DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.12.011

多线性分数次积分算子在 Morrey 型空间上新的端点估计[①]

周 盼， 周 疆

新疆大学 数学与系统科学学院，乌鲁木齐 830046

摘要： 考虑了多线性分数次积分算子 $I_{\alpha,m}$ 在 Morrey 型空间的端点估计. 利用 Hölder 不等式和分环技巧等分析手段，证明了算子 $I_{\alpha,m}$ 从 $\mathscr{M}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}$ 空间到 BMO 空间是有界的，并且从 $\mathscr{M}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}$ 空间到 $\mathrm{Lip}_{\alpha-\frac{n}{p_0}}$ 空间也是有界的.

关 键 词： 多线性分数次积分算子；多 Morrey 空间；BMO 空间；Lipschitz 空间；有界性

中图分类号： O174.2 **文献标志码：** A **文章编号：** 1673-9868(2017)12-0074-07

设 $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$. 如果一个函数 $f \in L_{\mathrm{loc}}^{q}$ 且满足

$$\| f \|_{M_q^p} = \sup_{x \in B} \frac{1}{| B |^{1/q-1/p}} \left(\int_B | f(y) |^q \mathrm{d}y \right)^{1/q} < \infty$$

则称其属于 Morrey 空间 M_q^p，其中 B 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开球.

众所周知，Morrey 空间是文献[1]为了研究二阶椭圆型偏微分方程的解的局部性质而引入的. 作为一个有用的工具，它在调和分析和偏微分方程中都扮演着重要角色[2-4]. 近几十年来，文献[5-8]对 Morrey 型空间进行了研究. 例如，文献[5]研究了分数次积分算子在 Morrey 空间上的性质，得到了 Hardy-Littlewood-Sobolev 定理；文献[6-8]研究了 Hardy-Littlewood 极大算子、分数次极大算子、分数次积分算子交换子以及乘子在 Morrey 型空间上的有界性.

20 世纪 70 年代以来，多线性算子的理论受到了许多学者的关注：文献[9]研究了多线性的 Calderón-Zygmund 理论；文献[10]系统地完善了多线性的 Calderón-Zygmund 理论；文献[11-13]研究了多线性的分数次积分算子理论. 这些理论在调和分析领域得到了广泛的应用. 设 $0 < \alpha < mn$ 且 $m \in \mathbb{N}^*$，Adams 型[5]多线性分数次积分算子 $I_{\alpha,m}$ 被定义为

$$I_{\alpha,m}(\boldsymbol{f})(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{f_1(y_1) \cdots f_m(y_m) \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_m}{(| x - y_1 | + \cdots + | x - y_m |)^{mn-\alpha}}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_m)$.

显然，多线性分数次积分算子 $I_{\alpha,m}$ 是经典的分数次积分算子 I_α 的推广. 文献[14]证明了多线性分数次

① 收稿日期：2017-04-21
基金项目：国家自然科学基金项目(11661075).
作者简介：周 盼(1991-)，女，甘肃武威人，硕士研究生，主要从事调和分析的研究.
通信作者：周 疆，教授，硕士研究生导师.

积分算子 $I_{\alpha,m}$ 在 Morrey 空间上的有界性，得到如下结果：

设 $m\in\mathbb{N}^*$，$0<\alpha<mn$，$1<q_i\leqslant p_i\leqslant\infty$，$i=0,1,\cdots,m$. 如果

$$1/p_0=1/p_1+\cdots+1/p_m-\alpha/n$$

$$1/q_0=1/q_1+\cdots+1/q_m-\alpha/n$$

则存在正常数 C，使得

$$\| I_{\alpha,m}(\boldsymbol{f})\|_{M^{p_0}_{q_0}}\leqslant C\prod_{i=1}^{m}\| f_i\|_{M^{p_i}_{q_i}} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$.

