DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.01.012

类 Kuramoto-Sivashinsky 方程的输出反馈边界控制①

廖钰靓[1], 赵圣涛[2], 谢成康[2]

1. 西南大学 荣昌校区, 重庆 荣昌 402460; 2. 西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 考虑类 Kuramoto-Sivashinsky 的边界控制及镇定. 结合降阶法和后推法设计控制器和观测器. 最后证明了闭环系统的指数稳定性.

关 键 词: 类 Kuramoto-Sivashinsky 方程; 边界控制; 抛物型偏微分方程; 输出反馈

中图分类号: O175.8 **文献标志码**: A **文章编号**: 1673-9868(2018)01-0077-07

Kuramoto-Sivashinsky(S-K)方程起源于 Kuramot 建立的关于反应扩散系统中相湍流现象模型[1]和 Sivashinsky 建立的飞机火焰传播模型[2]. S-K 方程的边界控制在工程中具有很强的实用价值. 然而, 即使是线性化的 S-K 方程, 其边界控制设计也较为困难, 所获得的结果较少.

近来, 通过后推法, 一类一维二阶抛物型偏微分方程的边界控制器和观测器的设计取得了进展[3-4]. 因此, 在本文中, 我们考虑采用后推法来考虑一四阶抛物型偏微分方程, 即类 S-K 的输出反馈边界控制. 该方程的性质类似于线性 S-K 方程, 在某些情况下会出现不稳定性[5], 因此, 控制是必要的. 在本文中, 我们考虑执行器和传感器在不同位置的情况的输出反馈边界控制, 通过结合采用降阶法[6]和后推方法[3-4,7]来设计控制器和观测器.

1 模 型

称方程:

$$u_t(x,t)+\delta u_{xxxx}(x,t)-\lambda u_{xx}(x,t)+u_x(x,t)u(x,t)=0 \qquad 0<x<1,\ t>0$$

为 S-K 方程, 其中 δ 是正常数, λ 是任意常数. 去掉 S-K 方程中的 $u_x(x,t)u(x,t)$ 项, 把 S-K 方程线性化后, 再添上项, 得到一个类 S-K 方程:

$$u_t(x,t)-\mu u_{txx}(x,t)=\lambda u_{xx}(x,t)-\delta u_{xxxx}(x,t) \qquad 0<x<1,\ t>0$$

其中 μ 是正常数. 当 μ 足够小时, 该方程和线性化的 S-K 方程几乎有相同的性质; 当 $\frac{\lambda}{\mu}$ 为正数, 且足够大时, 方程不稳定. 本文考虑不稳定情况下, 边界控制系统的稳定问题, 即考虑类 S-K 方程的如下控制系统:

$$u_t(x,t)-\mu u_{txx}(x,t)=\lambda u_{xx}(x,t)-\delta u_{xxxx}(x,t) \qquad 0<x<1,\ t>0 \tag{1}$$

$$u_x(0,t)=0 \qquad t\geqslant 0 \tag{2}$$

---

① 收稿日期: 2016-09-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(11671326).

作者简介: 廖钰靓(1981-), 女, 重庆潼南人, 讲师, 硕士, 主要从事数理统计研究.

通信作者: 谢成康, 教授.

$$u_{xxx}(0, t)=0 \qquad t \geqslant 0 \tag{3}$$

$$u(1, t)=U_1(t) \qquad t \geqslant 0 \tag{4}$$

$$u_{xx}(1, t)=U_2(t) \qquad t \geqslant 0 \tag{5}$$

其中:$U_1(t)$ 和 $U_2(t)$ 是控制输入,$\frac{\lambda}{\mu}$ 是足够大的正数. 当输入为零时,信号 $u(x, t)$ 是不稳定的,我们的目标是在 L_2 范数意义下实现 $u(x; t)$ 的指数稳定.

