DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.12.010

满足某些恒等式的半环上的格林关系①

王爱法[1,2]

1. 西北大学 数学学院，西安 710127；2. 重庆理工大学 理学院，重庆 400054

摘要：研究了乘法导出半群是完全正则半群，加法导出半群是幂等元半群的半环上的格林关系，分别给出了 $\dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{D}}$, $\dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{L}}$, $\dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{R}}$ 和 $\overset{+}{\mathscr{L}} \vee \dot{\mathscr{D}}$ 是同余关系的充分必要条件，证明了由上述同余关系所决定的半环类都是簇，并给出了上述簇的 Mal'cev 积分解.

关　键　词：簇；半环；格林关系；同余

中图分类号：**O153.3**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1673-9868(2017)12-0067-07

设 $(S, +, \cdot)$ 是 $(2, 2)$-型代数，其中“+”和“•”是 S 上的二元运算. 若 S 满足：

(ⅰ) $(S, +)$ 和 $(S, \cdot)$ 都是半群；

(ⅱ) $(S, +, \cdot)$ 满足等式 $x(y+z) \approx xy + xz$ 和 $(x+y)z \approx xz + yz$，

则称 $(S, +, \cdot)$ 是半环. 因此，半环可以看作是满足分配律的同一集合上的两个半群. 半群的格林关系在其理论的发展中有着非常重要的作用，而半环的乘法导出半群和加法导出半群都有各自的格林关系，因此，对半环的乘法导出半群、加法导出半群以及整个半环上的格林关系的研究是很有意义的. 文献[1-3]对幂等元半环上的格林关系进行了的研究，并借助幂等元半环的格林关系研究了这类半环簇的 $\mathscr{L}$-子簇和 $\mathscr{D}$-子簇，得到了许多重要的结论.

设 S 是满足下列附加恒等式的半环：

$$x^n \approx x \tag{1}$$

$$x + x \approx x \tag{2}$$

$$(x+y)^{n-1} \approx x^{n-1} + y^{n-1} \tag{3}$$

则对任意的 $a \in S$，都有

$$aa^{n-2}a = a$$

且

$$aa^{n-2} = a^{n-1} = a^{n-2}a$$

因此，半环 S 的乘法导出半群 $(S, \cdot)$ 是完全正则半群. 显然，满足(1)，(2)，(3)这三个附加恒等式的所有半环作成一个簇，记为 $\mathbf{V}$. 用符号 $\overset{+}{\mathscr{L}}$, $\overset{+}{\mathscr{R}}$ 和 $\overset{+}{\mathscr{D}}$ 分别表示半环 S 的加法导出半群 $(S, +)$ 上的格林 $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{D}$ 关系，用符号 $\dot{\mathscr{L}}$, $\dot{\mathscr{R}}$ 和 $\dot{\mathscr{D}}$ 分别表示半环 S 的乘法导出半群 $(S, \cdot)$ 上的格林 $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{D}$ 关系.

设 $S \in \mathbf{V}$. 由文献[4]可知，S 的加法导出半群 $(S, +)$ 和乘法导出半群 $(S, \cdot)$ 上的 $\overset{+}{\mathscr{L}}$ 和 $\dot{\mathscr{L}}$ 分别定义为：

---

① 收稿日期：2017-02-27
基金项目：国家自然科学基金项目(11571278；11701449)；重庆市教委科学技术研究项目(KJ1600930).
作者简介：王爱法(1980-)，男，山东泰安人，讲师，博士研究生，主要从事半群代数理论的研究.

$$a\overset{+}{\mathscr{L}}b \Leftrightarrow a+b=a \qquad b+a=b \qquad \forall a,b\in S$$

$$a\dot{\mathscr{L}}b \Leftrightarrow a=ab^{n-1} \qquad b=ba^{n-1} \qquad \forall a,b\in S$$

由文献[4]可知，完全正则半群的每个 H-类都是群，H_a 表示 a 所在的 H-类，a^0 表示群 H_a 的单位元. 并且每一个完全正则半群 S 都是完全单半群的半格 $S=(Y,S_\alpha)$，这里 Y 与 $S/\mathscr{J}$ 同构，S_α 是 S 的 $\mathscr{J}$-类. 且有

引理1　设 $S=(Y,S_\alpha)$ 是完全正则半群，$a\in S_\alpha$，$b\in S_\beta$，其中 $\alpha\leqslant\beta$，则有：

(i) $a^0=(aba)^0$；

(ii) $a\mathscr{L}ba$，$a\mathscr{R}ab$；

(iii) $a=a(ba)^0=(ab)^0a$.