文献[15]介绍了多 Morrey 空间的定义，并且证明了多 Morrey 范数比 m 重 Morrey 范数的乘积要严格的小，也证明了多线性分数次积分算子在 Morrey 空间上的有界性，得到的结果比文献[14]中的结果更精确：

设 $m\in\mathbb{N}^*$，$0<\alpha<mn$，$1<p_1,\cdots,p_m<\infty$，$\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_m)$，$0<p\leqslant p_0<\infty$，$0<q\leqslant q_0<\infty$. 如果

$$1/p=1/p_1+\cdots+1/p_m$$

$$1/q_0=1/p_0-\alpha/n$$

$$q/q_0=p/p_0$$

则存在正常数 C，使得

$$\| I_{\alpha,m}(\boldsymbol{f})\|_{M^{q_0}_{q}}\leqslant C\|\boldsymbol{f}\|_{\mathscr{M}^{p_0}_{\boldsymbol{p}}} \tag{2}$$

由(1)式和(2)式可知，文献[14-15]考虑了当 $p_0<n/\alpha$ 时，多线性分数次积分算子在 Morrey 空间上的有界性，那么当 $p_0\geqslant n/\alpha$ 时，可以得到什么结果呢？ 这就是本文要研究的问题.

1　预备知识

定义 1[16]　设 $f\in L_{\mathrm{loc}}$. 如果存在常数 $C>0$，使得对于任意的球 $B\in\mathbb{R}^n$，满足

$$\frac{1}{|B|}\int_B|f(x)-m_B(f)|\,\mathrm{d}x\leqslant C$$

则称其属于 BMO 空间，其中

$$m_B(f):=\frac{1}{|B|}\int_B f(x)\,\mathrm{d}x$$

最小的常数 C 被定义为 f 的 BMO 范数.

定义 2　设 $0<\alpha<1$，Lipschitz 空间 Lip_α 被定义为

$$\mathrm{Lip}_\alpha=\left\{f\in L_{\mathrm{loc}}:\ \|f\|_{\mathrm{Lip}_\alpha}=\sup_{x,\,y\in\mathbb{R}^n,\,x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<\infty\right\}$$

定义 3[15]　设向量 $\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_m)$，$1\leqslant p_1,\cdots,p_m\leqslant\infty$，$0<p\leqslant p_0<\infty$ 且

$$1/p=1/p_1+\cdots+1/p_m$$

对于在 $\mathbb{R}^n$ 上的一些可测函数集 $\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)$，多 Morrey 范数被定义为

$$\|\boldsymbol{f}\|_{\mathscr{B}^{p_0}_{\boldsymbol{p}}}=\sup_{B\in\mathbb{R}^n}|B|^{1/p_0}\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f_i(x)|^{p_i}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p_i}<\infty$$

定义多 Morrey 空间 $\mathscr{M}^{p_0}_{\boldsymbol{p}}$ 是在$(\mathbb{R}^n)^m$ 上具有(3)式形式的所有可测函数 f 构成的集合

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{m}f_i^{(k)}\right) \tag{3}$$

在某种意义上，它在$(\mathbb{R}^n)^m$ 中几乎处处收敛，并且假设每一个向量函数$(f_1^k, \cdots, f_m^k)$都满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| (f_1^k, \cdots, f_m^k) \|_{\mathscr{B}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}} < \infty \tag{4}$$

那么 $f \in \mathscr{M}_{\boldsymbol{p}}^{P_0}$ 的范数被定义为

$$\| f \|_{\mathscr{M}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}} = \inf \sum_{k=1}^{\infty} \| (f_1^{(k)}, \cdots, f_m^{(k)}) \|_{\mathscr{B}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}}$$

其中下确界是取遍如(3)式的所有函数.

2　主要结果及其证明

这一部分给出分数次积分算子 $I_{\alpha,m}$ 在BMO空间和Lipschitz空间上的端点估计，即定理1和定理2，并对其进行证明.

