

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2017.12.025

# 各向异性杆扭转问题的一种数值方法<sup>①</sup>

李善倾, 袁 鸿

暨南大学 力学与建筑工程学院, 应用力学研究所,  
重大工程灾害与控制教育部重点实验室, 广州 510632

**摘要:** 将  $R$ -函数理论用于分析具有任意形状截面的各向异性杆弹性扭转问题. 首先引入坐标变换将扭转问题的应力函数方程化成拉普拉斯算子方程, 再利用拉普拉斯算子的基本解、边界方程及  $R$ -函数构造一个准 Green 函数, 其满足了齐次边界条件. 后再应用 Green 公式将各向异性杆弹性扭转问题的拉普拉斯算子方程转化为积分方程, 应用  $R$ -函数理论选择适当的边界方程来消除积分方程的奇异性. 数值算例表明, 此方法是一种有效的数值方法.

**关键词:**  $R$ -函数; Green 函数; 积分方程; 各向异性杆; 扭转问题

**中图分类号:** O343.8      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1673-9868(2017)12-0179-06

弹性扭转是弹性理论中最重要的空间问题之一, 目前只是对一些简单的边界形状, 如椭圆、等边三角形、矩形和扇形等可求出解析解, 对于其他形状, 难以找到解析解, 因此只能用数值解法.

$R$ -函数理论可以构造隐函数表示一个复杂形体.  $R$ -函数理论描述一个复杂区域的  $\omega_0$ . 可由各个子域通过布尔操作  $\vee_*$ 、 $\wedge_*$  来实现, 其相对应为求并集  $\cup$  与求交集  $\cap$ , 描述各子域的函数  $\omega_l$  满足一阶规范化方程, 则  $\omega_0$  也会满足一阶规范化方程.

应用 Rvachev<sup>[1]</sup> 提出的  $R$ -函数理论构造的拉普拉斯算子的准 Green 函数方法<sup>[2-5,8-9]</sup> 适用于分析具有任意形状截面的各向异性杆弹性扭转问题<sup>[6-7]</sup>, 而传统的 Green 函数方法只适用于极其简单的边界形状(如圆、球)边值问题, 应用此方法, 袁鸿等已成功求解了薄板、扁球壳的几个问题<sup>[2-9]</sup>.  $R$ -函数理论方法是一种值得研究的数值方法, 与有限元法<sup>[10-11]</sup> 相比,  $R$ -函数理论方法在解决的数值问题方面, 对整个积分区域划分单元网格更少, 前处理工作量相对小很多, 收敛速度快, 计算量小, 可求得很高精度的结果, 由此证明了此方法的正确性.

## 1 基本方程

在扭矩  $M_t$  作用下, 弹性扭转问题可以采用应力函数  $\varphi$  描述为<sup>[12]</sup>

$$S_{44} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2S_{45} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + S_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2\theta \quad (1)$$

式中  $S_{44}$ ,  $S_{45}$  和  $S_{55}$  为材料的柔度系数,  $\theta$  为杆轴向单位长度扭转角. 当  $S_{44} = S_{55}$ ,  $S_{45} = 0$  时, 即为各向同性杆的弹性扭转问题.

① 收稿日期: 2016-11-27

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(11402099); 广州市科技计划项目(201510010013).

作者简介: 李善倾(1982-), 男, 广西河池人, 副教授, 博士, 主要从事板壳力学及数值方法研究.

杆横截面上的剪应力分量与应力函数的关系为

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2)$$

边界条件为

$$\varphi|_r = 0 \quad (3)$$

$$2 \iint \varphi dx dy = M_t \quad (4)$$

引入坐标变换:

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = a_1 x + a_2 y \quad (5)$$

式中

$$a_1 = \frac{S_{45}}{\sqrt{S_{44}S_{55} - S_{45}^2}}$$

$$a_2 = \frac{S_{44}}{\sqrt{S_{44}S_{55} - S_{45}^2}}$$

引入坐标变换后, 且

$$\varphi = \theta \bar{\varphi}(x, y)$$

式(1) 化为

$$\nabla^2 \bar{\varphi} = -\frac{2}{S_{44}} \quad (6)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

引入坐标变换后, 应力分量与应力函数的关系为

$$\tau_{zx} = a_2 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \theta, \quad \tau_{zy} = -\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + a_1 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}\right) \theta \quad (7)$$

引入坐标变换后, 边界条件为

$$\bar{\varphi}|_r = 0 \quad (8)$$

$$\frac{2}{a_2} \iint \bar{\varphi} dx dy = \frac{M_t}{\theta} \quad (9)$$

式中  $c_t = \frac{2}{a_2} \iint \bar{\varphi} dx dy$  为扭转刚度.

