-11]. 受文献[1-11] 研究的启发，本文主要研究变量核齐次分数次积分算子 $T_{\Omega,\alpha}$ 在 Morrey 空间上的有界性质. 为此，首先回忆有关定义和记号：

设 $s \geqslant 1$，如果

$$\int_0^1 \frac{\omega_s(\delta)}{\delta} \mathrm{d}\delta < \infty \tag{4}$$

则称 $\Omega(x, z)$ 满足一类 L^s-Dini 条件，其中，

① 收稿日期：2017-02-24
基金项目：国家自然科学基金项目(11561062；11661061).
作者简介：陶双平(1964-)，男，甘肃天水人，教授，博士研究生导师，主要从事调和分析及其在色散方程中应用的研究.

$$\omega_s(\delta)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n,\ \|\rho\|\leqslant\delta}\left(\int_{S^{n-1}}|\Omega(x,\rho z')-\Omega(x,z')|^s\mathrm{d}\sigma(z')\right)^{\frac{1}{s}} \tag{5}$$

ρ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个旋转,

$$\|\rho\|=\|\rho-I\|$$

用 $Q=Q(x_0,d)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中以 x_0 为中心,边长为 d 的方体. 设

$$1\leqslant l\leqslant\infty \qquad -\frac{n}{l}\leqslant\lambda\leqslant 1$$

记

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{l,\lambda}}=\sup_Q\frac{1}{|Q|^{\frac{\lambda}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|^l\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{l}}$$

其中

$$f_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\mathrm{d}y$$

Campanato 空间 $\mathcal{L}_{l,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$\mathcal{L}_{l,\lambda}(\mathbb{R}^n)=\{f\in L^l_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n):\|f\|_{\mathcal{L}_{l,\lambda}}<\infty\}$$

对于 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $0<\lambda\leqslant n$, Morrey 空间定义为

$$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)=\{f\in L^p_{\mathrm{loc}}:\|f\|_{L^{p,\lambda}}=\left[\sup_{x\in\mathbb{R}^n,\ d>0}d^{\lambda-n}\int_Q|f(y)|^p\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{p}}<\infty\}$$

设 f 为一局部可积函数,对任意球 $B\subset\mathbb{R}^n$,记

$$f_B=\frac{1}{|B|}\int_B f(x)\mathrm{d}x$$

BMO 空间定义为

$$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)=\{f\in L^1_{\mathrm{loc}}\mathbb{R}^n:\|f\|_{\mathrm{BMO}}=\sup_B\frac{1}{|B|}\int_B|f(x)-f_B|\mathrm{d}x<\infty\}$$

本文的主要结果如下:

定理 1 设 $0<\alpha$, $\lambda<n$, 如果 Ω 满足(1)-(3)式及对某个 $s>1$ 满足 L^s-Dini 条件,那么存在一个常数 $C>0$,使得

$$\|T_{\Omega,\alpha}f\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant C\|f\|_{L^{\frac{\lambda}{\alpha},\lambda}}$$

定理 2 设 $0<\alpha<1$, $0<\lambda<n$, $\frac{\alpha}{\lambda}<p<\infty$, Ω 满足(1)-(3)式. 如果对某个 $\beta>\alpha-\frac{\lambda}{p}$, 当 $s>\frac{\lambda}{\lambda-\alpha}$ 时, Ω 的 r 阶连续模 $\omega_r(\delta)$ 满足

$$\int_0^1\frac{\omega_r(\delta)}{\delta^{1+\beta}}\mathrm{d}\delta<\infty$$

那么存在一个常数 $C>0$,使得对于 $1\leqslant l\leqslant\frac{\lambda}{\lambda-\alpha}$ 时,

$$\|T_{\Omega,\alpha}f\|_{\mathcal{L}_{l,n\left(\frac{\alpha}{n}-\frac{\lambda}{np}\right)}}\leqslant C\|f\|_{L^{p,\lambda}}$$

成立.

全文中,用 C 表示不依赖于主要参数的绝对正常数,在不同行甚至在同一行中可以不同.

2 定理的证明

为证明定理,需要下面的引理.