为设计出两个控制器,我们引入一个新的变量关系

$$w(x, t)=\mu u_{xx}(x, t)-u(x, t) \tag{6}$$

从(2),(3) 和(6) 式,得到新的边界条件

$$w_x(0, t)=0 \tag{7}$$

视(6) 式为关于 $u(x, t)$ 的 ODE 方程,并注意到边界条件(2),解方程得到

$$u(x, t)=u(0, t)\cosh\frac{x}{\sqrt{\mu}}+\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^x w(y, t)\sinh\frac{x-y}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}y \tag{8}$$

在(8) 式中,令 $x=1$,并利用(4) 式,$u(0, t)$ 可以表示为

$$u(0, t)=\frac{1}{\cosh\frac{1}{\sqrt{\mu}}}\left[U_1(t)-\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^1 w(y, t)\sinh\frac{1-y}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}y\right] \tag{9}$$

引入常数:

$$\alpha=\frac{\delta}{\mu} \qquad \beta=\frac{\delta}{\mu^2}-\frac{\lambda}{\mu}$$

对(6) 式关于 t 求一阶导数,关于 x 求二阶导数,得到一个关于 $w(x, t)$ 的偏微分方程:

$$w_t(x, t)=\alpha w_{xx}(x, t)+\beta w(x, t)+\beta u(x, t) \tag{10}$$

因此,系统(1)-(5) 化为如下新系统:

$$w_t(x, t)=\alpha w_{xx}(x, t)+\beta w(x, t)+\beta\frac{\cosh\frac{x}{\sqrt{\mu}}}{\cosh\frac{1}{\sqrt{\mu}}}\left[U_1(t)-\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^1 w(y, t)\sinh\frac{1-y}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}y\right]+$$

$$\frac{\beta}{\sqrt{\mu}}\int_0^x w(y, t)\sinh\frac{x-y}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}y \qquad 0<x<1, t>0 \tag{11}$$

$$w_x(0, t)=0 \qquad t \geqslant 0 \tag{12}$$

$$w(1, t)=\mu U_2(t)-U_1(t) \qquad t \geqslant 0 \tag{13}$$

2 状态反馈控制

对于系统(11)-(13),为了采用后推设计,我们需要使偏微分方程满足“严格反馈”的形式. 为此,需要消除(11)-(13) 中的积分项. 所以设计出第一个状态反馈控制器 $U_1(t)$:

$$U_1(t)=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^1 w(y, t)\sinh\frac{1-y}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}y \tag{14}$$

将(9) 和(14) 式带入(8) 式得

$$u(x, t)=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^x w(y, t)\sinh\frac{x-y}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}y \tag{15}$$

这就意味着在状态反馈控制器(14) 的作用下,如果系统(11)-(13) 是指数稳定的,那么系统(1)-(5) 也是指数稳定的.

在控制器(14) 的作用下,系统(11)-(13) 变为

$$w_t(x,t)=\alpha w_{xx}(x,t)+\beta w(x,t)+\frac{\beta}{\sqrt{\mu}}\int_0^x w(y,t)\sinh\frac{x-y}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}y \tag{16}$$

$$w_x(0,t)=0 \qquad t\geqslant 0 \tag{17}$$

$$w(x,t)=\mu U_2(t)-U_1(t) \qquad t\geqslant 0 \tag{18}$$

为设计第二个状态反馈控制器 $U_2(t)$，引入一种类似后推法的变换：

$$v(x,t)=w(x,t)-\int_0^x k(x,y)w(y,t)\mathrm{d}y \tag{19}$$

其中 $k(x,y)\in C^2(\Omega)$，$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\}$. 变换(19)是可逆的[4].

考虑目标系统：

$$v_t(x,t)=\alpha v_{xx}(x,t)-cv(x,t) \qquad 0<x<1,\ t>0 \tag{20}$$

$$v_x(0,t)=0 \qquad t\geqslant 0 \tag{21}$$

$$v(1,0)=0 \qquad t\geqslant 0 \tag{22}$$

其中 c 为设计参数，它可以使系统达到预期的稳定速度. 系统(20)－(22)在范数意义下是指数稳定的，它的稳定性可以通过分析 Lyapunov 函数的方法来证明. 这里我们给出一个 Lyapunov 函数：

$$V_1(t)=\frac{1}{2}\int_0^1 v^2(x,t)\mathrm{d}x$$

现在考虑运用(19)式将系统(16)－(18)映射到系统(20)－(22). 为满足边界条件(22)，由(18),(19)和(22)式，可取状态反馈控制器 $U_2(t)$：

$$U_2(t)=\frac{1}{\mu}\int_0^1 k(1,y)w(y,t)\mathrm{d}y+\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}\int_0^1 w(y,t)\sinh\frac{1-y}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}y \tag{23}$$

由于 $k(x,y)\in C^2(\Omega)$，变换式(19)是有界可逆的，因此系统(11)－(13)与控制器(14)和(23)具有与系统(20)－(22)相同的稳定性. 从(14)式，我们可以看到，如果系统(11)－(13)实现指数稳定，系统(1)－(5)也达到指数稳定.