## 2 积分方程的推导

构造 Laplace 算子的准 Green 函数  $G(x, \xi)$  如文献[2-5], 且  $G(x, \xi)$  满足条件

$$G(x, \xi)|_{\xi \in \partial\Omega} = 0 \quad (10)$$

为了将边值问题(6) 和边值问题(8) 化为积分方程, 应用  $C^2(\Omega)$  函数类的 Green 公式, 对所有的  $U, V \in C^2(\Omega \cup \Gamma)$  有

$$\int_{\Omega} (V \nabla^2 U - U \nabla^2 V) d\xi \Omega = \int_{\Gamma} (V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n}) d\xi \Gamma \quad (11)$$

用  $\bar{\varphi}$  和准 Green 函数  $G$  分别代替式(11) 中的  $U, V$ , 并注意到  $(\frac{1}{2\pi}) \ln r$  是 Laplace 算子的基本解, 则利用式

(6)、式(8) 和式(11) 可得

$$\bar{\varphi}(x) = -\frac{2}{S_{44}} \int_{\Omega} G(x, \xi) d_{\xi} \Omega + \int_{\Omega} \bar{\varphi}(\xi) K(x, \xi) d_{\xi} \Omega \quad (12)$$

积分核  $K(x, \xi)$  采用文献[2-5] 中的表达式, 积分核的奇异性采用文献[2-5] 的处理方法, 保证积分核  $K(x, \xi)$  的连续性.

### 3 剪应力分量的求解

对表达式(12) 求导数, 得:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}(x)}{\partial x} = -\frac{2}{S_{44}} \int_{\Omega} \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} d_{\xi} \Omega + \int_{\Omega} \bar{\varphi}(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} d_{\xi} \Omega \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}(x)}{\partial y} = -\frac{2}{S_{44}} \int_{\Omega} \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial y} d_{\xi} \Omega + \int_{\Omega} \bar{\varphi}(\xi) \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial y} d_{\xi} \Omega \quad (14)$$

将式(13) 和式(14) 代入式(7) 可求得杆横截面上的剪应力分量.

离散化积分方程(12) 可解得应力函数  $\bar{\varphi}(x_i)$ , 代入式(9) 可求得扭转刚度. 对积分方程式(13) 和式(14) 进行离散化, 并代入式(7) 可求得杆横截面上的剪应力分量.

### 4 数值算例

**例 1** 一根长度为  $l$  的正交各向异性矩形截面杆如图 1, 截面边长分别为  $2a$  和  $2b$ , 其弹性对称平面分别与杆的侧面和截面平行, 主剪切模量为  $G_{23}$ 、 $G_{13}$ ; 杆一端固定, 另一端作用一绕  $z$  轴的力矩  $M_t$  (数据已无量纲化). 其中

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}} \quad S_{55} = \frac{1}{G_{13}} \quad S_{45} = 0$$

设:  $\lambda = \frac{2b}{2a}$ ,  $\mu = \sqrt{\frac{S_{44}}{S_{55}}} = \sqrt{\frac{G_{13}}{G_{23}}}$ ,  $\delta = \frac{\lambda}{\mu}$ , 扭转刚度为  $c_t = 16G_{23}ba^3\chi$ , 引入坐标变换后, 矩形截面如图 2.