引理2　设 $S=(Y,S_\alpha)$ 是完全正则半群，则 $\mathscr{D}=\mathscr{J}$ 是 S 上的同余关系.

因此，对任意的 $S\in\mathbf{V}$，$\dot{\mathscr{D}}$ 是$(S,\cdot)$上的同余关系，$\overset{+}{\mathscr{D}}$ 是$(S,+)$上的同余关系. 并且很容易验证，$\dot{\mathscr{D}}$ 也是$(S,+,\cdot)$上的半环同余关系.

本文主要对簇 $\mathbf{V}$ 中半环上的格林关系进行研究，刻画下列各种关系，并证明由这些关系所决定的半环簇都是 $\mathbf{V}$ 的子簇，最后得到这些子簇之间的 Mal'cev 积：

$$\{S\in\mathbf{V}: \dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}}=\Delta\},\ \{S\in\mathbf{V}: \dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}}=\nabla\},\ \{S\in\mathbf{V}: \dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}}\in \mathrm{Con}(S)\}$$

$$\{S\in\mathbf{V}: \dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{L}}=\Delta\},\ \{S\in\mathbf{V}: \dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{L}}=\nabla\},\ \{S\in\mathbf{V}: \dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{L}}\in \mathrm{Con}(S)\}$$

$$\{S\in\mathbf{V}: \dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{R}}=\Delta\},\ \{S\in\mathbf{V}: \dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{R}}=\nabla\},\ \{S\in\mathbf{V}: \dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{R}}\in \mathrm{Con}(S)\}$$

$$\{S\in\mathbf{V}: \overset{+}{\mathscr{L}}\vee\dot{\mathscr{D}}=\Delta\},\ \{S\in\mathbf{V}: \overset{+}{\mathscr{L}}\vee\dot{\mathscr{D}}=\nabla\},\ \{S\in\mathbf{V}: \overset{+}{\mathscr{L}}\vee\dot{\mathscr{D}}\in \mathrm{Con}(S)\}$$

这里 Δ 和 ∇ 分别表示$(S,+,\cdot)$上的恒等同余和泛同余.

引理3　对任意的 $S\in\mathbf{V}$，下列等式成立：

$$\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}}=\overset{+}{\mathscr{D}}\dot{\mathscr{L}}\overset{+}{\mathscr{D}} \tag{4}$$

$$\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{L}}=\overset{+}{\mathscr{L}}\dot{\mathscr{L}}\overset{+}{\mathscr{L}} \tag{5}$$

$$\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{R}}=\overset{+}{\mathscr{R}}\dot{\mathscr{L}}\overset{+}{\mathscr{R}} \tag{6}$$

$$\overset{+}{\mathscr{L}}\vee\dot{\mathscr{D}}=\overset{+}{\mathscr{L}}\dot{\mathscr{D}}\overset{+}{\mathscr{L}} \tag{7}$$

证　设 $S\in\mathbf{V}$. 则由文献[5]的命题1.5.11，易知等式(4)－(7)中每个等式的右侧包含在等式的左侧中. 因此，我们只需证明反包含关系. 下面我们只证明等式(4)，其它等式可类似地证明.

