

图的邻点可区别 V -全色数的一个上界^①

黄丽娜, 李沐春, 刘海忠

兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070

摘要: 用概率方法中的 Lovász 局部引理证明了当 $\delta \geq 75\sqrt{\Delta \ln \Delta}$ 时, 图的邻点可区别 V -全色数的上界是 $\Delta + 2 + \sqrt{\Delta \ln \Delta}$.

关键词: Lovász 局部引理; 邻点可区别 V -全色数; 上界

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2017)12-0081-05

图染色是图论的主要研究方向之一, 而邻点可区别染色^[1]是图染色的主要研究内容之一. 用概率方法来确定图染色中色数的界是一种新颖的方法, 1974 年 Erdős 首先引入概率方法证明 Ramsey 数 $r(k, k) \geq 2^{k/2}$. 目前用概率方法得到的一些结果可参考文献[2-3].

对于一般图的邻点可区别全色数并不容易确定, 后来学者们又提出了弱染色的概念. 若一个满足邻点可区别全染色的图可以出现不正常点染色, 则称图染色为邻点可区别 V -全染色; 若一个满足邻点可区别 V -全染色的图可以出现点与其关联边染同色, 则称图染色为邻点可区别 VI -全染色. 分别用 $\chi_{at}^v(G)$, $\chi_{at}^{vi}(G)$ 表示图 G 的邻点可区别 V -全色数, 邻点可区别 VI -全色数, 显然有 $\chi_{at}^{vi}(G) \leq \chi_{at}^v(G)$. 关于弱染色的一些结果见文献[4-6], 文献[7]得到了邻点可区别 VI -全色数的一个上界. 文中未加说明的术语见文献[8].

定理 1^[7] 对于简单图 G , 若 $\delta \geq 150\sqrt{\Delta \ln \Delta}$, 则

$$\chi_{at}^{vi}(G) \leq \Delta + 1 + 2\sqrt{\Delta \ln \Delta}$$

本文研究了图的邻点可区别 V -全染色, 并应用 Lovász 局部引理得到了图的邻点可区别 V -全色数的一个上界.

定理 2 对于简单图 G , 若 $\delta \geq 75\sqrt{\Delta \ln \Delta}$, 则

$$\chi_{at}^v(G) \leq \Delta + 2 + \sqrt{\Delta \ln \Delta}$$

由于

$$\chi_{at}^{vi}(G) \leq \chi_{at}^v(G)$$

所以当 $\delta \geq 75\sqrt{\Delta \ln \Delta}$ 时, 有

$$\chi_{at}^{vi}(G) \leq \Delta + 2 + \sqrt{\Delta \ln \Delta}$$

这个结果显然要比定理 1 的结果更优.

① 收稿日期: 2017-05-09

基金项目: 国家自然科学基金(11461038, 61163010); 兰州交通大学青年基金(2016014); 甘肃省教育厅科技项目(2017A-021).

作者简介: 黄丽娜(1991-), 女, 河南三门峡人, 硕士研究生, 主要从事图论与组合优化研究.

通信作者: 刘海忠, 副教授.

定理 2 的证明

在证明定理 2 之前, 首先给出相关的引理以及几个不等式:

引理 1^[9] 若 G 是简单图, 则它的边色数不超过 $\Delta + 1$.

引理 2^[10-11] (Lovász 局部引理) 考虑(典型的坏的)事件的集合 $\epsilon = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, 对每一个 A_i , 都存在 $D_i \subseteq \epsilon$ (D_i 可以为空), 使得每个 A_i 与 $\epsilon - (D_i \cup A_i)$ 互相独立. 若有实数 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1)$ 使得对每个 $1 \leq i \leq n$ 有

$$P_r(A_i) \leq x_i \prod_{A_j \in D_i} (1 - x_j)$$

则 ϵ 中所有事件都不发生的概率至少是

$$\prod_{i=1}^n (1 - x_i) > 0$$

文中所用到的不等式:

$$(i) \text{ 当 } a, b \in \mathbf{N} \text{ 时, } \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b;$$

$$(ii) \text{ 当 } x \in (0, \frac{1}{10}), y \geq 0 \text{ 时, } (1-x)^y \leq e^{-xy}, (1-x)^y \geq e^{-2xy};$$

$$(iii) \text{ 当 } x \geq 2 \text{ 时, } \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \geq \frac{1}{4}.$$