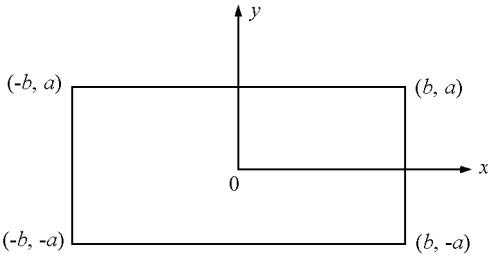


图 1 矩形截面

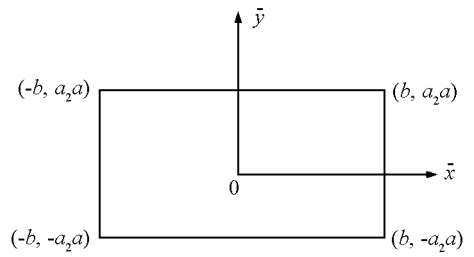


图 2 坐标变换后矩形截面

根据  $R$ -函数理论<sup>[12]</sup>, 可以取

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

式中,

$$\omega_1 = \frac{1}{2b}(b^2 - \bar{x}^2) \geq 0$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2a_2a}(a_2^2a^2 - \bar{y}^2) \geq 0$$

则  $\omega_0 = 0$  是矩形截面边界的一阶规范化方程,  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 0$  分别表示矩形截面的各个边. 使用 9 种矩形网格计算得  $\delta = 1.00$  时的扭转刚度系数  $\chi$  的收敛情况列于表 1 中, 并用  $21 \times 21$  矩形网格计算得不同  $\delta$  值的扭转刚度系数  $\chi$  列于表 2 中, 并与文献[12] 的三角级数解的结果进行了对比.

表 1  $\delta = 1.00$  的扭转刚度系数  $\chi$

|        | 本文方法           | $\chi$    | 误差( $e_r$ )/% |
|--------|----------------|-----------|---------------|
| 本文方法   | $5 \times 5$   | 0.143 318 | 1.644         |
|        | $7 \times 7$   | 0.142 560 | 1.106         |
|        | $9 \times 9$   | 0.142 117 | 0.792         |
|        | $11 \times 11$ | 0.141 801 | 0.568         |
|        | $13 \times 13$ | 0.141 572 | 0.406         |
|        | $15 \times 15$ | 0.141 399 | 0.283         |
|        | $17 \times 17$ | 0.141 266 | 0.189         |
|        | $19 \times 19$ | 0.141 161 | 0.114         |
|        | $21 \times 21$ | 0.141 077 | 0.055         |
| 文献[12] |                | 0.141 000 | —             |

表 2 矩形截面杆扭转刚度系数  $\chi$

| $\delta$ | 本文方法      | 文献[12] | 误差 $e_r$ / % |
|----------|-----------|--------|--------------|
| 1.00     | 0.141 077 | 0.141  | 0.055        |
| 1.25     | 0.172 357 | 0.172  | 0.208        |
| 1.50     | 0.196 512 | 0.196  | 0.261        |
| 1.75     | 0.215 151 | 0.214  | 0.538        |
| 2.00     | 0.229 733 | 0.229  | 0.320        |
| 2.50     | 0.250 842 | 0.249  | 0.740        |
| 3.00     | 0.265 397 | 0.263  | 0.911        |
| 4.00     | 0.284 706 | 0.281  | 1.319        |
| 5.00     | 0.297 877 | 0.291  | 2.363        |

**例 2** 一根长度为  $l$  的十字形截面弹性杆, 截面尺寸  $a = 2.0, b = 2.5, \frac{c}{d} = \frac{4}{5}$ , 分别取  $c$  为 1.6, 1.2, 0.8, 0.4; 如图 3 所示, 主剪切模量为  $G_{23}, G_{13}$ ; 杆一端固定, 另一端作用一绕  $z$  轴的力矩  $M_t$  (数据已无量纲化)。

