第 40 卷第 1 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2018 年 1 月
Vol. 40　No. 1　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Jan.　2018

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.01.013

混合广义伽马分布的渐近性质①

刘国涛，　陈守全

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 讨论了独立同混合广义伽马分布随机变量序列的规范化最大值的极限分布及其点点收敛速度.

关 键 词： 混合分布；广义伽马分布；极值类型分布；渐进性质

中图分类号：O211.4　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673-9868(2018)01-0084-04

设$\{Y_n, n \geqslant 1\}$为独立同分布随机变量序列（简记 $i.i.d.$ 随机序列），其分布函数为 $F(x)$. 令 $M_n = \max\{Y_1, \cdots, Y_n\}$，由经典极值理论知，如果存在规范常数 $a_n > 0$，$b_n \in \mathbb{R}$，及对非退化的分布函数 $G(x)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \leqslant a_n x + b_n\} = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x) \tag{1}$$

则 $G(x)$ 必为极值类型分布，此时称 F 属于极值类型分布 G 的吸引场，记为 $F \in D(G)$，其中规范常数 a_n，b_n 的确定方法可参看文献[1-2].

关于广义伽马分布的研究已有很多研究成果. 文献[3]对伽马模型进行概括得出三参数广义伽马模型，广义伽马分布(简称为 GGD)的概率密度函数为：

$$f(x) = \frac{c\lambda^{c\beta}}{\Gamma(\beta)} x^{c\beta-1} \exp(-(\lambda x)^c) \qquad x > 0 \tag{2}$$

其中：$\beta > 0$，$\lambda > 0$，$c > 0$，且 $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数. 文献[4]得到了广义伽马分布的 Mills 比率：

$$\frac{1-F(x)}{f(x)} \sim \frac{x^{1-c}}{c\lambda^c} \qquad x \to \infty \tag{3}$$

并证明了广义伽马分布(GGD)的极值分布属于 Λ 吸引场，得到了其极值分布的点点收敛速度. 关于广义伽马分布的更多性质与应用可参见文献[5-6].

设 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 为服从广义伽马分布的独立随机变量序列，其中随机变量 X_i 的密度函数和分布函数分别为 $f_i(x)$ 和 $F_i(x)$，即 $F_i(x) \sim \mathrm{GGD}_i$，$i = 1, 2, \cdots, r$，定义一个新的随机变量 Z 为

$$Z = \begin{cases} X_1 & P(Z = X_1) = p_1 \\ X_2 & P(Z = X_2) = p_2 \\ \vdots & \vdots \\ X_r & P(Z = X_3) = p_r \end{cases}$$

其中 $p_i \geqslant 0$，$1 \leqslant i \leqslant r$ 且 $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$. 由此，通过定义易得 Z 的分布函数为

$$F(x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x) + \cdots + p_r F_r(x) \tag{4}$$

---

① 收稿日期：2016-10-22
基金项目：国家自然科学基金项目(11171275，11571283).
作者简介：刘国涛(1991-)，女，重庆北碚人，硕士研究生，主要从事极值统计分析的研究.
通信作者：陈守全，副教授，硕士研究生导师.

则称随机变量Z服从混合广义伽马分布(简记MGGD),记$F \sim$ MGGD. 本文将进一步讨论混合广义伽马分布的渐进性质.

1　极限分布

下面将给出混合广义伽马分布(MGGD)的极值类型分布.

定理1　设$\{Z_n, n \geqslant 1\}$为独立同分布随机变量序列,其分布函数$F(x)$定义如(4)式,即$F(x) \sim$ MGGD. 令$f_i(x)$和$F_i(x)$分别为广义伽马分布的密度函数和分布函数,即$F_i(x) \sim \mathrm{GGD}(\lambda_i, \beta_i, c_i)$,则对$\beta_i > 0$,$\lambda_i > 0$,$c_i > 0$,有

$$\lim_{n \to \infty} F^n(a_n x + b_n) = \Lambda(x) \tag{5}$$

其中,规范常数

$$a_n = (\lambda_k c_k)^{-1} (\log n)^{\frac{1}{c_k} - 1} \tag{6}$$

和

$$b_n = \lambda_k^{-1} \log n^{\frac{1}{c_k}} + \frac{(\beta_k - 1)\log\log n - \log\Gamma(\beta_k) + \log p_k}{c_k \lambda_k \log n^{1 - \frac{1}{c_k}}} \tag{7}$$

