第 39 卷第 12 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2017年12月
Vol. 39　No. 12　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Dec.　2017

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2017.12.013

Rees 矩阵定理的简明刻画①

贾弯弯，　王正攀

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 完全 0-单半群的 Rees 矩阵表示定理通常用三元组表述，在 1977 年 Clifford 和 Petrich 使用的二元组表示的基础上，给出了该定理的一个较为简洁的处理.

关　键　词： 完全 0-单半群；Rees 定理；同构

中图分类号：O152.7　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673-9868(2017)12-0086-04

我们知道，每个完全 0-单半群都同构于一个 $I\times\Lambda$ Rees 矩阵半群 $\mathscr{M}^0[G;I,\Lambda;P]$[1]. 而 $I\times\Lambda$ 自然可以作成一个矩形带，本文引用文献[2]和文献[3]中关于完全单半群的记法，给出了关于完全 0-单半群的 Rees 矩阵定理的一个简明刻画. 文中未介绍的符号及记号请读者参见文献[1].

令 S 为一个半群.

引理 1[1]　若 $a,b\in S$，$(a,b)\in\mathbb{R}$，且 $s,s'\in S^1$ 满足 $as=b$，$bs'=a$，则右平移 $\rho_s|_{L_a}$，$\rho_{s'}|_{L_b}$ 是分别从 L_a 到 L_b 和 L_b 到 L_a 的保持 $\mathbb{R}$-类的互逆双射.

引理 2[1]　若 $a,b\in S$，$(a,b)\in\mathscr{L}$，且 $t,t'\in S^1$ 满足 $ta=b$，$t'b=a$，则左平移 $\lambda_t|_{R_a}$，$\lambda_{t'}|_{R_b}$ 是分别从 R_a 到 R_b 和 R_b 到 R_a 的保持 $\mathscr{L}$-类的互逆双射.

引理 3[1]　若 $a,b\in S$，且 $(a,b)\in\mathscr{D}$，则 $ab\in R_a\cap L_b$ 当且仅当 $L_a\cap R_b$ 含有一个幂等元.

引理 4[1]　每个 $I\times\Lambda$ Rees 矩阵半群 $\mathscr{M}^0[G;I,\Lambda;P]$ 是完全 0-单半群.

引理 5[1]　在 S 的正则 $\mathscr{D}$-类中，每个 $\mathscr{L}$-类和 $\mathbb{R}$-类含有幂等元.

引理 6[1]　每个矩形带都同构于笛卡尔积 $I\times\Lambda$ 上乘法如下定义的半群：

$$(i,\lambda)(j,\mu)=(i,\mu),\ (i,\lambda),(j,\mu)\in I\times\Lambda$$

引理 7　令 B 为半群 S 的一个 $\mathscr{D}$-类中 $\mathscr{H}$ 关系的代表元形成的集合. 在 B 上定义乘法运算

$$a*b=x\in R_a\cap L_b\cap B\qquad a,b\in B$$

则 $(B,*)$ 形成一个矩形带.

证　首先，上述乘法定义合理. 又因为

$$(a*b)*c\in R_a\cap L_c,\ a*(b*c)\in R_a\cap L_c,\ a*b*a\in R_a\cap L_a=H_a$$

所以 $(B,*)$ 形成一个矩形带.

令 G 是单位元为 e 的群，B 是一个矩形带，其中矩形带中每一个元素 a 都对应着 0-群 G^0 中的一个元

---

① 收稿日期：2016-12-29

基金项目：中央高校基本科研业务费专项资金资助(XDJK2016B038).

作者简介：贾弯弯(1993-)，女，河北邢台人，硕士研究生，主要从事半群及其组合应用的研究.

通信作者：王正攀，博士，教授.

素 p_a，称该对应为夹心矩阵，简记为 $P=(p_a)_{a\in B}$. 若对 $\forall a\in B$，$\exists b\in B$，使得 $p_{ab}\neq 0$，对 $\forall a\in B$，$\exists c\in B$，使得 $p_{ca}\neq 0$，则称 P 是正则的. 令

$$T=(B\times G)\cup\{0\}$$

定义 T 上的乘法运算：

$$(a,g)(b,h)=\begin{cases}(ab,gp_{ba}h) & p_{ba}\neq 0\\ 0 & p_{ba}=0\end{cases}\tag{1}$$

$$(a,g)0=0(a,g)=00=0\tag{2}$$

引理 8　上述 T 是一个完全 0-单半群.

证　设 B 同构于笛卡尔积 $I\times\Lambda$ 按引理 6 做成的矩形带，改记夹心矩阵 P 中的元素 p_a 为 $p_{\lambda i}$，其中 $a=(i,\lambda)\in B$，则 $P=(p_a)_{a\in B}$ 的正则性保证了 $P=(p_{\lambda i})$ 的正则性. 定义映射

$$\psi: T\longrightarrow(I\times G\times\Lambda)\cup\{0\}$$

如下：

$$(a,g)\psi=(i,g,\lambda),\ 0\psi=0$$

显然 ψ 为双射，下证 ψ 为同态映射. 任取 $x,y\in T$，若 x,y 中有零元，则显然有

$$(xy)\psi=(x\psi)(y\psi)$$

现令

$$x=(a,g)\qquad y=(b,h)$$

若

$$p_{ba}=0$$

则有

$$p_{\lambda j}=0$$

那么

$$[(a,g)(b,h)]\psi=0$$

且

$$[(a,g)\psi][(b,h)\psi]=(i,g,\lambda)(j,h,\mu)=0$$

否则，

$$[(a,g)(b,h)]\psi=(ab,gp_{ba}h)\psi=(i,gp_{\lambda j}h,\mu)=$$
$$(i,g,\lambda)(j,h,\mu)=[(a,g)\psi][(b,h)\psi]$$

所以 ψ 为 T 到 $(I\times G\times\Lambda)\cup\{0\}$ 的同构映射，由引理 4，T 为完全 0-单半群.

