DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.12.009

$\mathbb{R}^3$ 上的分数阶 Schrödinger-Maxwell 方程非平凡解的存在性[①]

程　伟，　徐家发

重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331

摘要： 研究一类分数阶 Schrödinger-Maxwell 方程. 在非线性项次临界增长的条件下，考虑参数和扰动项的影响，借助山路定理获得该问题非平凡解的存在性，推广和完善了已有的一些结果.

关　键　词： 分数阶 Schrödinger-Maxwell 方程；非平凡解；山路定理

中图分类号：O176.3　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673－9868(2017)12－0059－08

本文研究以下分数阶 Schrödinger-Maxwell 方程非平凡解的存在性：

$$(-\Delta)^{\alpha}u+\lambda V(x)u+\phi u=f(x,u)+\mu\xi(x)|u|^{q-2}u \qquad x\in\mathbb{R}^3 \tag{1}$$

$$(-\Delta)^{\alpha}\phi=K_{\alpha}u^2 \qquad x\in\mathbb{R}^3 \tag{2}$$

其中，$\alpha\in(0,1]$，$K_{\alpha}=\dfrac{\pi^{-\alpha}\Gamma(\alpha)}{\pi^{-\frac{3-2\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{3-2\alpha}{2}\right)}$，$\lambda>0$，$\mu>0$，$1<q<2$，$V,\xi:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$，$f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$，$V$，$\xi$，$f$ 满足以下条件：

(ⅰ) V 是 $\mathbb{R}^3$ 上的连续函数，存在 $a_1>0$ 使得

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^3}V(x)\geqslant a_1$$

并且

$$\lim_{|x|\to+\infty}V(x)=+\infty$$

(ⅱ) f 是 $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ 上的连续函数，存在 $d_1,d_2>0$，$p\in(4,2_{\alpha}^{*})$，使得

$$|f(x,u)|\leqslant d_1|u|+d_2|u|^{p-1} \qquad x\in\mathbb{R}^3,\ u\in\mathbb{R} \tag{3}$$

其中

$$2_{\alpha}^{*}=\frac{6}{3-2\alpha} \qquad \alpha>\frac{3}{4}$$

(ⅲ) $f(x,u)=o(|u|)$，$u\longrightarrow 0$ 对 $x\in\mathbb{R}^3$ 一致成立，

(ⅳ) 存在 $\theta>4$ 使得 $0<\theta F(x,u)\leqslant uf(x,u)$，其中，$x\in\mathbb{R}^3$，$u\neq 0$，

$$F(x,u)=\int_0^u f(x,s)\mathrm{d}s$$

---

① 收稿日期：2017－03－01
基金项目：国家自然科学基金(11601048)；重庆市科委项目(cstc2016jcyjA0181)；重庆市教委项目(KJ1703050)；重庆师范大学项目(16XYY24，15XLB011).
作者简介：程　伟(1985－)，男，重庆万州人，讲师，主要从事拓扑动力系统和微分方程的研究.

(Ⅴ) $\xi \in L^{\frac{2}{2-q}}(\mathbb{R}^3)$.

近年来，分数阶方程的研究引起了极大的关注，其在社会生活中的应用层出不穷[1]. 例如，Anastasio认为前庭视觉反射效应是分数阶的，运动神经控制是整数阶的，模型为

$$\tau_1 Dr(t) + r(t) = \tau_1 \tau_2 D^{\nu+1} v(t) + \tau_1 D^{\nu} v(t)$$

其中 D^p 是分数阶导数.