要证 $\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}}\subseteq\overset{+}{\mathscr{D}}\dot{\mathscr{L}}\overset{+}{\mathscr{D}}$，我们需要证 $\dot{\mathscr{L}}\overset{+}{\mathscr{D}}\dot{\mathscr{L}}\subseteq\overset{+}{\mathscr{D}}\dot{\mathscr{L}}\overset{+}{\mathscr{D}}$. 假设对任意 $a,b\in S$，$a\dot{\mathscr{L}}\overset{+}{\mathscr{D}}\dot{\mathscr{L}}b$. 则存在 $u,v\in S$，使得 $a\dot{\mathscr{L}}u\overset{+}{\mathscr{D}}v\dot{\mathscr{L}}b$. 因为 $\overset{+}{\mathscr{D}}$ 是 S 上的同余且 $a\dot{\mathscr{L}}u\overset{+}{\mathscr{D}}v$，于是有

$$a=au^{n-1}u^{n-1}\overset{+}{\mathscr{D}}av^{n-1}u^{n-1}$$

又因为 $u\overset{+}{\mathscr{D}}v\dot{\mathscr{L}}b$，故有

$$b=bv^{n-1}\overset{+}{\mathscr{D}}bu^{n-1}$$

进一步，由 $\dot{\mathscr{L}}$ 是$(S,\cdot)$上的右同余，$a\dot{\mathscr{L}}u$ 和 $b\dot{\mathscr{L}}v$，我们有

$$av^{n-1}u^{n-1}\dot{\mathscr{L}}uv^{n-1}u^{n-1}$$

$$bu^{n-1}\dot{\mathscr{L}}vu^{n-1}$$

因此，

$$a\overset{+}{\mathscr{D}}av^{n-1}u^{n-1}\dot{\mathscr{L}}uv^{n-1}u^{n-1}\dot{\mathscr{L}}vu^{n-1}\dot{\mathscr{L}}bu^{n-1}\overset{+}{\mathscr{D}}b$$

这就证明了 $\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}}\subseteq\overset{+}{\mathscr{D}}\dot{\mathscr{L}}\overset{+}{\mathscr{D}}$.

引理4　设 $S\in\mathbf{V}$，则对任意的 $a,b\in S$，我们有

(i) $a(\dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{D}})b$ 当且仅当 $\overset{+}{\mathscr{D}}_{ab^{n-1}} = \overset{+}{\mathscr{D}}_a$ 和 $\overset{+}{\mathscr{D}}_{ba^{n-1}} = \overset{+}{\mathscr{D}}_b$；

(ii) $a(\dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{L}})b$ 当且仅当 $\overset{+}{\mathscr{L}}_{ab^{n-1}} = \overset{+}{\mathscr{L}}_a$ 和 $\overset{+}{\mathscr{L}}_{ba^{n-1}} = \overset{+}{\mathscr{L}}_b$；

(iii) $a(\dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{R}})b$ 当且仅当 $\overset{+}{\mathscr{R}}_{ab^{n-1}} = \overset{+}{\mathscr{R}}_a$ 和 $\overset{+}{\mathscr{R}}_{ba^{n-1}} = \overset{+}{\mathscr{R}}_b$；

(iv) $a(\overset{+}{\mathscr{L}} \vee \dot{\mathscr{D}})b$ 当且仅当 $\overset{+}{\mathscr{L}}_{ab^{n-1}a^{n-1}} = \overset{+}{\mathscr{L}}_a$ 和 $\overset{+}{\mathscr{L}}_{ba^{n-1}b^{n-1}} = \overset{+}{\mathscr{D}}_a$.

证　设 $S \in \mathbf{V}$. 我们只证明(i)，其它情况类似地可证.

若 $a, b \in S$ 使得 $a(\dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{D}})b$，则由等式(4)可知，存在 $u, v \in S$ 使得 $a \overset{+}{\mathscr{D}} u \dot{\mathscr{L}} v \overset{+}{\mathscr{D}} b$. 因为 $\overset{+}{\mathscr{D}}$ 是$(S, \cdot)$上的同余且 $a \overset{+}{\mathscr{D}} u$，于是有

$$ab^{n-1} \overset{+}{\mathscr{D}} ub^{n-1}$$

又由 $u \dot{\mathscr{L}} v \overset{+}{\mathscr{D}} b$，可得

$$u = uv^{n-1} \overset{+}{\mathscr{D}} ub^{n-1}$$

因此

$$a \overset{+}{\mathscr{D}} u = uv^{n-1} \overset{+}{\mathscr{D}} ab^{n-1}$$

这就证明了

$$\overset{+}{\mathscr{D}}_{ab^{n-1}} = \overset{+}{\mathscr{D}}_a$$

我们可类似地证明

$$\overset{+}{\mathscr{D}}_{ba^{n-1}} = \overset{+}{\mathscr{D}}_b$$

反过来，如果对任意的 $a, b \in S$，都有

$$\overset{+}{\mathscr{D}}_{ab^{n-1}} = \overset{+}{\mathscr{D}}_a \qquad \overset{+}{\mathscr{D}}_{ba^{n-1}} = \overset{+}{\mathscr{D}}_b$$