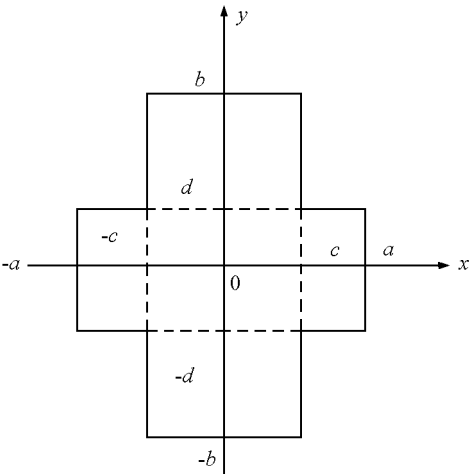


图 3 十字形截面

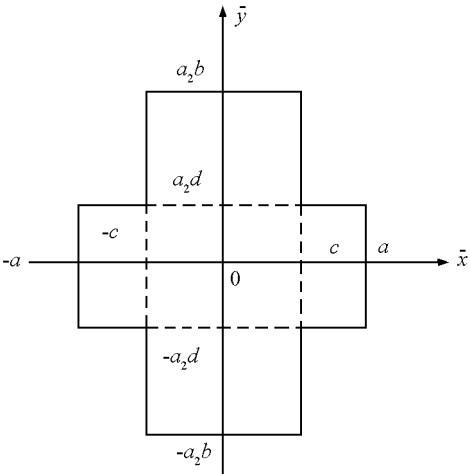


图 4 坐标变换后十字形截面

其它参数取值如同例 1, 引入坐标变换后如图 4。

根据  $R$ -函数理论<sup>[1]</sup>, 可以取

$$\omega_0 = (\omega_1 \wedge_0 \omega_2) \wedge_0 (\omega_3 \vee_0 \omega_4)$$

式中,

$$\begin{aligned}\omega_1 &= (a^2 - \overline{x^2})/2a \geq 0 & \omega_2 &= (a_2^2 b^2 - \overline{y^2})/2a_2 b \geq 0 \\ \omega_3 &= (c^2 - \overline{x^2})/2c \geq 0 & \omega_4 &= (a_2^2 d^2 - \overline{y^2})/2a_2 d \geq 0\end{aligned}$$

计算得  $y=0$  上的无量纲剪应力  $\beta_{zy} = \tau_{zy} / \left[ \frac{M_t}{2a(2b)^2} \right]$  和曲线如图 5. 当  $c=0.8$ , 并与 ANSYS 有限元法的计算结果进行了比较(图 6). 从例 1—2 的  $\beta_{zy}$  结果比较, 可知  $R$ -函数理论采用子域数远少于 ANSYS 有限元法, 理论计算量小了很多,  $\beta_{zy}$  收敛速度快, 这正是本文方法的优越性.

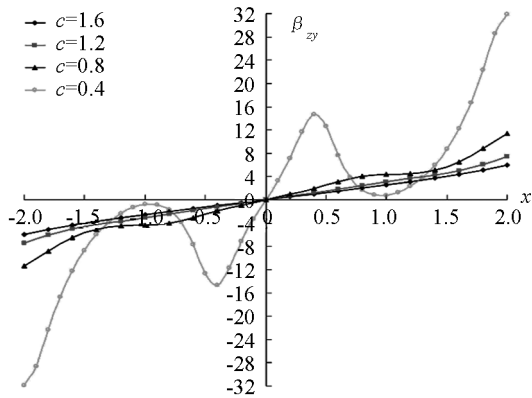


图 5  $c$  取不同值时  $y=0$  上  $\beta_{zy}$  的曲线

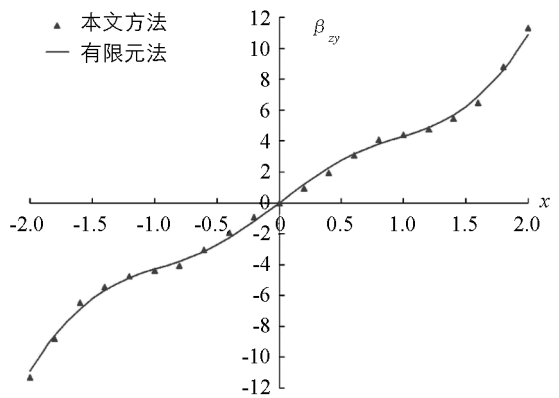


图 6 两种方法求  $y=0$  上  $\beta_{zy}$  的曲线

## 5 结 论

本文将  $R$ -函数理论用于分析具有任意形状截面的各向异性杆弹性扭转问题, 通过计算结果与文献 [12] 的三角级数解及 ANSYS 有限元法的结果进行了比较, 证明本文方法是正确的.  $R$ -函数理论方法是一种在解决边值问题中很有用的函数, 有待进一步开拓其交叉学科领域的应用.  $R$ -函数理论在描述复杂积分区域方面很有效, 可结合变分法等<sup>[13–16]</sup> 数值方法解决具有复杂边界条件的边值问题, 丰富数值解法.