引理 1　设 $0<\alpha<n$，$s>1$，Ω 满足(1)－(3)式及 L^s-Dini 条件. 则存在一个常数 $0<a_0<\frac{1}{2}$，使得当 $|x|<a_0R$ 时，

$$\left(\int_{R<|y|<2R}\left|\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}-\frac{\Omega(x,y)}{|y|^{n-\alpha}}\right|^s\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s}}\leqslant CR^{n/s-n+\alpha}\left\{\frac{|x|}{R}+\int_{|x|/2R<\delta<|x|/R}\frac{\omega_s(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta\right\}$$

成立.

证　容易得到

$$\left(\int_{R<|y|<2R}\left|\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}-\frac{\Omega(x,y)}{|y|^{n-\alpha}}\right|^s\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s}}\leqslant C\left(\int_{R<|y|<2R}|\Omega(x,y)|^s\frac{|x|^s}{|y|^{(n-\alpha+1)s}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s}}+$$

$$C\left(\int_{R<|y|<2R}\left|\frac{\Omega(x,x-y)-\Omega(x,y)}{|y|^{n-\alpha}}\right|^s\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s}}=C_1+C_2$$

$$C_1\leqslant C\left(\int_R^{2R}\int_{S^{n-1}}|\Omega(x,ry')|^s r^{n-1}\frac{|x|^s}{r^{(n-\alpha+1)s}}\mathrm{d}\sigma(y')\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{s}}=$$

$$C\,R^{\frac{n}{s}-n+\alpha}\frac{|x|}{R}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^s(S^{n-1})}$$

$$C_2\leqslant C\left(\int_R^{2R}r^{-s(n-\alpha)+n-1}\left(\int_{S^{n-1}}|\Omega(r\alpha,r\alpha-ry')-\Omega(r\alpha,ry')|^s\mathrm{d}\sigma(y')\right)\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{s}}\leqslant$$

$$CR^{(-s(n-\alpha)+n)\frac{1}{s}}\left(\int_R^{2R}\left(\int_{S^{n-1}}\left|\Omega\left(\alpha,\frac{\alpha-y'}{|\alpha-y'|}\right)-\Omega(\alpha,y')\right|^s\mathrm{d}\sigma(y')\right)\frac{\mathrm{d}r}{r}\right)^{\frac{1}{s}}\leqslant$$

$$CR^{\frac{n}{s}-n+\alpha}\left(\int_{|x|/2R\leqslant\delta<|x|/R}\omega_s(\delta)\frac{\mathrm{d}\delta}{\delta}\right)$$

引理证毕.

定理 1 的证明　设 $Q(x_0,d)$ 为以 $\mathbb{R}^n$ 中的 x_0 为中心，边长为 d 的方体，并记

$$B=\{y\in\mathbb{R}^n:|y-x_0|<d\}$$

$$T_{\Omega,\alpha}f(x)=\int_B\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}f(y)\mathrm{d}y+\int_{\mathbb{R}^n\backslash B}\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}f(y)\mathrm{d}y=T_1f(x)+T_2f(x)$$

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|T_1f(x)-(T_1f)_Q|\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{|Q|}\int_B|f(y)|\int_{|x-y|<2d}\frac{|\Omega(x,x-y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\tag{6}$$

因此，

$$\int_{|x-y|<2d}\frac{|\Omega(x,x-y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}x\leqslant C|Q|^{\frac{\alpha}{n}}\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^r(S^{n-1})}\tag{7}$$

另一方面，记 $p=\frac{\lambda}{\alpha}$，相应的 $p'=\frac{\lambda}{\lambda-\alpha}$，利用 Hölder 不等式，有

$$\int_B|f(y)|\mathrm{d}y\leqslant\left(\int_B|f(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_B 1^{p'}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant|B|^{1-\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{L^{p,\lambda}}\tag{8}$$

综合(7)式和(8)式，我们得到

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|T_1f(x)-(T_1f)_Q|\mathrm{d}x\leqslant C\|f\|_{L^{p,\lambda}}\tag{9}$$

下面估计 $T_2f(x)$：

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|T_2f(x)-(T_2f)_Q|\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q \left\{\sum_{j=0}^{\infty}\int_{2^j d\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}d} |f(y)| \left|\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}-\frac{\Omega(x,z-y)}{|z-y|^{n-\alpha}}\right|\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}z\mathrm{d}x \tag{10}$$