则有

$$a \overset{+}{\mathscr{D}} ab^{n-1} \overset{+}{\mathscr{D}} ab^{n-1}a^{n-1} \dot{\mathscr{L}} ba^{n-1}b^{n-1} \overset{+}{\mathscr{D}} ba^{n-1} \overset{+}{\mathscr{D}} b$$

因此，由(4)式可得 $a(\dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{D}})b$.

由引理 3 和引理 4，我们可得下面的结论：

定理 1　设 $S \in \mathbf{V}$，则有

(i) S 满足 $\dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{D}} = \nabla$ 当且仅当对任意的 $a, b \in S$，$\overset{+}{\mathscr{D}}_{ab^{n-1}} = \overset{+}{\mathscr{D}}_a$，即 S 满足下列等式：

$$x + xy^{n-1} + x \approx x$$
$$xy^{n-1} + x + xy^{n-1} \approx xy^{n-1}$$

(ii) S 满足 $\dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{L}} = \nabla$ 当且仅当对任意的 $a, b \in S$，$\overset{+}{\mathscr{L}}_{ab^{n-1}} = \overset{+}{\mathscr{L}}_a$，即 S 满足下列等式：

$$x + xy^{n-1} \approx x$$
$$xy^{n-1} + x \approx xy^{n-1}$$

(iii) S 满足 $\dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{R}} = \nabla$ 当且仅当对任意的 $a, b \in S$，$\overset{+}{\mathscr{R}}_{ab^{n-1}} = \overset{+}{\mathscr{R}}_a$，即 S 满足下列等式：

$$x + xy^{n-1} \approx xy^{n-1}$$
$$xy^{n-1} + x \approx x$$

(iv) S 满足 $\overset{+}{\mathscr{L}} \vee \dot{\mathscr{D}} = \nabla$ 当且仅当对任意的 $a, b \in S$，$\overset{+}{\mathscr{L}}_{ab^{n-1}a^{n-1}} = \overset{+}{\mathscr{L}}_a$，即 S 满足下列等式：

$$x + xy^{n-1}x^{n-1} \approx x$$
$$xy^{n-1}x^{n-1} + x \approx xy^{n-1}x^{n-1}$$

由定理 1 可知，下列半环类的集合都构成簇 $\mathbf{V}$ 的子簇：

$$\{S \in \mathbf{V} : \dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{D}} = \nabla\}$$

$$\{S \in \mathbf{V} : \dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{L}} = \nabla\}$$

$$\{S \in \mathbf{V}: \dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{R}} = \nabla\}$$

$$\{S \in \mathbf{V}: \overset{+}{\mathscr{L}} \vee \dot{\mathscr{D}} = \nabla\}$$

我们分别用 $\widetilde{\boldsymbol{L}}_{d_1}$, $\widetilde{\boldsymbol{L}}_{l_1}$, $\widetilde{\boldsymbol{L}}_{r_1}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{L}}^*_{d_1}$ 来表示上述子簇. 另一方面，我们用下列符号表示上面四个子簇的对偶子簇：

$$\widetilde{\boldsymbol{L}}_{d_0} = \{S \in \mathbf{V}: \dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{D}} = \Delta\}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{L}}_{l_0} = \{S \in \mathbf{V}: \dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{L}} = \Delta\}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{L}}_{r_0} = \{S \in \mathbf{V}: \dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{R}} = \Delta\}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{L}}^*_{d_0} = \{S \in \mathbf{V}: \overset{+}{\mathscr{L}} \vee \dot{\mathscr{D}} = \Delta\}$$