定理 1　设 $m \in \mathbb{N}^*$，$1 < p_1, \cdots, p_m < \infty$，$0 < \alpha = \dfrac{n}{p_0} < 1$，$\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_m)$，并且 $0 < p \leqslant p_0 < \infty$

$$1/p = 1/p_1 + \cdots + 1/p_m$$
$$1/q = 1/p - \alpha/n$$

则存在常数 $C > 0$，使得

$$\| I_{\alpha,m}(\boldsymbol{f}) \|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C \| \boldsymbol{f} \|_{\mathscr{M}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}}$$

证　给定 $\boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_m)$，对于任意的球 $B = B(x_0, r)$，只需证明不等式

$$\frac{1}{|B|}\int_B | I_{\alpha,m}(\boldsymbol{f})(x) - m_B(I_{\alpha,m}(\boldsymbol{f})) | \mathrm{d}x \leqslant C \| \boldsymbol{f} \|_{\mathscr{B}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}}$$

成立.

设 $\Omega := \{(y_1, \cdots, y_m) : |x_0 - y_1| + \cdots + |x_0 - y_m| < 2r\}$ 且

$$c := \frac{1}{|B|}\int_B \int_{(\mathbb{R}^n)^m \setminus \Omega} \frac{f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m}{(|x_0 - y_1| + \cdots + |x_0 - y_m|)^{mn-\alpha}} \mathrm{d}x_0$$

由于

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B|}\int_B | I_{\alpha,m}(\boldsymbol{f})(x) - m_B(I_{\alpha,m}(\boldsymbol{f})) | \mathrm{d}x \leqslant \\
&\frac{2}{|B|}\int_B \left| \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m}{(|x - y_1| + \cdots + |x - y_m|)^{mn-\alpha}} - c \right| \mathrm{d}x \leqslant \\
&\frac{2}{|B|}\int_B \left| \int_{\Omega} \frac{f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m}{(|x - y_1| + \cdots + |x - y_m|)^{mn-\alpha}} \right| \mathrm{d}x + \\
&\frac{2}{|B|}\int_B \left| \int_{(\mathbb{R}^n)^m \setminus \Omega} \frac{f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m}{(|x - y_1| + \cdots + |x - y_m|)^{mn-\alpha}} - c \right| \mathrm{d}x = \\
&I_1 + I_2
\end{aligned}$$

对于 I_1，由 Hölder 不等式和 $I_{\alpha,m}$ 的有界性可得

$$\begin{aligned}
I_1 &\leqslant \frac{C}{|B|}\int_B | I_{\alpha,m}(f_1\chi_{2B}, \cdots, f_m\chi_{2B})(x) | \mathrm{d}x \leqslant \\
&C\left(\frac{1}{|B|}\int_B | I_{\alpha,m}(f_1\chi_{2B}, \cdots, f_m\chi_{2B})(x) |^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant
\end{aligned}$$

$$C|B|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|f_i(x)|^{p_i}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_i}}\leqslant$$
$$C\|\boldsymbol{f}\|_{\mathscr{B}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}}$$

设

$$\Omega_k:=\{(y_1,\cdots,y_m):2^k r\leqslant|x_0-y_1|+\cdots+|x_0-y_m|<2^{k+1}r\}$$

注意到，对于$(y_1,\cdots,y_m)\in(\mathbb{R}^n)^m\backslash\Omega$和$x$，$x_0\in B$，很容易得到

$$\left|\frac{1}{(|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|)^{mn-\alpha}}-\frac{1}{(|x_0-y_1|+\cdots+|x_0-y_m|)^{mn-\alpha}}\right|\leqslant$$
$$\frac{C|x-x_0|}{(|x_0-y_1|+\cdots+|x_0-y_m|)^{mn-\alpha+1}}\leqslant$$
$$\frac{Cr}{(|x_0-y_1|+\cdots+|x_0-y_m|)^{mn-\alpha+1}}$$

现在估计I_2.