引入下面记号：

$$k_x(x,x)=k_x(x,y)\mid_{y=x},\ k_y(x,x)=k_y(x,y)\mid_{y=x},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}k(x,x)=k_x(x,x)+k_y(x,x)$$

对(19)式，关于 t 求一阶导数，关于 x 求二阶导数，并将结果带入(20)－(22)式，并利用(16)－(18)式得出：

$$\begin{aligned}0=&\alpha\int_0^x(k_{xx}(x,y)-k_{yy}(x,y))w(y,t)\mathrm{d}y-(\beta+c)\int_0^x k(x,y)w(y,t)\mathrm{d}y+k_y(x,0)w(0,t)+\\&\frac{\beta}{\sqrt{\mu}}\int_0^x\left(\sinh\frac{x-y}{\sqrt{\mu}}-\int_y^x k(x,s)\sinh\frac{s-y}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}s\right)w(y,t)\mathrm{d}y+\left(2\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}k(x,x)+\beta+c\right)w(x,t)\end{aligned} \tag{24}$$

$$0=k(0,0)w(0,t) \tag{25}$$

由于 $w(x,t)$ 需要满足(24)－(25)式，所以核函数 $k(x,y)\in C^2(\Omega)$ 必须满足如下双曲型偏微分方程：

$$\alpha(k_{xx}(x,y)-k_{yy}(x,y))=(\beta+c)k(x,y)-\frac{\beta}{\sqrt{\mu}}\sinh\frac{x-y}{\sqrt{\mu}}+\frac{\beta}{\sqrt{\mu}}\int_y^x k(x,s)\sinh\frac{s-y}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}s \tag{26}$$

$$k_y(x,0)=0 \tag{27}$$

$$k(x,x)=-\frac{\beta+c}{2\alpha}x \tag{28}$$

从(26)－(28)式我们可以得出核函数 $k(x,y)\in C^2(\Omega)$ 满足：

$$k(x,y)=-\frac{\beta+c}{2\alpha}x-\frac{2\beta}{\alpha\sqrt{\mu}}\sinh\frac{2s}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau-\frac{\beta}{2\alpha\sqrt{\mu}}\int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}}\int_0^{\frac{x-y}{2}}\sinh\frac{2s}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau+$$

$$\frac{2(\beta+c)}{\alpha}\int_0^{\frac{x-y}{2}}\int_0^{\tau}k(\tau+s,\tau-s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+\frac{\beta+c}{\alpha}\int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}}\int_0^{\frac{x-y}{2}}k(\tau+s,\tau-s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+$$

$$\frac{\beta}{\alpha\sqrt{\mu}}\int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}}\int_0^{\frac{x-y}{2}}\int_{\tau-s}^{\tau+s}k(\tau+s,\xi)\sinh\frac{\xi-\tau+s}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+$$

$$\frac{2\beta}{\alpha\sqrt{\mu}}\int_0^{\frac{x-y}{2}}\int_0^{\tau}\int_{\tau-s}^{\tau+s}k(\tau+s,\xi)\sinh\frac{\xi-\tau+s}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \tag{29}$$

使用文献[7]中递归估计的方法，核函数 $k(x,y)\in C^2(\Omega)$ 可通过如下关系式得出：

$$k(x,y)=\lim_{n\to\infty}k_n(x,y) \tag{30}$$

$$k_0(x,y)=0 \tag{31}$$

$$k_1(x,y)=-\frac{\beta+c}{2\alpha}x-\frac{2\beta}{\alpha\sqrt{\mu}}\sinh\frac{2s}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau-\frac{\beta}{2\alpha\sqrt{\mu}}\int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}}\int_0^{\frac{x-y}{2}}\sinh\frac{2s}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \tag{32}$$

$$k_{n+1}(x,y)=k_1(x,y)+\frac{2(\beta+c)}{\alpha}\int_0^{\frac{x-y}{2}}\int_0^{\tau}k_n(\tau+s,\tau-s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+\frac{\beta+c}{\alpha}\int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}}\int_0^{\frac{x-y}{2}}k_n(\tau+s,\tau-s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+$$

$$\frac{\beta}{\alpha\sqrt{\mu}}\int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}}\int_0^{\frac{x-y}{2}}\int_{\tau-s}^{\tau+s}k_n(\tau+s,\xi)\sinh\frac{\xi-\tau+s}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+$$

$$\frac{2\beta}{\alpha\sqrt{\mu}}\int_0^{\frac{x-y}{2}}\int_0^{\tau}\int_{\tau-s}^{\tau+s}k_n(\tau+s,\xi)\sinh\frac{\xi-\tau+s}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \tag{33}$$