定理 2 设 $S \in \mathbf{V}$，则

(i) S 满足 $\dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{D}} = \Delta$ 当且仅当半环 S 的乘法导出半群 $(S, \cdot)$ 是右正则纯正群并，S 的加法导出半群 $(S, +)$ 是半格，即 S 满足下列等式：

$$x + y \approx y + x \tag{8}$$

$$xy \approx y^{n-1}xy \tag{9}$$

(ii) S 满足 $\dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{L}} = \Delta$ 当且仅当半环 S 的乘法导出半群 $(S, \cdot)$ 是右正则纯正群并，S 的加法导出半群 $(S, +)$ 是右正则带，即 S 满足等式(9)和下列等式：

$$y + x \approx x + y + x \tag{10}$$

(iii) S 满足 $\dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{R}} = \Delta$ 当且仅当半环 S 的乘法导出半群 $(S, \cdot)$ 是右正则纯正群并，S 的加法导出半群 $(S, +)$ 是左正则带，即 S 满足等式(9)和下列等式：

$$x + y \approx x + y + x$$

(iv) S 满足 $\overset{+}{\mathscr{L}} \vee \dot{\mathscr{D}} = \Delta$ 当且仅当半环 S 的乘法导出半群 $(S, \cdot)$ 是半格，S 的加法导出半群 $(S, +)$ 是右正则带，即 S 满足等式(10)和下列等式：

$$xy \approx yx$$

我们用 $\widetilde{\boldsymbol{L}}_d$, $\widetilde{\boldsymbol{L}}_l$, $\widetilde{\boldsymbol{L}}_r$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{L}}^*_d$ 分别表示下列四个半环类的集合：

$$\widetilde{\boldsymbol{L}}_d = \{S \in \mathbf{V}: \dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{D}} \in \mathrm{Con}(S)\}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{L}}_l = \{S \in \mathbf{V}: \dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{L}} \in \mathrm{Con}(S)\}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{L}}_r = \{S \in \mathbf{V}: \dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{R}} \in \mathrm{Con}(S)\}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{L}}^*_d = \{S \in \mathbf{V}: \overset{+}{\mathscr{L}} \vee \dot{\mathscr{D}} \in \mathrm{Con}(S)\}$$

下面我们将证明 $\widetilde{\boldsymbol{L}}_d$, $\widetilde{\boldsymbol{L}}_l$, $\widetilde{\boldsymbol{L}}_r$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{L}}^*_d$ 是半环簇 $\mathbf{V}$ 的子簇. 我们首先证明下面的定理：

定理 3 (i) $\widetilde{\boldsymbol{L}}_d = \widetilde{\boldsymbol{L}}_{d_1} \circ \widetilde{\boldsymbol{L}}_{d_0}$

(ii) $\widetilde{\boldsymbol{L}}_l = \widetilde{\boldsymbol{L}}_{l_1} \circ \widetilde{\boldsymbol{L}}_{l_0}$;

(iii) $\widetilde{\boldsymbol{L}}_r = \widetilde{\boldsymbol{L}}_{r_1} \circ \widetilde{\boldsymbol{L}}_{r_0}$;

(iv) $\widetilde{\boldsymbol{L}}^*_d = \widetilde{\boldsymbol{L}}^*_{d_1} \circ \widetilde{\boldsymbol{L}}^*_{d_0}$.

证 我们只需证明(i)，其它等式类似可证. 若 $S \in \widetilde{\boldsymbol{L}}_d$，则

$$\rho = \dot{\mathscr{L}} \vee \overset{+}{\mathscr{D}} \in \mathrm{Con}(S)$$

且对任意的 $u \in S$，有 $\rho_u \in \widetilde{\boldsymbol{L}}_{d_1}$. 对任意的 $a, b \in S$，由 $\dot{\mathscr{L}} \subseteq \rho$ 和 $\dot{L}_{ab} = \dot{L}_{b^{n-1}ab}$，我们有

$$\rho_{ab} = \rho_{b^{n-1}ab}$$

即

$$\rho_a\rho_b=\rho_{b^{n-1}}\rho_a\rho_b$$

由此可知，S/ρ 满足等式(9). 对任意的 $a,b\in S$，由 $\overset{+}{\mathscr{D}}\subseteq\rho$ 和 $\overset{+}{\mathscr{D}}_{a+b}=\overset{+}{\mathscr{D}}_{b+a}$，可得

$$\rho_{a+b}=\rho_{b+a}$$

因此 S/ρ 满足等式(8). 故由定理 2 的(i)可知，$S\in\widetilde{\boldsymbol{L}}_{d_1}\circ\widetilde{\boldsymbol{L}}_{d_0}$.