$$I_2\leqslant\frac{C}{|B|}\frac{1}{|B|}\int_B\int_B\int_{(\mathbb{R}^n)^m\backslash\Omega}\left|\frac{1}{(|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|)^{mn-\alpha}}-\right.$$
$$\left.\frac{1}{(|x_0-y_1|+\cdots+|x_0-y_m|)^{mn-\alpha}}\right||f_1(y_1)|\cdots|f_m(y_m)|\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x\leqslant$$
$$Cr\frac{1}{|B|}\sum_{k=1}^{\infty}\int_B\int_{\Omega_k}\frac{|f_1(y_1)|\cdots|f_m(y_m)|\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m}{(|x_0-y_1|+\cdots+|x_0-y_m|)^{mn-\alpha+1}}\mathrm{d}x_0\leqslant$$
$$C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r}{(2^k r)^{mn-\alpha+1}}\int_{|x_0-y_1|+\cdots+|x_0-y_m|<2^{k+1}r}|f_1(y_1)|\cdots|f_m(y_m)|\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m\leqslant$$
$$C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r}{(2^k r)^{mn-\alpha+1}}\prod_{i=1}^{m}\int_{2^{k+1}B}|f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i\leqslant$$
$$C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r}{(2^k r)^{1-\alpha}}\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}|f_i(y_i)|^{p_i}\mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{p_i}}\leqslant$$
$$C\|\boldsymbol{f}\|_{\mathscr{B}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}}$$

结合I_1与I_2的估计可得

$$\frac{1}{|B|}\int_B|I_{\alpha,m}(\boldsymbol{f})(x)-m_B(I_{\alpha,m}(\boldsymbol{f}))|\mathrm{d}x\leqslant C\|\boldsymbol{f}\|_{\mathscr{B}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}}$$

即

$$\|I_{\alpha,m}(\boldsymbol{f})\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant C\|\boldsymbol{f}\|_{\mathscr{M}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}}$$

至此完成定理1的证明.

定理2 设$m\in\mathbb{N}^*$，$1<p_1,\cdots,p_m<\infty$，$0<\alpha-\frac{n}{p_0}<1$，$\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_m)$，并且$0<p\leqslant p_0<\infty$

$$1/p=1/p_1+\cdots+1/p_m$$

则存在正常数C，使得

$$\|I_{\alpha,m}(\boldsymbol{f})\|_{\mathrm{Lip}_{\alpha-\frac{n}{p_0}}}\leqslant C\|\boldsymbol{f}\|_{\mathscr{M}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}}$$

证 对于任意的x，$y\in\mathbb{R}^n$，仅需证明

$$|I_{\alpha,m}(f_1,\cdots,f_m)(x)-I_{\alpha,m}(f_1,\cdots,f_m)(y)|\leqslant C|x-y|^{\alpha-\frac{n}{p_0}}\|\boldsymbol{f}\|_{\mathscr{B}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}}$$

设

$$B=B(x,r)\qquad r=|x-y|$$

且

$$\Omega:=\{(y_1,\cdots,y_m):|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|<2r\}$$

由于

$$\begin{aligned}
&|I_{\alpha,m}(f_1,\cdots,f_m)(x)-I_{\alpha,m}(f_1,\cdots,f_m)(y)|=\\
&\left|\int_{(\mathbb{R}^n)^m}\frac{f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m}{(|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|)^{mn-\alpha}}-\int_{(\mathbb{R}^n)^m}\frac{f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m}{(|y-y_1|+\cdots+|y-y_m|)^{mn-\alpha}}\right|\leqslant\\
&\int_{\Omega}\frac{|f_1(y_1)|\cdots|f_m(y_m)|\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m}{(|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|)^{mn-\alpha}}+\int_{\Omega}\frac{|f_1(y_1)|\cdots|f_m(y_m)|\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m}{(|y-y_1|+\cdots+|y-y_m|)^{mn-\alpha}}+\\
&\int_{(\mathbb{R}^n)^m\backslash\Omega}\left|\frac{1}{(|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|)^{mn-\alpha}}-\frac{1}{(|y-y_1|+\cdots+|y-y_m|)^{mn-\alpha}}\right|\times\\
&|f_1(y_1)|\cdots|f_m(y_m)|\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m=\\
&J_1+J_2+J_3
\end{aligned}$$