利用 Hölder 不等式，有

$$\int_{2^j d\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}d} |f(y)| \left|\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}-\frac{\Omega(x,z-y)}{|z-y|^{n-\alpha}}\right|\mathrm{d}y\leqslant$$

$$\left(\int_{2^j d\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}d} |f(y)|^{s'}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s'}}\times$$

$$\left(\int_{2^j d\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}d} \left|\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}-\frac{\Omega(x,z-y)}{|z-y|^{n-\alpha}}\right|^s\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s}} \tag{11}$$

由于

$$\left|\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}-\frac{\Omega(x,z-y)}{|z-y|^{n-\alpha}}\right|\leqslant$$

$$\left|\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}-\frac{\Omega(x,y-x_0)}{|y-x_0|^{n-\alpha}}\right|+\left|\frac{\Omega(x,y-x_0)}{|y-x_0|^{n-\alpha}}-\frac{\Omega(x,z-y)}{|z-y|^{n-\alpha}}\right|$$

我们有

$$\left(\int_{2^j d\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}d} \left|\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}-\frac{\Omega(x,z-y)}{|z-y|^{n-\alpha}}\right|^s\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s}}\leqslant$$

$$\left(\int_{2^j d\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}d} \left|\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}-\frac{\Omega(x,y-x_0)}{|y-x_0|^{n-\alpha}}\right|^s\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s}}+$$

$$\left(\int_{2^j d\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}d} \left|\frac{\Omega(x,y-x_0)}{|y-x_0|^{n-\alpha}}-\frac{\Omega(x,z-y)}{|z-y|^{n-\alpha}}\right|^s\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s}}=E_1+E_2 \tag{12}$$

对于 E_1，记 $R=2^j d$，注意到 $x\in Q$ 时，有

$$|x-x_0|<\frac{1}{2^{j+1}}R$$

因此由引理1，有

$$E_1\leqslant C(2^j d)^{n/s-n+\alpha}\left\{\frac{1}{2^{j+1}}+\int_{|x-x_0|/2^{j+1}d<\delta<|x-x_0|/2^j d}\frac{\omega_s(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta\right\} \tag{13}$$

$$E_2\leqslant C(2^j d)^{n/s-n+\alpha}\left\{\frac{1}{2^{j+1}}+\int_{|z-x_0|/2^{j+1}d<\delta<|z-x_0|/2^j d}\frac{\omega_s(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta\right\} \tag{14}$$

由于

$$p=\frac{\lambda}{\alpha}\qquad n/s-n+\alpha<\frac{-n}{s'(p/s')'}$$

所以

$$(2^j d)^{n/s-n+\alpha}\leqslant C\,|2^{j+1}\sqrt{n}Q|^{\frac{-n}{s'(p/s')'}}$$

因此，由(12),(13),(14)式，得

$$\left(\int_{2^j d\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}d} \left|\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}-\frac{\Omega(x,z-y)}{|z-y|^{n-\alpha}}\right|^s\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s}}\leqslant$$

$$C\,|2^{j+1}\sqrt{n}Q|^{\frac{-n}{s'(p/s')'}}\left\{\frac{1}{2^j}+\int_{|x-x_0|/2^{j+1}d<\delta<|x-x_0|/2^j d}\frac{\omega_s(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta+\int_{|z-x_0|/2^{j+1}d<\delta<|z-x_0|/2^j d}\frac{\omega_s(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta\right\} \tag{15}$$

最后我们估计(11)式中的另一部分，由于

$$p'<s'\left(\frac{p}{s'}\right)'$$

$$s'\left(\frac{p}{s'}\right)' < \frac{1}{\frac{1}{p}\left(\frac{\lambda}{n}-1\right)+\frac{1}{(p/s')'s'}}$$

利用 Hölder 不等式，有

$$\left(\int_{2^j d\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}d}|f(y)|^{s'}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s'}}\leqslant$$

$$C\left(\int_{2^j d\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}d}|f(y)|^{p}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{2^j d\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}d}1^{\frac{1}{\frac{1}{p}\left(\frac{\lambda}{n}-1\right)+\frac{1}{(p/s')'s'}}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}\left(\frac{\lambda}{n}-1\right)+\frac{1}{(p/s')'s'}}\leqslant$$

$$C\,|B_1|^{\frac{1}{p}\left(\frac{\lambda}{n}-1\right)+\frac{1}{(p/s')'s'}}\,|B_1|^{\frac{1}{p}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}\left((2^{j+1}d)^{\lambda-n}\int_{|y-x_0|<2^{j+1}d}|f(y)|^{p}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$C\,|B_1|^{\frac{1}{(p/s')'s'}}\,\|f\|_{L^{p,\lambda}}$$