众所周知，Schrödinger方程是物理学中非相对性量子力学的基本方程，文献[2]基于Lévy飞行的路径，利用路径积分的方法，得到用Riesz算子表示的空间分数阶Schrödinger方程：

$$(-\Delta)^{\alpha} u + V(x) u = f(x, u) \qquad x \in \mathbb{R}^N \tag{4}$$

在非线性项 f 的各种条件下，文献[3-16]获得了方程(4)弱解的存在性，且利用山路定理获得了方程(4)基态解的存在性，其中 $f(x, u)$ 在无穷远处关于 u 渐进线性增长，即

$$\limsup_{t \to 0^+} \frac{f(x, t)}{t} < \mu^* < \liminf_{t \to +\infty} \frac{f(x, t)}{t} \leqslant \limsup_{t \to +\infty} \frac{f(x, t)}{t} < +\infty$$

对 $x \in \mathbb{R}^N$ 一致成立.

文献[4]利用山路定理，在非线性项 f 满足次临界增长和Ambrosetti-Rabinowitz条件下，获得了方程(4)非平凡弱解的存在性.

文献[5]利用山路定理和Ekeland变分原理，获得了带有扰动项的分数阶Schrödinger方程(4)解的存在性，其中的扰动项是

$$\lambda h(x) |u|^{p-2} u \qquad 1 \leqslant p < 2$$

以下介绍本文所使用的工作环境，并相应给出方程(1)中函数 ϕ 的相关信息.

令 $r \in [1, +\infty)$，赋予Lebesgue空间 $L^r(\mathbb{R}^3)$ 上的范数为

$$\| u \|_r = \left(\int_{\mathbb{R}^3} | u(x) |^r \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{r}}$$

令 $\alpha \in (0, 1]$，定义分数阶Sobolev空间为

$$H^{\alpha}(\mathbb{R}^3) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^3) : \int_{\mathbb{R}^3} (|\xi|^{2\alpha} \hat{u}^2 + \hat{u}^2) \mathrm{d}\xi < +\infty \right\}$$

其中 $\hat{u} = \mathscr{F}(u)$，并在其上赋予范数

$$\| u \|_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^3)} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} (|\xi|^{2\alpha} \hat{u}^2 + \hat{u}^2) \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

令 $D^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ 为 $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ 的完备化空间，并赋予范数

$$\| u \|_{D^{\alpha}(\mathbb{R}^3)} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2\alpha} \hat{u}^2 \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

根据Plancherel定理知

$$\| u \|_2 = \| \hat{u} \|_2$$

从而

$$\int_{\mathbb{R}^3} | (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x) |^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \overbrace{((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(\xi))^2} \mathrm{d}\xi =$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} (|\xi|^{\alpha} \hat{u}(\xi))^2 \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2\alpha} \hat{u}^2 \mathrm{d}\xi$$

因此，有

$$\| u \|_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^3)} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} (| (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x) |^2 + | u(x) |^2) \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

鉴于此，定义本文使用的工作空间

$$E=\left\{u\in H^{\alpha}(\mathbb{R}^3):\int_{\mathbb{R}^3}(|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)|^2+\lambda V(x)u^2)\mathrm{d}x<+\infty\right\}$$

且 E 是 Hilbert 空间[4]，其上的内积为

$$(u,v)_E=\int_{\mathbb{R}^3}((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v(x)+\lambda V(x)uv)\mathrm{d}x$$

由内积诱导的范数为

$$\|u\|_E=\sqrt{(u,u)_E}=\left(\int_{\mathbb{R}^3}(|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)|^2+\lambda V(x)u^2)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

根据 (i) 和 $\lambda>0$ 易知 $\|u\|_E$ 和 $\|u\|_{H^{\alpha}}$ 等价. 以下简记 $(u,v)_E$ 和 $\|u\|_E$ 为 (u,v) 和 $\|u\|$.