对于 J_1，因为 $0<\alpha-\frac{n}{p}<1$，所以存在 $\alpha_i(i=1,\cdots,m)$ 使得

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_m=\alpha$$

且

$$0<\alpha_i-\frac{n}{p_i}<1$$

那么

$$\begin{aligned}
J_1\leqslant\ &C\int_{(B(x,2r))^m}\frac{|f_1(y_1)|\cdots|f_m(y_m)|\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m}{(|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|)^{mn-\alpha}}\leqslant\\
&C\prod_{i=1}^m\left(\int_{B(x,2r)}\frac{|f_i(y_i)|\mathrm{d}y_i}{|x-y_i|^{n-\alpha_i}}\right)\leqslant\\
&C\prod_{i=1}^m\left(\int_{B(x,2r)}|f_i(y_i)|^{p_i}\mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{p_i}}\left(\int_{B(x,2r)}\frac{1}{|x-y_i|^{(n-\alpha_i)p_i'}}\mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{p_i'}}\leqslant\\
&C\prod_{i=1}^m r^{\alpha_i-n}|B(x,2r)|^{\frac{1}{p_i'}}\left(\int_{B(x,2r)}|f_i(y_i)|^{p_i}\mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{p_i}}\leqslant\\
&Cr^{\alpha}\prod_{i=1}^m\left(\frac{1}{|B(x,2r)|}\int_{B(x,2r)}|f_i(y_i)|^{p_i}\mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{p_i}}\leqslant\\
&C|x-y|^{\alpha-\frac{n}{p_0}}\|\boldsymbol{f}\|_{\mathscr{B}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}}
\end{aligned}$$

由于 $B(x,2r)\subset B(y,3r)$，因此可得

$$J_2\leqslant C|x-y|^{\alpha-\frac{n}{p_0}}\|\boldsymbol{f}\|_{\mathscr{B}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}}$$

对于 J_3，类似于 I_2 的估计可得

$$J_3\leqslant C|x-y|^{\alpha-\frac{n}{p_0}}\|\boldsymbol{f}\|_{\mathscr{B}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}}$$

结合 J_1, J_2 和 J_3 的估计可得

$$| I_{\alpha,m}(f_1, \cdots, f_m)(x) - I_{\alpha,m}(f_1, \cdots, f_m)(y) | \leqslant C | x - y |^{\alpha - \frac{n}{p_0}} \| \boldsymbol{f} \|_{\mathscr{B}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}}$$

即

$$\| I_{\alpha,m}(\boldsymbol{f}) \|_{\mathrm{Lip}_{\alpha - \frac{n}{p_0}}} \leqslant C \| \boldsymbol{f} \|_{\mathscr{M}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}}$$

至此完成定理 2 的证明.

特别的，有以下推论：

推论 1 设 $m \in \mathbb{N}^*$, $(m-1)n < \alpha < mn$

$$1/p = 1/p_1 + \cdots + 1/p_m$$
$$1/q = 1/q_1 + \cdots + 1/q_m$$

且 $1 \leqslant q_i < p_i < \infty$, $(i = 1, \cdots, m)$. 如果 $p = n/\alpha$, 则有

$$\| I_{\alpha,m}(\boldsymbol{f}) \|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C \prod_{i=1}^{m} \| f_i \|_{M_{q_i}^{p_i}}$$

推论 2 设 $m \in \mathbb{N}^*$, $0 < \alpha < mn$

$$1/p = 1/p_1 + \cdots + 1/p_m$$
$$1/q = 1/q_1 + \cdots + 1/q_m$$

且 $1 \leqslant q_i < p_i < \infty$, $(i = 1, \cdots, m)$. 如果 $n/\alpha < p$ 且 $0 < \alpha - n/p < 1$, 则有

$$\| I_{\alpha,m}(\boldsymbol{f}) \|_{\mathrm{Lip}_{\alpha - n/p}} \leqslant C \prod_{i=1}^{m} \| f_i \|_{M_{q_i}^{p_i}}$$

注记 1 在文献[14]中已经给出了推论 1 和推论 2 的证明，但文献[14]中的方法在证明定理 1 和定理 2 时已经不再适用，由以上定理 1 和定理 2 的证明可知，我们使用了新的分环的思想对其进行证明.