因此，

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|T_2f(x)-(T_2f)_Q|\,\mathrm{d}x\leqslant C\|f\|_{L^{p,\lambda}} \tag{16}$$

我们综合(9) 式和(16) 式可以得到

$$\|T_{\Omega,\alpha}f\|_{\mathrm{BMO}}=\sup_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q|T_{\Omega,\alpha}f(y)-(T_{\Omega,\alpha}f)_Q|\,\mathrm{d}y\leqslant C\|f\|_{L^{p,\lambda}}$$

定理 1 证毕.

定理 2 的证明　记 $T_1f(x)$ 与 $T_2f(x)$ 同定理 1 的证明，我们首先估计 $T_1f(x)$：

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{p}\frac{\lambda}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|T_1f(x)-(T_1f)_Q|^m\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant$$

$$\frac{2}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{p}\frac{\lambda}{n}}}\frac{1}{|Q|^{\frac{1}{m}}}\int_B|f(y)|\left(\int_{|y-x|<2d}\left(\frac{|\Omega(x,x-y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\right)^m\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}}\mathrm{d}y \tag{17}$$

因此

$$\left(\int_{|x-y|<2d}\left(\frac{|\Omega(x,x-y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\right)^m\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant C\,|Q|^{\frac{1}{m}-1+\frac{\alpha}{n}}\,\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\times L^s(S^{n-1})} \tag{18}$$

另一方面，利用 Hölder 不等式，容易得到

$$\int_B|f(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant|B|^{1-\frac{\alpha}{n}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|f\|_{L^{p,\lambda}} \tag{19}$$

综合(18) 式和(19) 式，我们得到

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{p}\frac{\lambda}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|T_1f(x)-(T_1f)_Q|^m\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant C\|f\|_{L^{p,\lambda}} \tag{20}$$

下面估计 $T_2f(x)$：

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{p}\frac{\lambda}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|T_2f(x)-(T_2f)_Q|^m\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant$$

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{p}\frac{\lambda}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\int_{2^jd\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}d}f(y)\times\left[\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}-\frac{\Omega(x,z-y)}{|z-y|^{n-\alpha}}\right]\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}z\right|^m\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}} \tag{21}$$

注意到 $s>\dfrac{\lambda}{\lambda-\alpha}$，所以有 $s'<\dfrac{\lambda}{\alpha}<p$. 记 E_1 和 E_2 同定理 1 的证明，利用 Hölder 不等式和定理 1 的证明

中关于 E_1+E_2 的估计式，我们有

$$\int_{2^j d\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}d}|f(y)|\left|\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}-\frac{\Omega(x,z-y)}{|z-y|^{n-\alpha}}\right|\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\left(\int_{2^j d\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}d}|f(y)|^{s'}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s'}}(E_1+E_2)\leqslant$$
$$(2^{j+1}d)^{\frac{1}{p}(n-\lambda)}\left[(2^{j+1}d)^{\lambda-n}\int_{|y-x_0|<2^{j+1}d}|f(y)|^p\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{p}}\times$$
$$\left(\int_{|y-x_0|<2^{j+1}d}1\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{s'(p/s')'}}(E_1+E_2)\leqslant$$
$$C|Q|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{p}}2^{jn\left(\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{p}\frac{\lambda}{n}\right)}|Q|^{\frac{1}{p}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}\|f\|_{L^{p,\lambda}}\times$$
$$\left\{\frac{1}{2^j}+\int_{|x-x_0|/2^{j+1}d<\delta<|x-x_0|/2^j d}\frac{\omega_s(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta+\int_{|z-x_0|/2^{j+1}d<\delta<|z-x_0|/2^j d}\frac{\omega_s(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta\right\}\tag{22}$$

其中，

$$B_1=\{y\in\mathbb{R}^n:|y-x_0|<2^{j+1}d\}$$
$$\frac{n}{s'(p/s')'}=n\left(1-\frac{1}{s}-\frac{1}{p}\right)=n-\frac{n}{s}-\frac{n}{p}$$