引理 1[3,6,8]　当 $p\in[2,2_{\alpha}^{*}]$ 时，$H^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ 连续嵌入到空间 $L^p(\mathbb{R}^3)$；当 $p\in[2,2_{\alpha}^{*})$ 时，$H^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ 紧嵌入到空间 $L^p(\mathbb{R}^3)$. 因此存在正常数 c_p 使得

$$\|u\|_p\leqslant c_p\|u\|_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^3)}\tag{5}$$

其中

$$2_{\alpha}^{*}=\frac{6}{3-2\alpha}$$

引理 2[13]　对每一个 $u\in H^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$，存在唯一的 $\phi=\phi(u)\in D^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ 解方程(2)，且 $\phi(u)$ 定义为

$$\phi(u)(x)=\int_{\mathbb{R}^3}|x-y|^{2\alpha-3}u^2(y)\mathrm{d}y$$

从而映射 $\Phi:u\in H^{\alpha}(\mathbb{R}^3)\longmapsto\phi(u)\in D^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ 是 C^1 类的，并且

$$(\Phi(u))'(v)(x)=2\int_{\mathbb{R}^3}|x-y|^{2\alpha-3}u(y)v(y)\mathrm{d}y\qquad u,v\in H^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$$

以下给出方程(1),(2) 对应的能量泛函. 定义 $J:H^{\alpha}(\mathbb{R}^3)\times D^{\alpha}(\mathbb{R}^3)\longrightarrow\mathbb{R}$ 如下：

$$\begin{aligned}J(u,\phi)=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)|^2+\lambda V(x)u^2)\mathrm{d}x-\\&\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\phi(u)|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}K_{\alpha}u^2\phi(u)\mathrm{d}x-\\&\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x-\frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^3}\xi(x)|u(x)|^q\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中

$$F(x,u)=\int_0^u f(x,s)\mathrm{d}s$$

在方程(2) 两端乘以 $\phi=\phi(u)$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\phi(u)|^2\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}K_{\alpha}u^2\phi(u)\mathrm{d}x$$

综上可知

$$\begin{aligned}J(u)=J(u,\phi)=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)|^2+\lambda V(x)u^2)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}K_{\alpha}\int_{\mathbb{R}^3}u^2\phi(u)\mathrm{d}x-\\&\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x-\frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^3}\xi(x)|u(x)|^q\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{6}$$

并根据文献[13] 中的引理 2.7 可得，能量泛函 J 的导数为

$$\begin{aligned}\langle J'(u),v\rangle=&\int_{\mathbb{R}^3}((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v(x)+\lambda V(x)uv)\mathrm{d}x+K_{\alpha}\int_{\mathbb{R}^3}uv\phi(u)\mathrm{d}x-\\&\int_{\mathbb{R}^3}f(x,u)v\mathrm{d}x-\mu\int_{\mathbb{R}^3}\xi(x)|u(x)|^{q-2}u(x)v(x)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{7}$$

定义 1 如果(u, ϕ)是泛函 J 在 $H^{\alpha}(\mathbb{R}^3)\times D^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ 中的临界点，则称(u, ϕ)是方程(1),(2)的弱解.

定义 2 令 E 是实 Banach 空间，$J \in C^1(E, \mathbb{R})$. 若$\{J(u_n)\}$有界且 $J'(u_n) \longrightarrow 0$，$n \to \infty$ 蕴含$\{u_n\}$有收敛子列，则称 J 满足(PS)条件.

引理 3[17] 令 E 是实 Banach 空间，$J \in C^1(E, \mathbb{R})$ 满足(PS)条件以及

1) $J(0)=0$ 且存在 $\beta>0$，$\rho>0$，使得

$$J(u) \geqslant \beta \qquad \forall u \in E, \ \|u\|=\rho$$

2) 存在 $e \in E$，$\|e\|>\rho$，使得

$$J(e) \leqslant 0$$

令

$$c=\inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0, 1])} J(u)$$

其中

$$\Gamma=\{g \in C([0, 1], E): g(0)=0, g(1)=e\}$$

则 c 是泛函 J 的一个临界值.

以下是本文的主要结论:

定理 1 若(i)-(v)成立，则对于每一个 $\lambda>0$，存在 $\mu_0>0$，使得当 $\mu \in (0, \mu_0)$ 时，方程(1),(2)至少有一个非平凡解.