下面给出定理 2 的具体证明过程:

定理 2 的证明 首先, 由引理 1 得, 可以用 $\Delta + 1$ 种颜色对图 G 的边正常着色, 再用一种新色对所有点进行着色, 然后再对 G 的每条边及顶点独立地用 $N = \sqrt{\Delta \ln \Delta}$ 中的一种颜色以 $p = \frac{1}{10\Delta}$ 的概率随机均匀地重新着色. 为了保证图 G 是正常的邻点可区别 V -全染色, 需满足以下条件:

- (i) 正常边染色 —— 任意两条相邻边不能染同色;
- (ii) 关联元素染色正常 —— 任意点与其关联边不能同色;
- (iii) 邻点可区别 —— 任意相邻点的色集合均不同.

第一步, 定义如下坏事件:

- (i) 对每一对相邻的边 e_1, e_2 , 令 E_A 表示 e_1 和 e_2 染同种颜色的事件;
- (ii) 对每条边 e , 令 E_B 表示 e 和其某一端点染同色的事件;
- (iii) 任意相邻点 u 和 v , 其中 $d(u) = d(v)$, 令 E_C 表示点 u 和 v 的色集合满足 $C(u) = C(v)$ 的事件.

第二步, 计算坏事件发生的概率:

若事件 E_A 发生, 则相邻边 e_1 与 e_2 必染同种新色, 边 e_1 染新色的概率为 Np , 边 e_2 染与 e_1 相同颜色的概率为 p , 于是事件 E_A 发生的概率为 Np^2 . 同理, 事件 E_B 发生的概率为 $2Np^2$, 因此

$$\Pr(E_A) = Np^2 = \frac{1}{100\Delta} \sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}}$$

$$\Pr(E_B) = 2Np^2 = \frac{1}{50\Delta} \sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}}$$

若事件 E_C 发生, 则

$$C(u) = C(v)$$

令

$$C(u) - f(uv) = C(v) - f(uv) = C$$

是一个固定集合, 则 $|C| = d$, 于是可设 C 中有 i 种新颜色, $d - i$ 种旧颜色. 对于每条边染某种新色的概率

为 p , 不染任何新色的概率为 $1 - Np$, 因此事件 E_C 发生的概率为:

$$\Pr(E_C) = \sum_{i=0}^N \binom{d}{i} \binom{N}{i} (i! (1 - Np)^{d-i} p^i) \leq \sum_{i=0}^N \binom{d}{i} \binom{N}{i} (i^i e^{-Np(d-i)} p^i)^2$$

由于当 $\delta \geq 75\sqrt{\Delta \ln \Delta}$ 时, $Np < \frac{1}{10}$ 都成立, 故由引理 2 中的不等式 (i), (ii) 得:

$$\Pr(E_C) \leq \sum_{i=0}^N \left(\frac{ed}{i}\right)^i \left(\frac{eN}{i}\right)^i (i^i e^{-Np(d-i)} p^i)^2 = \sum_{i=0}^N (dNp^2 e^{2+2Np})^i e^{-2Npd} = e^{-2Npd} \sum_{i=0}^N (dNp^2 e^{2+2Np})^i \quad (1)$$

把 $N = \sqrt{\Delta \ln \Delta}$, $p = \frac{1}{10\Delta}$ 代入(1) 式, 则

$$\Pr(E_C) \leq e^{-\frac{1}{5}d\sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}}} \sum_{i=0}^N \left(\frac{d\sqrt{\Delta \ln \Delta}}{100\Delta^2} e^{2+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}}}\right)^i \leq e^{-\frac{1}{5}d\sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}}} \sum_{i=0}^N \left(\frac{1}{100\sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}}} e^{2+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}}}\right)^i$$

由于 $75\sqrt{\Delta \ln \Delta} \leq \delta \leq \Delta$, 则

$$\sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}} \leq \frac{1}{75}$$

于是

$$\sum_{i=0}^N \left(\frac{1}{100\sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}}} e^{2+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}}}\right)^i \leq \sum_{i=0}^N \left(\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{75} e^{2+\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{75}}\right)^i \leq \sum_{i=0}^N \left(\frac{1}{100}\right)^i \leq \frac{100}{99}$$

因此

$$\Pr(E_C) \leq \frac{100}{99} e^{-\frac{1}{5}d\sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}}}$$

第三步, 计算相关事件数

首先构造图 D , 其结点为两种类型的所有事件, 其中两个结点 E_X 和 E_Y 相关, 当且仅当 X 和 Y 包含一个公共元素. 由于每个事件 E_X 的发生, 仅依赖于 X 的元素, 故 D 是上述事件的相关图.