因此，

$$2^{jn\left(\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{p}\frac{\lambda}{n}\right)}\int_{|x-x_0|/2^{j+1}d<\delta<|x-x_0|/2^j d}\frac{\omega_s(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta\leqslant 2^{\left[jn\left(\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{p}\frac{\lambda}{n}\right)-j\beta\right]}\int_0^1\frac{\omega_s(\delta)}{\delta^{1+\beta}}\mathrm{d}\delta<C$$

我们综合以上几部分，得

$$\sum_{j=0}^{\infty}\int_{2^j d\leqslant|y-x_0|<2^{j+1}d}f(y)\left|\frac{\Omega(x,x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}-\frac{\Omega(x,z-y)}{|z-y|^{n-\alpha}}\right|\mathrm{d}y\leqslant$$
$$C\|f\|_{L^{p,\lambda}}|Q|^{\frac{\alpha}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}\tag{23}$$

由(21)式和(23)式得

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{p}\frac{\lambda}{n}}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|T_2f(x)-(T_2f)_Q|^m\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant C\|f\|_{L^{p,\lambda}}\tag{24}$$

最后，综合(20)式和(24)式，得

$$\|T_{\Omega,\alpha}f\|_{f_{l,n\left(\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{p}\frac{\lambda}{n}\right)}}\leqslant C\|f\|_{L^{p,\lambda}}$$

从而完成了定理2的证明.

参考文献:

[1] FAZIO G D, PALAGACHEV D K, RAGUSA M A. Global Morrey Regularity of Strong Solutions to the Dirichlet Problem for Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients [J]. J Func Anal, 1999, 166(2): 179-196.

[2] FAZIO G D, RAGUSA M A. Interior Estimates in Morrey Spaces for Strong Solutions to Nondivergence form Equations with Discontinuous Coefficients [J]. J Func Anal, 1993, 112(2): 241-256.

[3] CALDERÓN A P, ZYGMUND A. On Singular Integrals with Variable Kernels [J]. Appl Anal, 1978, 7(3): 221-238.

[4] DING Y, LIN C C, SHAO S. On Marcinkiewicz Integral with Variable Kernels [J]. Indiana Univ Math J, 2004, 53(3): 805-821.

[5] CHEN Y P, DING Y, LI R. The Boundedness for Commutator of Fractional Integral Operator with Rough Variable Kernel [J]. Potential Anal, 2013, 38(1): 119-142.

[6] 陶双平，邵旭馗. 带变量核的 Marcinkiewicz 积分在齐次 Morrey-Herz 空间上的有界性 [J]. 兰州大学学报(自然科学版)，2010，46(3)：102－107.

[7] 李　睿，陶双平. 多线性奇异积分算子在加权 Morrey-Herz 空间上的有界性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(10)：62－67.

[8] 陶双平，龚少花，温学平. 广义 Hausdorff 算子的加权 lipschitz 估计 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(6)：111－115.

[9] ADAMS D R. A Note on Riesz Potentials [J]. Duke Matn J，1975，42(4)：765－778.

[10] DING Y，LU S. Boundedness of Homogeneous Fractional Integrals on L^p for $n/\alpha \leqslant p \leqslant \infty$ [J]. Nagoya Mathematical Journal，2002，167(2002)：17－33.

[11] MENG S Y，CHEN Y P. Boundedness of Homogeneous Fractional Integral Operator on Morrey Space [J]. J. Inequal. Appl，2016，2016(1)：1－11.

Estimate of Homogeneous Fractional Integral Operator with a Variable Kernel on the Morrey Spaces

TAO Shuang-ping，　LIU Yu-qi

College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China

Abstract：Using partial decomposition technique and kernel function estimation，under some L^s-Dini conditions of the kernel functions，we obtain that the homogeneous fractional integral operator with the variable kernel $T_{\Omega,\alpha}$ is bounded from the Morrey spaces $L^{\frac{\lambda}{\alpha},\lambda}(\mathbb{R}^n)$ to BMO $(\mathbb{R}^n)$，and also from $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ to a class of the Campanato spaces $\mathcal{L}_{l,n\left(\frac{\alpha}{n}-\frac{\lambda}{np}\right)}(\mathbb{R}^n)$.

Key words：variable kernel；homogeneous fractional integral operator；Morrey space；Campanato space

责任编辑　崔玉洁