反过来，如果 $S\in\widetilde{\boldsymbol{L}}_{d_1}\circ\widetilde{\boldsymbol{L}}_{d_0}$，则对任意的 $u\in S$，存在 $\rho\in\mathrm{Con}(S)$，使得 $\rho_u\in\widetilde{\boldsymbol{L}}_{d_1}$ 和 $S/\rho\in\widetilde{\boldsymbol{L}}_{d_0}$. 对任意的 $u\in S$，由于 $\rho_u\in\widetilde{\boldsymbol{L}}_{d_1}$，于是有

$$\rho\subseteq\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}}$$

因为 $S/\rho\in\widetilde{\boldsymbol{L}}_{d_0}$，则有 S/ρ 满足等式(8)，(9). 从而

$$\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}}\subseteq\rho$$

因此

$$\rho=\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}}$$

定理 4　$\widetilde{\boldsymbol{L}}_d$ 是由下列等式确定的 $\mathbf{V}$ 的子簇：

$$(yx+z)+(yx+z)(x^{n-1}yx+z)^{n-1}+(yx+z)\approx yx+z \tag{11}$$

$$(yx+z)(x^{n-1}yx+z)^{n-1}+(yx+z)+(yx+z)(x^{n-1}yx+z)^{n-1}$$
$$\approx(yx+z)(x^{n-1}yx+z)^{n-1} \tag{12}$$

$$zyx+zyx(zx^{n-1}yx)^{n-1}+zyx\approx zyx \tag{13}$$

$$zyx(zx^{n-1}yx)^{n-1}+zyx+zyx(zx^{n-1}yx)^{n-1}\approx zyx(zx^{n-1}yx)^{n-1} \tag{14}$$

证　若 $S\in\widetilde{\boldsymbol{L}}_d$，则 $\rho=\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}}\in\mathrm{Con}(S)$，这里对任意的 $u\in S$，$\rho_u\in\widetilde{\boldsymbol{L}}_{d_1}$ 且 $S/\rho\in\widetilde{\boldsymbol{L}}_{d_0}$. 因为 $S/\rho\in\widetilde{\boldsymbol{L}}_{d_0}$，由定理 2 的(i)可知，对任意的 $a,b\in S$，都有 $\rho_{ba}=\rho_{a^{n-1}ba}$. 因此，对任意的 $c\in S$，有

$$\rho_{ba+c}=\rho_{a^{n-1}ba+c}$$
$$\rho_{cba}=\rho_{ca^{n-1}ba}$$

由定理 1 的(i)可得

$$(ba+c)+(ba+c)(a^{n-1}ba+c)^{n-1}+(ba+c)=ba+c$$
$$(ba+c)(a^{n-1}ba+c^{n-1})^{n-1}+(ba+c)+(ba+c)(a^{n-1}ba+c)^{n-1}=(ba+c)(a^{n-1}ba+c)^{n-1}$$
$$cba+cba(ca^{n-1}ba)^{n-1}+cba=cba$$
$$cba(ca^{n-1}ba)^{n-1}+cba+cba(ca^{n-1}ba)^{n-1}=cba(ca^{n-1}ba)^{n-1}$$

因此 S 满足等式(11)－(14).