接下来，我们将证明(30)－(33)式在 Ω 中是绝对且一致收敛的. 定义相邻两递归项的差值为：

$$\Delta k_n(x,y)=k_{n+1}(x,y)-k_n(x,y) \tag{34}$$

然后，从(30)－(33)式我们可以得到：

$$\Delta k_0(x,y)=-\frac{\beta+c}{2\alpha}x-\frac{2\beta}{\alpha\sqrt{\mu}}\sinh\frac{2s}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau-\frac{\beta}{2\alpha\sqrt{\mu}}\int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}}\int_0^{\frac{x-y}{2}}\sinh\frac{2s}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \tag{35}$$

$$\Delta k_{n+1}(x,y)=\frac{2(\beta+c)}{\alpha}\int_0^{\frac{x-y}{2}}\int_0^{\tau}\Delta k_n(\tau+s,\tau-s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+\frac{\beta+c}{\alpha}\int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}}\int_0^{\frac{x-y}{2}}\Delta k_n(\tau+s,\tau-s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+$$

$$\frac{\beta}{\alpha\sqrt{\mu}}\int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{x+y}{2}}\int_0^{\frac{x-y}{2}}\int_{\tau-s}^{\tau+s}\Delta k_n(\tau+s,\xi)\sinh\frac{\xi-\tau+s}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+$$

$$\frac{2\beta}{\alpha\sqrt{\mu}}\int_0^{\frac{x-y}{2}}\int_0^{\tau}\int_{\tau-s}^{\tau+s}\Delta k_n(\tau+s,\xi)\sinh\frac{\xi-\tau+s}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \tag{36}$$

同时，(30)式转换为下列公式：

$$k(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta k_n(x,y) \tag{37}$$

现在，对 $\Delta k_n(x,y)$ 进行估计得出：

$$|\Delta k_0(x,y)|\leqslant\frac{1}{2\alpha}(\beta+c+\frac{\beta}{\sqrt{\mu}}\sinh\frac{1}{\sqrt{\mu}})=\frac{M_1}{2} \tag{38}$$

$$|\Delta k_n(x,y)|\leqslant M_1^{n+2}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \tag{39}$$

因此在区域 Ω 内级数(37)绝对且一致收敛. 因此，级数(30)－(33)在区域 Ω 内绝对且一致收敛. 级数(30)－(33)的极限函数 $k(x,y)$ 是唯一存在的，且二阶连续可微，并满足：

$$|k(x,y)|\leqslant M_1\mathrm{e}^{M_1x} \tag{40}$$

3　输出反馈控制

控制器(14)和(23)需要测量 $w(x,t)$ 或 $u(x,t)$ 在 $x\in(0,1)$ 内的值. 在这一节中，我们通过设计观测器来避免测量 $w(x,t)$ 或 $u(x,t)$ 在 $x\in(0,1)$ 内的值.

3.1　观测器设计

在我们开始设计观测器之前，利用(9)式把系统(11)－(13)化为如下形式：

$$w_t(x,t)=\alpha w_{xx}(x,t)+\beta w(x,t)+\beta u(0,t)\cosh\frac{x}{\sqrt{\mu}}+\frac{\beta}{\sqrt{\mu}}\int_0^x w(y,t)\sinh\frac{x-y}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}y \tag{41}$$

$$w_x(0,t)=0 \tag{42}$$

$$w(1,t)=\mu U_2(t)-U_1(t) \tag{43}$$

应该注意的是，这种形式下的控制器 $U_1(t)$ 和 $U_2(t)$ 并没有如(14)和(23)式那样取定，而是将在下一节给出.