1　主要结论

定理 1　令 G^0 是一个 0-群，B 是一个矩形带，其中矩形带中每一个元素 a 都对应着 G^0 中元素 p_a，设 $P=(p_a)_{a\in B}$ 是正则的，

$$S=(B\times G)\cup\{0\}$$

且定义 S 上的乘法如(1)式与(2)式. 则 S 是一个完全 0-单半群.

反过来，每一个完全 0-单半群均可如此构造.

证　据引理 8，定理前半部分已经证明，为了证明定理的后半部分，令 S 是含有本原幂等元 e 的完全 0-单半群. 我们有

引理 9[1]　$R_e=eS\backslash\{0\}$.

引理 10　$L_e=Se\backslash\{0\}$.

引理 11　S 只有两个 $\mathscr{D}$-类，分别是 $\{0\}$ 和 $D=S\backslash\{0\}$，且 S 是正则的.

证　设 $a \neq 0$，因为 S 是 0-单半群，所以 $(a, e) \in \mathscr{J}$，因此存在 $x, y \in S$ 使得

$$a = xey = (xe)(ey)$$

据引理 9 和 10，$(e, xe) \in \mathscr{L}$，$(e, ey) \in \mathbb{R}$，据引理 3，$(xe)(ey) \in R_{xe} \cap L_{ey}$，所以 $(a, e) \in \mathscr{D}$，也即 $S \backslash \{0\}$ 是一个 $\mathscr{D}$-类.

因为 $D = S \backslash \{0\}$ 含有幂等元 e，所以 D 是正则的，因此 S 是正则的.

顺便指出，文献[1]是在下述两个引理的基础上证明 S 的正则性的，而在下述两个引理中，如果没有 S 的正则性，那么 $a \in aS$ 或 $a \in Sa$ 并不显然.

引理 12[1]　对于每个 $0 \neq a \in S$，$R_a = aS \backslash \{0\}$.

引理 13[1]　对于每个 $0 \neq a \in S$，$L_a = Sa \backslash \{0\}$.

令

$$G = H_e$$

B 为 $S \backslash \{0\}$，按引理 7 的方式构造矩形带，并约定 H_e 中的代表元选为 e. 对任意 $a \in B$，定义

$$p_a = (e * a)(a * e)$$

当 $p_a \neq 0$ 时，据引理 12 和 13 有

$$p_a \in R_e \cap L_e \tag{3}$$

因此，矩形带 B 中每一个元素 a 都对应着 0-群 $H_e{}^0$ 中的一个元素 p_a. 据引理 3，(3) 式成立当且仅当 H_a 中含有一个幂等元. 据引理 5，$D = S \backslash \{0\}$ 中每一个 $\mathscr{L}$-类和 $\mathbb{R}$-类至少含有一个幂等元，因此 $P = (p_a)_{a \in B}$ 是正则的. 据引理 8，$(B \times G) \cup \{0\}$ 形成完全 0-单半群. 定义映射

$$\phi: (B \times G) \cup \{0\} \longrightarrow S$$

如下：

$$(a, g)\phi = (a * e)g(e * a) \qquad 0\phi = 0$$

因为

$$e\mathscr{L}(a * e)$$

所以

$$(a * e)e = a * e$$

据引理 2，$g \longmapsto (a * e)g$ 是 H_e 到 H_{a*e} 的双射. 类似地，因为

$$e\mathbb{R}(e * a)$$

所以

$$e(e * a) = e * a$$

据引理 1，$h \longmapsto h(e * a)$ 是 H_{a*e} 到 H_a 的双射，所以 ϕ 是双射.

以下验证 ϕ 是同态映射：任取 $x, y \in (B \times G) \cup \{0\}$，若 x, y 中有零元，则显然有

$$(xy)\phi = (x\phi)(y\phi)$$

现令

$$x = (a, g) \qquad y = (b, h)$$

若

$$p_{b*a} = 0$$

即

$$(e * a)(b * e) = 0$$

则有

$$(xy)\phi = 0$$

且

$$(x\phi)(y\phi)=[(a*e)g(e*a)][(b*e)h(e*b)]=0$$

否则,

$$(xy)\phi=(a*b,\ gp_{b*a}h)\phi=(a*e)gp_{b*a}h(e*b)=$$
$$[(a*e)g(e*a)][(b*e)h(e*b)]=[(a,\ g)\phi][((b,\ h)\phi]$$

综上, ϕ 是从 $(B\times G)\cup\{0\}$ 到 S 的同构映射.

参考文献:

[1] HOWIE J M. Fundamentals of Semigroup Theory [M]. Clarendon Press: Oxford, 1995: 7-73.

[2] CLIFFORD A H, PETRICH M. Some Classes of Completely Regular Semigroups [J]. Journal of Algebra, 1977, 46(2): 462-480.

[3] SONG G T, LIU G X, ZHANG J G. A Construction of Cryptogroups [J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2007, 23(5): 789-798.

[4] 王正攀, 潘慧兰, 冷　静. 正则密码群并半群的两个等价刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2013, 35(10): 60-62.

A Simpler Description of the Rees Theorem

JIA Wan-wan,　WANG Zheng-pan

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Generally, the Rees matrix representation theorem for completely 0-simple semigroups is presented by using triples. In this paper, we give a simpler description of the theorem by using 2-tuples as Clifford and Petrich did in 1977.

Key words: completely 0-simple semigroup; Rees theorem; isomorphism

责任编辑　包　颖

崔玉洁