各事件之间的具体相关数见表 1, 其中每个事件 X 与其他事件的相关数均取它的上界.

表 1 各事件之间的相关数

E_A	E_B	E_C	
E_A	4Δ	4	3Δ
E_B	2Δ	2Δ	2Δ
E_C	$4d\Delta$	4Δ	$2\Delta^2$

注释: 事件 E_A 包括两条边 e_1, e_2 , 和每一条边相交的边数至多有 2Δ 条, 因此事件 E_A 与事件 E_A 的相关数不超过 4Δ ; 而每条边最多与其相关联的两个点颜色相同, 因此事件 E_A 与事件 E_B 的相关数不超过 4; 事件 E_A 包括 3 个点, 当事件 E_A 与事件 E_C 包括 1 个公共点 u 时, 与点 u 色集合相同的邻点不超过 Δ , 于是事件 E_A 与 E_C 的相关数不超过 3Δ ; 同理可得其他相关事件数.

第四步, 构造常数证明不等式:

设 $\frac{1}{50\Delta} \sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}}$, $\frac{1}{25\Delta} \sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}}$, $\frac{1}{5\Delta^2}$ 分别表示与事件 E_A, E_B, E_C 相关的常数.

第五步, 计算坏事件不发生的概率为正:

若要应用 Lovász 局部引理证明坏事件不发生的概率为正, 需证明以下三个不等式成立:

$$\frac{1}{100\Delta} \sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}} \leq \frac{1}{50\Delta} \sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}} \left(1 - \frac{1}{50\Delta} \sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}}\right)^{4\Delta} \left(1 - \frac{1}{25\Delta} \sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{5\Delta^2}\right)^{3\Delta} \quad (2)$$

$$\frac{1}{50\Delta} \sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}} \leq \frac{1}{25\Delta} \sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}} \left(1 - \frac{1}{50\Delta} \sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}}\right)^{2\Delta} \left(1 - \frac{1}{25\Delta} \sqrt{\frac{\ln \Delta}{\Delta}}\right)^{2\Delta} \left(1 - \frac{1}{5\Delta^2}\right)^{2\Delta} \quad (3)$$

$$\frac{100}{99}e^{-\frac{1}{5}d\sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}}} \leq \frac{1}{5\Delta^2} \left(1 - \frac{1}{50\Delta} \sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}}\right)^{4d\Delta} \left(1 - \frac{1}{25\Delta} \sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}}\right)^{4\Delta} \left(1 - \frac{1}{5\Delta^2}\right)^{2\Delta^2} \quad (4)$$

根据不等式 $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \geq \frac{1}{4}$ 对 $x \geq 2$ 均成立, 于是有

$$\left(1 - \frac{1}{50\Delta} \sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}}\right)^{4\Delta} \left(1 - \frac{1}{25\Delta} \sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{5\Delta^2}\right)^{3\Delta} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{25}\sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}} + \frac{4}{25\Delta}\sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}} + \frac{3}{5\Delta}}$$

要想证明(2)式, 只需证明

$$\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{25}\sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}} + \frac{4}{25\Delta}\sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}} + \frac{3}{5\Delta}}$$

即证

$$\frac{4}{25} \sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}} + \frac{8}{25\Delta} \sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}} + \frac{6}{5\Delta} \leq 1$$

上式显然成立, 于是(2)式成立, 同理可证明(3)式成立.