接下来，设计系统(41)－(43)的观测器设计. 当只有边界值 $u(0,t)$ 和 $u_{xx}(0,t)$ 可以测量时，从(6)式得出，$w(0,t)$ 的值也可测量. 参照文献[5]设计如下观测器：

$$\hat{w}_t(x,t)=\alpha\hat{w}_{xx}(x,t)+\beta\hat{w}(x,t)+\beta u(0,t)\cosh\frac{x}{\sqrt{\mu}}+\frac{\beta}{\sqrt{\mu}}\int_0^x\hat{w}(y,t)\sinh\frac{x-y}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}y+$$
$$\alpha p_y(x,0)(w(0,t)-\hat{w}(0,t))\qquad 0<x<1,\ t>0 \tag{44}$$

$$\hat{w}_x(0,t)=p(0,0)(w(0,t)-\hat{w}(0,t))\qquad t\geqslant 0 \tag{45}$$

$$\hat{w}(1,t)=\mu U_2(t)-U_1(t)\qquad t\geqslant 0 \tag{46}$$

其中 $p(0,0)$ 和 $p_y(x,0)$ 通过在区域 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\}$ 内求解获得.

定义观测误差：

$$\varepsilon(x,t)=w(x,t)-\hat{w}(x,t) \tag{47}$$

从(41)－(43)式中减去(44)－(46)式，可得观测器误差系统：

$$\varepsilon_t(x,t)=\alpha\varepsilon_{xx}(x,t)+\beta\varepsilon(x,t)-\alpha p_y(x,0)\varepsilon(0,t)+\frac{\beta}{\sqrt{\mu}}\int_0^x\varepsilon(y,t)\sinh\frac{x-y}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}y \tag{48}$$

$$\varepsilon_x(0,t)=-p(0,0)\varepsilon(0,t) \tag{49}$$

$$\varepsilon(1,t)=0 \tag{50}$$

引人变换：

$$\varepsilon(x,t)=[(I-P_1)\tilde{\varepsilon}](x,t)=\tilde{\varepsilon}(x,t)-\int_0^x p(x,y)\tilde{\varepsilon}(y,t)\mathrm{d}y \tag{51}$$

其中 P_1 是 Volterra 变换，$p(x,y)\in C^2(\Omega)$. 变换(51)的可逆性在文献[4]中已得到证明，且把系统(48)－(50)变换为系统：

$$\tilde{\varepsilon}_t(x,t)=\alpha\tilde{\varepsilon}_{xx}(x,t)-c_1\tilde{\varepsilon}(x,t)\qquad 0<x<1,\ t>0 \tag{52}$$

$$\tilde{\varepsilon}_x(0,t)=0\qquad t\geqslant 0 \tag{53}$$

$$\tilde{\varepsilon}(1,t)=0\qquad t\geqslant 0 \tag{54}$$

其中 c_1 是正常数. 系统(52)－(54)在 L_2 意义下指数稳定.

将(51)式对 t 求导，再对 x 二阶求导，然后将结果代入(48)－(50)式，并利用(52)－(54)式可以得到：

$$0=\int_0^x\left[\alpha(p_{xx}(x,y)-p_{yy}(x,y))+(\beta+c_1)p(x,y)-\frac{\beta}{\sqrt{\mu}}\left(\sinh\frac{x-y}{\sqrt{\mu}}-\int_y^x p(s,y)\sinh\frac{x-s}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}s\right)\right]\tilde{\varepsilon}(y,t)\mathrm{d}y+$$
$$(2\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x,x)-\beta-c_1)\tilde{\varepsilon}(x,t) \tag{55}$$

$$0=\int_0^1 p(1,y)\tilde{\varepsilon}(y,t)\mathrm{d}y \tag{56}$$

由于(55)—(56)对所有的$\tilde{\varepsilon}(x,t)$成立，因此核函数$p(x,y)$必须满足以下偏微分方程：

$$\alpha(p_{xx}(x,y)-p_{yy}(x,y))=-(\beta+c_1)p(x,y)+\frac{\beta}{\sqrt{\mu}}\sinh\frac{x-y}{\sqrt{\mu}}-\frac{\beta}{\sqrt{\mu}}\int_y^x p(s,y)\sinh\frac{x-s}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}s \tag{57}$$

$$p(x,x)=\frac{\beta+c_1}{2\alpha}(x-1) \tag{58}$$

$$p(1,y)=0 \tag{59}$$

利用文献[7]中的递归估计方法，可以通过以下关系：

$$p(x,y)=\lim_{n\to\infty}p_n(x,y) \tag{60}$$

$$p_0(x,y)=\frac{x-1}{2\alpha}\left(c_1+\beta\cosh\frac{x-y}{\sqrt{\mu}}\right) \tag{61}$$