1 主要结论

引理 4 在定理 1 的条件下，E 中的任何(PS)序列均有界，且有收敛子列.

证 设$\{u_n\}$是 E 中的(PS)序列，即存在 $c>0$ 使得

$$J(u_n) \longrightarrow c, \ J'(u_n) \longrightarrow 0, \ n \to \infty \tag{8}$$

对于足够大的 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned} c+1 \geqslant & J(u_n)-\frac{1}{\theta}\langle J'(u_n), u_n\rangle= \\ & \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\theta}\right) K_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 \phi(u_n) \mathrm{d} x+ \\ & \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{\theta} f(x, u_n) u_n-F(x, u_n)\right) \mathrm{d} x-\mu\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^3} \xi(x)|u_n(x)|^q \mathrm{d} x \geqslant \\ & \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^2-\mu\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^3} \xi(x)|u_n(x)|^q \mathrm{d} x \end{aligned} \tag{9}$$

根据 Hölder 不等式和(5)式，我们可知

$$\begin{aligned} & \mu\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^3} \xi(x)|u_n(x)|^q \mathrm{d} x \leqslant \\ & \mu\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\xi(x)|^{\frac{2}{2-q}} \mathrm{d} x\right)^{\frac{2-q}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u_n(x)|^2 \mathrm{d} x\right)^{\frac{q}{2}}= \\ & \mu\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)\|\xi\|_{\frac{2}{2-q}}\|u_n\|_2^q \leqslant \mu c_2^q\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)\|\xi\|_{\frac{2}{2-q}}\|u_n\|^q \end{aligned} \tag{10}$$

综合(9),(10)两式可得

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^2 \leqslant c+1+\mu c_2^q\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)\|\xi\|_{\frac{2}{2-q}}\|u_n\|^q \tag{11}$$

注意到 $q \in (1, 2)$，(11)式表明$\{u_n\}$在 E 中有界.

从而存在 $u_0 \in E$，使得$\{u_n\}$在子列意义下(不失一般性仍记为$\{u_n\}$)于 E 中弱收敛到 u_0，根据紧嵌入

可知，在 $L^s(\mathbb{R}^3)(2 \leqslant s < 2_\alpha^*)$ 中 $\{u_n\}$ 强收敛到 u_0，在 $\mathbb{R}^3$ 中 $\{u_n\}$ 几乎处处收敛到 u_0. 因此

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \| u_n \|_s < \infty, \ \| u_0 \|_s < \infty$$

根据文献[17] 中的引理 A.1，在子列意义下，存在 $\omega(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$，使得

$$| u_n(x) |, | u_0(x) | \leqslant \omega(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3, n \in \mathbb{N} \tag{12}$$

为了证明 $\{u_n\}$ 在 E 中强收敛到 u_0，需要满足：存在常数 C_ϕ，使得

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi^2 u^2 \mathrm{d}x \leqslant C_\phi \| u \|^6 \tag{13}$$

事实上，根据文献[13] 中的(2.4) 和(2.12) 式，有

$$\int_{\mathbb{R}^3} u^2 \phi^2 \mathrm{d}x \leqslant B^2 \| u \|_{2p}^2 \| \phi \|_{D^\alpha}^2, \ \| \phi(u) \|_{D^\alpha} \leqslant C \| u \|_{2p}^2 \leqslant C \| u \|_E^2 \tag{14}$$

其中 B 和 C 均为正常数. 由(14) 式且知(13) 式显然成立.