反过来，设 $S\in\mathbf{V}$ 且 S 满足等式(11)－(14). 假设对任意的 $a,b\in S$，有 $a(\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}})b$. 则存在 c，$d\in S$ 使得 $a\overset{+}{\mathscr{D}}c\dot{\mathscr{L}}d\overset{+}{\mathscr{D}}b$. 我们首先证明 $\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}}$ 是$(S,+)$上的同余. 由等式(11)和(12)，对任意的 $w\in S$，有

$$(cd^{n-1}+w)\overset{+}{\mathscr{D}}(cd^{n-1}+w)(d^{n-1}cd^{n-1}+w)$$

进一步，因为 $c\dot{\mathscr{L}}d$，于是有

$$(c+w)\overset{+}{\mathscr{D}}(c+w)(d^{n-1}c+w)$$

类似地可证

$$(d+w)\overset{+}{\mathscr{D}}(d+w)(c^{n-1}d+w)$$

由于 $\overset{+}{\mathscr{D}}$ 是 S 上的同余，我们有

$$(a+w)\overset{+}{\mathscr{D}}(c+w)\overset{+}{\mathscr{D}}(c+w)(d^{n-1}c+w)\overset{+}{\mathscr{D}}(c+w)(d^{n-1}c+w)(c+w)^{n-1}\dot{\mathscr{L}}$$
$$(d+w)(c^{n-1}d+w)\overset{+}{\mathscr{D}}(d+w)\overset{+}{\mathscr{D}}(b+w)$$

和

$$(w+a)\overset{+}{\mathscr{D}}(w+c)\overset{+}{\mathscr{D}}(w+c)(w+d^{n-1}c)\overset{+}{\mathscr{D}}(w+c)(w+d^{n-1}c)(w+c)^{n-1}\dot{\mathscr{L}}$$

$$(w+d)(w+c^{n-1}d)\overset{+}{\mathscr{D}}(w+d)\overset{+}{\mathscr{D}}(w+b)$$

因此，由(4)式可得：

$$(a+w)(\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}})(b+w)$$

$$(w+a)(\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}})(w+b)$$

其次，我们证明 $\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}}$ 是$(S,\cdot)$上的同余. 事实上，由等式(13)和(14)，我们有

$$wcd^{n-1}\overset{+}{\mathscr{D}}wcd^{n-1}(wd^{n-1}cd^{n-1})^{n-1}$$

又因为 $c\dot{\mathscr{L}}d$，我们有

$$wc\overset{+}{\mathscr{D}}wcw^{n-1}d^{n-1}$$

通过交换 c 和 d，类似地可得

$$wd\overset{+}{\mathscr{D}}wdw^{n-1}c^{n-1}$$

因为 $\overset{+}{\mathscr{D}}$ 是 S 上的同余，我们有

$$wa\overset{+}{\mathscr{D}}wc\overset{+}{\mathscr{D}}wcw^{n-1}d^{n-1}\overset{+}{\mathscr{D}}wcw^{n-1}d^{n-1}wc\dot{\mathscr{L}}w^{n-1}d^{n-1}wc\dot{\mathscr{L}}wdw^{n-1}c^{n-1}\overset{+}{\mathscr{D}}wd\overset{+}{\mathscr{D}}wb$$

故由(4)式可得

$$wa(\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}})wb$$

因而 $\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}}$ 是$(S,\cdot)$上的左同余. 最后，因为 $\dot{\mathscr{L}}$ 是$(S,\cdot)$上的右同余且 $\overset{+}{\mathscr{D}}$ 是 S 上的同余，我们有 $\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}}$ 是 S 上的同余.

类似的，我们可推导出下列结果. 结果的证明省略.