由于当 $x \in (0, \frac{1}{10})$, $y \geq 0$ 时, $(1-x)^y \geq e^{-2xy}$, 因此有

$$\frac{1}{5\Delta^2} \left(1 - \frac{1}{50\Delta} \sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}}\right)^{4d\Delta} \left(1 - \frac{1}{25\Delta} \sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}}\right)^{4\Delta} \left(1 - \frac{1}{5\Delta^2}\right)^{2\Delta^2} \geq e^{-\ln 5\Delta^2} \cdot e^{-\frac{4d}{25}\sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}}} \cdot e^{-\frac{8}{25}\sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}}} \cdot e^{-\frac{4}{5}} = e^{-\ln 5\Delta^2 - \frac{4}{5} - \frac{4d}{25}\sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}} - \frac{8}{25}\sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}}}$$

下面证明(4)式, 只需证明

$$\frac{100}{99}e^{-\frac{1}{5}d\sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}}} \leq e^{-\ln 5\Delta^2 - \frac{4}{5} - \frac{4d}{25}\sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}} - \frac{8}{25}\sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}}}$$

即证

$$\ln \frac{100}{99} - \frac{1}{5}d\sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}} \leq -\ln 5\Delta^2 - \frac{4}{5} - \frac{4d}{25}\sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}} - \frac{8}{25}\sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}} \quad (5)$$

(5)式等价于

$$\frac{1}{25}d\sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}} \geq \ln \frac{100}{99} + \ln 5 + 2\ln\Delta + \frac{4}{5} + \frac{8}{25} \cdot \frac{1}{75}$$

由于 $\delta \geq 75\sqrt{\Delta \ln\Delta}$, 于是 $\frac{1}{25}d\sqrt{\frac{\ln\Delta}{\Delta}} \geq 3\ln\Delta$, 因此只需证明

$$\ln\Delta \geq \ln \frac{100}{99} + \ln 5 + \frac{4}{5} + \frac{8}{25} \cdot \frac{1}{75} \quad (6)$$

当 $\Delta \geq 13$ 时, (6)式显然成立, 故(4)式成立, 因此有

$$\chi_{at}^v(G) \leq \Delta + 2 + \sqrt{\Delta \ln\Delta}$$

参考文献:

- [1] 张忠辅, 陈祥恩, 李敬文, 等. 关于图的邻点可区别全染色 [J]. 中国科学(数学), 2004, 34(5): 574—583.
- [2] ALON N, SUDAKOV B, ZAKS A. Acyclic Edge Colorings of Graphs [J]. Journal of Graph Theory, 2001, 37(3): 157—167.
- [3] HATAMI H. $\Delta+300$ is a Bound on the Adjacent Vertex Distinguishing Edge Chromatic Number [J]. Journal of Combinatorial Theory, 2006, 95(2): 246—256.
- [4] 刘秀丽. 若干 Mycielski 图的邻点可区别 V -全染色 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(12): 12—16.

[5] 李沐春, 王双莉, 张伟东, 等. 若干路的冠图的邻点可区别 V-全染色 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(6): 97—99.

[6] 李沐春, 张忠辅. 一类多重联图的邻点可区别 E-全染色 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2010, 26(1): 36—41.

[7] 刘信生, 王志强, 苏旺辉. 图的邻点可区别 VI-全色数的一个上界 [J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2011, 47(6): 81—83.

[8] BONDY B A, MURTY U S R. Graph Theory [M]. New York: Springer, 2008.

[9] VIZING V. Some Unsolved Problems in Graph Theroy [J]. Russian Mathematics Surveys, 1968, 23(6): 125—141.

[10] ALON N, SPENCER J. The Probabilistic Method [M]. New York: John Wiley and Sons, 1992.

[11] MICHACL M, REED B. Graph Coloring and the Probabilistic Method [M]. New York: Springer, 2002.

An Upper Bound for the Adjacent Vertex Distinguishing V-Total Chromatic Number of Graphs

HUANG Li-na, LI Mu-chun, LIU Hai-zhong
College of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China

Abstract: We prove the adjacent vertex distinguishing V-total chromatic number is at most $\Delta+2+\sqrt{\Delta\ln\Delta}$, by using Lovász local lemma in probability method for any graph with $\delta \geqslant 75\sqrt{\Delta\ln\Delta}$.

Key words: Lovász local lemma; adjacent vertex distinguishing V-total chromatic number; upper bound

责任编辑 夏 娟
廖 坤