根据(12) 式，可得

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^3} (\phi(u_n)u_n - \phi(u_0)u_0)(u_n - u_0)\mathrm{d}x \right| \leqslant \\
&\left(\int_{\mathbb{R}^3} | \phi(u_n)u_n - \phi(u_0)u_0 |^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \| u_n - u_0 \|_2 \leqslant \\
&\left(\int_{\mathbb{R}^3} 2(| \phi(u_n)u_n |^2 + | \phi(u_0)u_0 |^2)\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \| u_n - u_0 \|_2 \leqslant \\
&\sqrt{2C_\phi}(\| u_n \|^6 + \| u_0 \|^6)^{\frac{1}{2}} \| u_n - u_0 \|_2 \to 0, n \to \infty
\end{aligned}$$

根据 Hölder 不等式和(12) 式，可以推出

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^3} \xi(x)(| u_n |^{q-2}u_n - | u_0 |^{q-2}u_0)(u_n - u_0)\mathrm{d}x \right| \leqslant \\
&\int_{\mathbb{R}^3} | \xi(x) | \, | | u_n |^{q-2}u_n - | u_0 |^{q-2}u_0 | \, | u_n - u_0 | \mathrm{d}x \leqslant \\
&\int_{\mathbb{R}^3} | \xi(x) | (| u_n |^{q-1} + | u_0 |^{q-1}) | u_n - u_0 | \mathrm{d}x \leqslant \\
&2\int_{\mathbb{R}^3} | \xi(x) | | u_n - u_0 | | \omega(x) |^{q-1} \mathrm{d}x \leqslant \\
&2\left(\int_{\mathbb{R}^3} | \xi(x) |^{\frac{2}{3-q}} | u_n - u_0 |^{\frac{2}{3-q}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{3-q}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} | \omega(x) |^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{q-1}{2}} \leqslant \\
&2\left(\left[\int_{\mathbb{R}^3} | \xi(x) |^{\frac{2}{2-q}} \mathrm{d}x \right]^{\frac{2-q}{3-q}} \left[\int_{\mathbb{R}^3} | u_n - u_0 |^2 \mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{3-q}} \right)^{\frac{3-q}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} | \omega(x) |^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{q-1}{2}} = \\
&2 \| \xi \|_{\frac{2}{2-q}} \| \omega \|_2^{q-1} \| u_n - u_0 \|_2 \to 0, n \to \infty
\end{aligned}$$

根据 (ii) 可知

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^3} (f(x, u_n) - f(x, u_0))(u_n - u_0)\mathrm{d}x \right| \leqslant \\
&\int_{\mathbb{R}^3} (d_1(| u_n | + | u_0 |) + d_2(| u_n |^{p-1} + | u_0 |^{p-1})) | u_n - u_0 | \mathrm{d}x \leqslant \\
&d_1(\| u_n \|_2 + \| u_0 \|_2) \| u_n - u_0 \|_2 + d_2(\| u_n \|_p^{p-1} + \| u_0 \|_p^{p-1}) \| u_n - u_0 \|_p \to 0, n \to \infty
\end{aligned}$$

注意到 $J \in C^1$，从而有

$$\langle J'(u_n) - J'(u_0), u_n - u_0 \rangle = 0$$

综上所述，可知

$$\|u_n-u_0\|^2=\langle J'(u_n)-J'(u_0),\ u_n-u_0\rangle-K_\alpha\int_{\mathbb{R}^3}(\phi(u_n)u_n-\phi(u_0)u_0)(u_n-u_0)\mathrm{d}x+$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}(f(x,u_n)-f(x,u_0))(u_n-u_0)\mathrm{d}x+$$

$$\mu\int_{\mathbb{R}^3}\xi(x)(|u_n|^{q-2}u_n-|u_0|^{q-2}u_0)(u_n-u_0)\mathrm{d}x\to 0,\ n\to\infty$$

因此在 E 中，$u_n\longrightarrow u_0$.