定理 5　$\widetilde{\boldsymbol{L}}_l$ 是的由下列等式确定的 $\mathbf{V}$ 的子簇：

$$(yx+z)+(yx+z)(x^{n-1}yx+z)^{n-1}\approx yx+z$$

$$(yx+z)(x^{n-1}yx+z)^{n-1}+(yx+z)\approx(yx+z)(x^{n-1}yx+z)^{n-1}$$

$$(z+yx)(z+x^{n-1}yx)^{n-1}+(z+yx)\approx(z+yx)(z+x^{n-1}yx)^{n-1}$$

$$(z+y+x)+(z+y+x)(z+x+y+x)^{n-1}\approx z+y+x$$

$$(z+y+x)(z+x+y+x)^{n-1}+(z+y+x)\approx(z+y+x)(z+x+y+x)^{n-1}$$

$$zyx+zyx(zx^{n-1}yx)^{n-1}\approx zyx$$

$$zyx(zx^{n-1}yx)^{n-1}+zyx\approx zyx(zx^{n-1}yx)^{n-1}$$

定理 6　$\widetilde{\boldsymbol{L}}_r$ 是的由下列等式确定的 $\mathbf{V}$ 的子簇：

$$(z+yx)+(z+yx)(z+x^{n-1}yx)^{n-1}\approx(z+yx)(z+x^{n-1}yx)^{n-1}$$

$$(z+yx)(z+x^{n-1}yx)^{n-1}+(z+yx)\approx(z+yx)(z+x^{n-1}yx)^{n-1}$$

$$(yx+z)+(yx+z)(x^{n-1}yx+z)^{n-1}\approx(yx+z)(x^{n-1}yx+z)^{n-1}$$

$$(yx+z)(x^{n-1}yx+z)^{n-1}+(yx+z)\approx(yx+z)(x^{n-1}yx+z)^{n-1}$$

$$(x+y+z)+(x+y+z)(x+y+x+z)^{n-1}\approx(x+y+z)(x+y+x+z)^{n-1}$$

$$(x+y+z)(x+y+x+z)^{n-1}+(x+y+z)\approx x+y+z$$

$$zyx+zyx(zx^{n-1}yx)^{n-1}\approx zyx(zx^{n-1}yx)^{n-1}$$

$$zyx(zx^{n-1}yx)^{n-1}+zyx\approx zyx$$

定理 7　$\boldsymbol{L}_d^*$ 是由下列等式确定的 $\mathbf{V}$ 的子簇：

$$(yx+z)+(yx+z)(xy+z)^{n-1}(yx+z)^{n-1}\approx yx+z$$

$$(yx+z)(xy+z)^{n-1}(yx+z)^{n-1}+(yx+z)\approx(yx+z)(xy+z)^{n-1}(yx+z)^{n-1}$$

$$(z+yx)+(z+yx)(z+xy)^{n-1}(z+yx)^{n-1}\approx z+yx$$

$$(z+yx)(z+xy)^{n-1}(z+yx)^{n-1}+(z+yx)\approx(z+yx)(z+xy)^{n-1}(z+yx)^{n-1}$$
$$(z+y+x)+(z+y+x)(z+x+y+x)^{n-1}(z+y+x)^{n-1}\approx z+y+x$$
$$(z+y+x)(z+x+y+x)^{n-1}(z+y+x)^{n-1}+(z+y+x)$$
$$\approx(z+y+x)(z+x+y+x)^{n-1}(z+y+x)^{n-1}$$

参考文献：

[1] PASTIJN F, ZHAO X Z. Green's $\mathscr{D}$-Relation for the Multiplicative Reduct of an Idempotent Semiring [J]. Arch Math (Brno), 2000, 36: 77-93.

[2] ZHAO X Z, GUO Y Q, SHUM K P. $\mathscr{D}$-Subvarieties of the Variety of Idempotent Semirings [J]. Algebra Colloq., 2002, 9(1): 15-28.

[3] ZHAO X Z, SHUM K P, GUO Y Q. $\mathscr{L}$-Subvarieties of the Variety of Idempotent Semirings [J]. Algebra Universalis, 2001, 46(1-2): 75-96.

[4] PETRICH M, REILLY N R. Completely Regular Semigroups [M]. New York: Wiley, 1999.

[5] HOWIE J M. Fundamentals of Semigroup Theory [M]. Oxford: Oxford Science Publication, 1995.

Green's Relations in Semirings Satisfying Some Identities

WANG Ai-fa[1,2]

1. *School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China;*

2. *School of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China*

Abstract: Green's relations in a semiring whose mulitiplicative reduct is a completely regular semigroup and whose additive reduct is an idempotent semigroup are studied. The sufficient and necessary conditions for $\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{D}}$, $\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{L}}$, $\dot{\mathscr{L}}\vee\overset{+}{\mathscr{R}}$ and $\overset{+}{\mathscr{L}}\vee\dot{\mathscr{D}}$ being congruence relations are given, that the classes of semirings which are determined by the above Green's relations are varieties is proved, and the Mal'cev products of the above varieties are obtained.

Key words: variety; semiring; Green's relation; congruence

责任编辑　张　构