参考文献：

[1] MORREY C. On the Solutions of Quasi-Linear Elliptic Partial Differential Equations [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1938, 43(1): 126-166.

[2] TAYLOR M. Analysis on Morrey Spaces and Applications to Navier-Stokes and Other Evolution Equations [J]. Communications in Partial Differential Equations, 1992, 17(9-10): 1407-1456.

[3] OLSEN P. Fractional Integration, Morrey Spaces and a Schrödinger Equation [J]. Communications Partial Differential Equations, 1995, 20(11-12): 2005-2055.

[4] KUKAVICA I. Regularity for the Navier-Stokes Equations with a Solution in a Morrey Space [J]. Indiana University Mathematics Journal, 2008, 57(6): 2843-2860.

[5] ADAMS D. A Note on Riesz Potentials [J]. Duke Mathematical Journal, 1975, 42(4): 765-778.

[6] CHIARENZA F, FRASCA M. Morrey Spaces and Hardy-Littlewood Maximal Functions [J]. Rend Mat Applizioni, 1987, 7(31): 273-279.

[7] DING Y. A Characterization of BMO Via Commutators for Some Operators [J]. Northeastern Mathematical Journal, 1997, 13(4): 422-432.

[8] GILLES P, RIEUSSET L G. Multipliers and Morrey Spaces [J]. Potential Analysis, 2013, 38(3): 741-752.

[9] COIFMAN R R, MEYER Y. On Commutators of Singular Integrals and Bilinear Singular Integrals [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1975, 212(OCT): 315-331.

[10] GRAFAKOS L, TORRES R. Multilinear Calderón-Zygmund Theory [J]. Advances in Mathemtics, 2002, 165(1): 124-164.

[11] GRAFAKOS L. On Multilinear Fractional Integrals [J]. Studia Mathematical，1992，102(1)：49－56.

[12] KENIG C E，STEIN E M. Multilinear Estimates and Fractional Integration [J]. Mathematial Research Leterst，1999，6(1)：1－15.

[13] GRAFAKOS L，KALTON N. Some Remarks on Multilinear Maps and Interpolation [J]. Mathematische Annalen，2001，319(1)：151－180.

[14] TANG L. Endpoint Estimates for Multilinear Fractional Integrals [J]. Journal of the Australian Mathematical Society，2008，84(3)：419－429.

[15] IIDA T，SATO E，SAWANO Y et al. Sharp Bouds for Multilinear Fractional Integral Operators on Morrey Type Spaces [J]. Positivity，2012，16(2)：339－358.

[16] JOHN F，NIRENBERG L. On Functions of Bounded Mean Oscillation [J]. Communications on Pure Applied Mathematics，1961，14(3)：415－426.

A New Endpoint Estimate for Multilinear Fractional Integral Operators on Morrey Type Spaces

ZHOU　Pan，　ZHOU　Jiang

College of Mathematics and System Sciences，Xinjiang University，Urumqi Xinjiang 830046，China

Abstract：Endpoint estimates for the multilinear fractional integral operator $I_{\alpha,m}$ on Morrey type spaces are discussed. Using the methods of analysis，such as Hölder inequality and the method of dividing ring，the authors prove that operator $I_{\alpha,m}$ is bounded from $\mathscr{M}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}$ spaces to BMO spaces and from $\mathscr{M}_{\boldsymbol{p}}^{p_0}$ spaces to $\mathrm{Lip}_{\alpha-\frac{n}{p_0}}$ spaces.

Key words：multilinear fractional integral operator；multi-Morrey space；BMO space；Lipschitz space；boundedness

责任编辑　周仁惠