$$p_{n+1}(x,y)=p_0(x,y)+\frac{\beta+c_1}{\alpha}\int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{2-x-y}{2}}\int_0^{\frac{x-y}{2}}p_n(\tau+s,\tau-s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+$$

$$\frac{\beta}{\alpha\sqrt{\mu}}\int_{\frac{x-y}{2}}^{\frac{2-x-y}{2}}\int_0^{\frac{x-y}{2}}\int_{\tau-s}^{\tau+s}p_n(\tau+s,\xi)\sinh\frac{\xi-\tau+s}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \tag{62}$$

求解核函数$p(x,y)\in C^2(\Omega)$. 类似证明$k(x,y)$在Ω中是绝对且一致收敛的方法，可以证明$p(x,y)$在Ω中是绝对且一致收敛的.

因为$p(x,y)\in C^2(\Omega)$，变换式(51)是有界且可逆的. 因此，观测误差系统(48)—(50)与(52)—(54)具有一样的L_2收敛性质.

式(44)—(46)中的观测增益$p(0,0)$和$p_y(x,0)$由$p(x,y)\in C^2(\Omega)$得出，并且可得到$p(0,0)$的精确值如下：

$$p(0,0)=-\frac{\beta+c_1}{2\alpha} \tag{63}$$

3.2 输出反馈控制

将控制输入(14)和(23)的状态替换为观测器(44)—(46)的状态估计，得到输出反馈控制器如下：

$$U_1(t)=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^1\hat{w}(y,t)\sinh\frac{1-y}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}y \tag{64}$$

$$U_2(t)=\frac{1}{\mu}\int_0^1 k(1,y)\hat{w}(y,t)\mathrm{d}y+\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}\int_0^1\hat{w}(y,t)\sinh\frac{1-y}{\sqrt{\mu}}\mathrm{d}y \tag{65}$$

易得如下定理1.

定理1 考虑由系统(1)—(5)、观测器(44)—(46)、控制器(64)和(65)构成的闭环系统，对于任何初始数据$(w(x,0),\hat{w}(x,0))\in C^2(0,1)$，闭环系统的解$(w(x,t),\hat{w}(x,t))\in C^{2,1}((0,1)\times(0,\infty))$在$L_2$范数意义下是指数稳定的.

参考文献：

[1] KURAMOT Y. Diffusion-Induced Chaos in Reaction Systems [J]. Progress of Theoretical Physics Supplement, 1978, 64: 346-367.

[2] SIVASHINSKY I G. Nonlinear Analysis of Hydrodynamic Instability in Laminar Flames I: Derivation of Basic Equations [J]. Acta Astronau, 1977, 4(11-12): 1177-1206.

[3] Krstic M. Boundary Control of Pdes: A Course on Backstepping Designs [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.

[4] SMYSHLYAEV A，KRSTIC M. Closed form Boundary State Feedbacks for a Class of Partial Integro-Differential Equations [J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2004，49(12)：2185－2202.

[5] SMYSHLYAEV A，KRSTIC M. Backstepping Observers for a Class of Parabolic PDEs [J]. Systems and Control Letters，2005，54(7)：613－625.

[6] LERTPHINYOVONG J，KHOVIDHUNGIJ W. Backstepping Boundary Controllers and Observers for the Rayleigh Beam [J]. IFAC Proceedings Volumes，2008，41(2)：8731－8736.

[7] KRSTIC M，GUO B Z，BALOGH A，et al. Control of a Tip-Force Destabilized Shear Beam by Observer-Based Boundary Feedback [J]. Siam Journal on Control & Optimization，2008，47(2)：553－574.

Boundary Control of the Output Feedback of the Kuramoto-Sivashinsky-Like Equation

LIAO Yu-liang[1]，　ZHAO Sheng-tao[2]，　XIE Cheng-kang[2]

1. Rongchang Campus of Southwest University，Rongchang Chongqing 402460，China；

2. School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：Stabilization of boundary control for a fourth-order parabolic partial differential equation is considered. A controller and an observer are designed with the backstepping method to achieve exponential stabilization of the closed-loop system.

Key words：Kuramoto-Sivashinsky-like equation；boundary control；parabolic PDE；output feedback

责任编辑　张　枸