定理 1 的证明　由引理 4，仅需验证引理 3 中的 1)，2) 成立即可. 根据(ii)，(iii)，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $C_\varepsilon>0$ 使得

$$|F(x,u)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}|u|^2+\frac{C_\varepsilon}{p}|u|^p\qquad\forall x\in\mathbb{R}^3,\ u\in\mathbb{R}\tag{15}$$

结合(5) 式，有

$$\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{\varepsilon}{2}|u|^2+\frac{C_\varepsilon}{p}|u|^p\right)\mathrm{d}x=$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\|u\|_2^2+\frac{C_\varepsilon}{p}\|u\|_p^p\leqslant\frac{\varepsilon c_2^2}{2}\|u\|^2+\frac{C_\varepsilon c_p^p}{p}\|u\|^p$$

从而

$$J(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{4}K_\alpha\int_{\mathbb{R}^3}u^2\phi(u)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}F(x,u)\mathrm{d}x-\frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^3}\xi(x)|u(x)|^q\mathrm{d}x\geqslant$$

$$\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{\varepsilon c_2^2}{2}\|u\|^2-\frac{C_\varepsilon c_p^p}{p}\|u\|^p-\frac{\mu c_2^q}{q}\|\xi\|_{\frac{2}{2-q}}\|u\|^q=$$

$$\|u\|^q\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon c_2^2}{2}\right)\|u\|^{2-q}-\frac{C_\varepsilon c_p^p}{p}\|u\|^{p-q}-\frac{\mu c_2^q}{q}\|\xi\|_{\frac{2}{2-q}}\right]$$

可取

$$\varepsilon=\frac{1}{2c_2^2}$$

令

$$g(t)=\frac{1}{4}t^{2-q}-\frac{C_\varepsilon c_p^p}{p}t^{p-q},\ t\geqslant 0$$

注意到 $q<2<p$，从而一定存在 $\rho>0$，使得 g 在 ρ 点达到最大值，且 $g(\rho)>0$. 从而可选取足够小的 $\mu_0>0$，使得当 $\mu\in(0,\mu_0)$ 时，

$$g(\rho)-\frac{\mu c_2^q}{q}\|\xi\|_{\frac{2}{2-q}}>0$$

引理 3 的 1) 得证.

根据 (iv)，注意到(15) 式，存在 $C_\theta>0$ 使得

$$F(x,u)\geqslant C_\theta(|u|^\theta-|u|^2),\ \forall(x,u)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$$

另外根据文献[13] 中的(2.13) 式，存在 $d_\phi>0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^3}u^2\phi(u)\mathrm{d}x\leqslant d_\phi\|u\|^4$$

给定 $u\in E$，$t>0$，有

$$J(tu)=\frac{1}{2}\|tu\|^2+\frac{1}{4}K_\alpha\int_{\mathbb{R}^3}(tu)^2\phi(tu)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}F(x,tu)\mathrm{d}x-\frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^3}\xi(x)|tu(x)|^q\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{t^2}{2}\|u\|^2+\frac{t^4}{4}K_\alpha d_\phi\|u\|^4-C_\theta t^\theta\int_{\mathbb{R}^3}|u(x)|^\theta\mathrm{d}x+$$

$$C_\theta t^2\int_{\mathbb{R}^3}|u(x)|^2\mathrm{d}x-\frac{\mu}{q}t^q\int_{\mathbb{R}^3}\xi(x)|u(x)|^q\mathrm{d}x$$

因为

$$q<2<4<\theta$$

所以令

$$t\to+\infty$$

则有

$$J(tu)\longrightarrow-\infty$$

这表明引理 3 的 2) 成立. 根据引理 3，泛函 J 有一个正的临界值，即存在 $u_0\in E$，使得

$$J(u_0)>0$$

注意到

$$J(0)=0$$

从而 u_0 是 J 的非平凡临界点，也就是方程(1),(2) 至少有一个非平凡解.

注　本文在经典的 Ambrosetti-Rabinowitz 条件下研究了分数阶 Schrödinger-Maxwell 方程非平凡解的存在性，创新之处在于考虑了参数和扰动项 $\mu\xi(x)|u|^{q-2}u$ 对解存在性的影响(类似的扰动项可参见文献[5，10])，这优于文献[7，12] 中带有简单扰动项 $g(x)$ 的问题.