## 参考文献:

[1] RVACHEV V L. Theory of R-Function and Some of Its Application [M]. Kiev: Nauk Dumka, 1982: 415–421.

[2] 袁 鸿, 李善倾, 刘人怀. Pasternak 地基上简支板振动问题的准格林函数方法 [J]. 应用数学和力学, 2007, 28(7): 757–762.

[3] 李善倾, 袁 鸿. 简支梯形底扁球壳自由振动问题的准 Green 函数方法 [J]. 应用数学和力学, 2010, 31(5): 602–608.

[4] LI S Q, YUAN H. Green Quasifunction Method for Free Vibration of Simply-Supported Trapezoidal Shallow Spherical Shell on Winkler Foundation [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2010, 23(4): 370–376.

[5] 李善倾, 袁 鸿, 薛兴伟. 简支梯形底扁球壳弯曲问题的准格林函数方法 [J]. 计算力学学报, 2011, 28(2): 270–273.

[6] 王光建, 全勇军. 精密齿轮减速器扭转刚度的精确计算 [J]. 重庆理工大学学报(自然科学版), 2015, 29(10): 34–38.

[7] 张楠桢, 唐 豪. 叶片扭转角度对微型离心风机性能的影响 [J]. 重庆理工大学学报(自然科学版), 2016, 30(9): 49–54.

[8] 李善倾, 袁 鸿. Winkler 地基上固支薄板自由振动问题的准 Green 函数方法 [J]. 应用数学和力学, 2011, 32(3): 253–262.

[9] LI S Q, YUAN H. Green Quasifunction Method for Free Vibration of Clamped Thin Plates [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2012, 25(1): 37–45.

[10] 牛 坡, 杨 玲, 张引航, 等. 基于 ANSYS Workbench 的微耕机用旋耕弯刀有限元分析 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(12): 162–167.

[11] 代 荣, 代 帅. 手推车轮脚叉形臂有限元分析及优化设计 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(8): 182–185.

[12] 罗祖道, 李思简. 各向异性材料力学 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1994.

[13] ORTNER V N. Regularisierte Faltung Von Distributionen. Teil 2: Eine Tabelle Von Fundamen-Tallocunngen [J]. ZAMP, 1980, 31(1): 155–173.

- [14] BRESLAVSKY I D, AVRAMOV K V. Nonlinear Modes of Cylindrical Panels with Complex Boundaries: R-Function Method [J]. *Meccanica*, 2011, 46(4): 817—832.
- [15] AWREJCEWICZ J, KURPA L, OSETROV A. Investigation of the Stress-Strain State of the Laminated Shallow Shells by R-Functions Method Combined with Spline-Approximation [J]. *ZAMM*, 2011, 91(6): 458—467.
- [16] PILGUN G, AMABILI M. Non-Linear Vibrations of Shallow Circular Cylindrical Panels with Complex Geometry: Meshless Discretization with the R-Functions Method [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, 47(3): 137—152.

## A Numerical Method for the Torsion Problem of Anisotropic Bar

LI Shan-qing, YUAN Hong

*MOE Key Laboratory of Disaster Forecast and Control in Engineering, Institute of Applied Mechanics,  
School of Mechanics and Construction Engineering, Jinan University, Guangzhou 510632, China*

**Abstract:** In this paper, the  $R$ -function theory is applied to solve the torsion problem of anisotropic bar with arbitrary shape cross section. Firstly, the stress function equation of the problem is transformed into the Laplace operator equation through coordinate transformation. Then, the fundamental solution of the Laplace operator, the boundary equation and the  $R$ -function are used to construct the quasi-Green's function, which satisfies the homogeneous boundary condition of the problem. Finally, the Laplace operator differential equation of the problem is reduced to the Fredholm integral equation of the second kind by Green's formula. The singularity of the kernel of the integral equation is overcome by choosing a suitable form of the normalized boundary equation by the  $R$ -function. Numerical examples show that this method is an effective numerical method.

**Key words:**  $R$ -function; Green's function; integral equation; anisotropic bar; torsion problem

责任编辑 汤振金