参考文献：

[1] 郑祖庥. 分数微分方程的发展和应用 [J]. 徐州师范大学学报(自然科学版)，2008，26 (2)：1－10.

[2] LASKIN N. Fractional Quantum Mechanics and Lévy Path Integrals [J]. Phys Lett A，2000，268 (4－6)：298－305.

[3] CHANG X J. Ground State Solutions of Asymptotically Linear Fractional Schrödinger Equations [J]. J Math Phys，2013，54(6)：349－381.

[4] SECCHI S. Ground State Solutions for Nonlinear Fractional Schrödinger Equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. J Math Phys，2013，54(3)：031501.

[5] YANG L. Multiplicity of Solutions for Fractional Schrödinger Equations with Perturbation [J]. Boundary Value Problems，2015，2015(1)：1－9.

[6] FELMER P，QUAAS A，TAN J G. Positive Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation with the Fractional Laplacian [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh，2012，142(6)：1237－1262.

[7] PUCCI P，XIANG M Q，ZHANG B L. Multiple Solutions for Nonhomogeneous Schrödinger-Kirchhoff Type Equations Involving the Fractional p-Laplacian in $\mathbb{R}^N$ [J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations，2015，54(3)：2785－2806.

[8] SHEN Z F，GAO F S. On the Existence of Solutions for the Critical Fractional Laplacian Equation in $\mathbb{R}^N$ [J]. Abstract and Applied Analysis，2014，2014(4)：1－10.

[9] XU J F，WEI Z L，DONG W. Existence of Weak Solutions for a Fractional Schrödinger Equation [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat，2015，22(1－3)：1215－1222.

[10] XU J F，WEI Z L，DONG W. Weak Solutions for a Fractional p-Laplacian Equation with Sign-Changing Potential [J]. Complex Variables and Elliptic Equations，2016，61(2)：284－296.

[11] XU J F，O'REGAN D，DONG W. Existence of Weak Solutions for a Fractional p-Laplacian Equation in $\mathbb{R}^N$ [J]. RACSAM，2016，111(2)：1－15.

[12] XU J F，DONG W，O'REGAN D. Nontrivial Solutions for a Fractional Schrödinger Equation Via Critical Point Theory [J]. Communications in Applied Analysis，2016，20 (2016)：253－262.

[13] WEI Z L. Existence of Infinitely Many Solutions for the Fractional Schrödinger-Maxwell Equations [J]. Mathematics, 2015.

[14] CHENG B T, TANG X H. New Existence of Solutions for the Fractional p-Laplacian Equations with Sign-Changing Potential and Nonlinearity [J]. Mediterr J Math, 2016, 13(5): 3373-3387.

[15] CHEN C S. Infinitely Many Solutions for Fractional Schrodinger Equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. Electron J Diff Equ, 2016, 88(2016): 1-15.

[16] SHANG X D, ZHANG J H. Ground States for Fractional Schrodinger Equations with Critical Growth [J]. Nonlinearity, 2014, 27(2): 187-207.

[17] WILLEM M. Minimax Theorems [M]. Boston: Birkhäser, 1996.

Existence of Nontrivial Solutions for a Fractional Schrodinger-Maxwell Equation in $\mathbb{R}^3$

CHENG Wei, XU Jia-fa

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China

Abstract: In this paper, we investigate a class of fractional Schrodinger-Maxwell equations. Under the condition of subcritical growth of the nonlinear term, we consider the effect of the parameters and the perturbation term on the existence of the solutions. Using the mountain pass theorem, we obtain the existence of the nontrivial solutions for the problem. The above results extend and improve the existing study.

Key words: fractional Schrodinger-Maxwell equation; nontrivial solution; mountain pass theorem

责任编辑 潘春燕