证　首先令$r = 2$,$F(x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x)$,其中$p_1 + p_2 = 1$,则由(3)式得

$$\begin{aligned}
1 - F(x) = {} & p_1(1 - F_1(x)) + p_2(1 - F_2(x)) \sim \\
& \frac{p_1 x^{1-c_1}}{c_1 \lambda_1^{c_1}} f_1(x) + \frac{p_2 x^{1-c_2}}{c_2 \lambda_2^{c_2}} f_2(x) = \\
& \frac{p_1 \lambda_1^{c_1(\beta_1 - 1)}}{\Gamma(\beta_1)} x^{c_1(\beta_1 - 1)} \exp(-(\lambda_1 x)^{c_1}) + \frac{p_2 \lambda_2^{c_2(\beta_2 - 1)}}{\Gamma(\beta_2)} x^{c_2(\beta_2 - 1)} \exp(-(\lambda_2 x)^{c_2}) = \\
& \frac{p_1 \lambda_1^{c_1(\beta_1 - 1)}}{\Gamma(\beta_1)} x^{c_1(\beta_1 - 1)} \exp(-(\lambda_1 x)^{c_1}) \times \\
& \left(1 + \frac{\Gamma(\beta_1) p_2 \lambda_2^{c_2(\beta_2 - 1)}}{\Gamma(\beta_2) p_1 \lambda_1^{c_1(\beta_1 - 1)}} x^{(c_2\beta_2 - c_1\beta_1) - (c_2 - c_1)} \times \exp((\lambda_1 x)^{c_1} - (\lambda_2 x)^{c_2})\right)
\end{aligned}$$

设

$$H(x) = x^{(c_2\beta_2 - c_1\beta_1) - (c_2 - c_1)} \exp((\lambda_1 x)^{c_1} - (\lambda_2 x)^{c_2})$$

则

$$H(x) = x^{(c_2\beta_2 - c_1\beta_1) - (c_2 - c_1)} \exp\left(-(\lambda_2 x)^{c_2}\left(1 - \frac{\lambda_1^{c_1}}{\lambda_2^{c_2}} x^{c_1 - c_2}\right)\right)$$

易知

(ⅰ) 当$x \to \infty$,$c_1 < c_2$,$\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \beta_2 > 0$时,有$H(x) \to 0$;

(ⅱ) 当$x \to \infty$,$c_1 = c_2$,$\lambda_1 < \lambda_2$,$\beta_1, \beta_2 > 0$时,有$H(x) \to 0$;

(ⅲ) 当$x \to \infty$,$c_1 = c_2$,$\lambda_1 = \lambda_2$,$\beta_1 > \beta_2$时,有$H(x) \to 0$.

因此

$$1 - F(x) = \frac{p_i \lambda_i^{c_i(\beta_i - 1)}}{\Gamma(\beta_i)} x^{c_i(\beta_i - 1)} \exp(-(\lambda_i x)^{c_i})(1 + o(1)) \qquad i = 1, 2$$

当r有限时,对此类似可以得到

$$1 - F(x) = \frac{p_k \lambda_k^{c_k(\beta_k - 1)}}{\Gamma(\beta_k)} x^{c_k(\beta_k - 1)} \exp(-(\lambda_k x)^{c_k})(1 + o(1)) \tag{8}$$

其中$1 \leqslant k \leqslant r$,且

(ⅰ) 若$c_k = \min\{c_1, c_2, \cdots, c_r\}$只有一个值时,则$\lambda_k, \beta_k$和$p_k$分别为$F_k(x)$对应的值;

(ⅱ) 若$c_{k_i} = \min\{c_1, c_2, \cdots, c_r\}$有多个值,其中$i = 1, 2, \cdots, a$,且$a < r$,但$\lambda_{k_i} = \min\{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \cdots,$

$\lambda_{k_a}\}$ 只有一个值时，则 β_{k_i}，p_k 为 $F_{k_i}(x)$ 对应的值；

ⅲ) 若 $c_{k_i}=\min\{c_1, c_2, \cdots, c_r\}$ 有多个值，其中 $i=1,2,\cdots,a$，$a<r$，并且 $\lambda_{k_j}=\min\{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \cdots, \lambda_{k_a}\}$ 也有多个值，其中 $j=1,2,\cdots,b$，$b<a$，则 $\beta_{k_l}=\max\{\beta_{k_1}, \beta_{k_2}, \cdots, \beta_{k_b}\}$ 其中 $l<b$，p_k 分别为 $F_{k_l}(x)$ 对应的值. 设

$$g(t)=\frac{t^{1-c_k}}{c_k\lambda_k^{c_k}}$$

则当 $t\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}\frac{1-F(t+xg(t))}{1-F(t)}=&\left(1+\frac{t^{-c_k}}{c_k\lambda_k^{c_k}}x\right)^{c_k(\beta_k-1)}\exp\left(-(\lambda_k t)^{c_k}\left(\left(1+\frac{t^{-c_k}}{c_k\lambda_k^{c_k}}x\right)^{c_k}-1\right)\right)(1+o(1))=\\&\left(1+\frac{t^{-c_k}}{c_k\lambda_k^{c_k}}x\right)^{c_k(\beta_k-1)}\exp(-x+o(t^{-c_k}))(1+o(1))\to\\&\exp(-x)\end{aligned}$$

由文献[4]中定理 1.1 可得 $F\in D(\Lambda)$，则有

$$\lim_{n\to\infty}F^n(a_nx+b_n)=\Lambda(x)$$

规范常数 a_n 和 b_n 可由以下方程解得

$$n(1-F(u_n(x)))=\exp(-x)\tag{9}$$

其中 $u_n(x)=a_nx+b_n$. 类似文献[2]中定理 1.5.3，易得(6)和(7)式.

定理证毕.

2　收敛速度

下面讨论混合广义伽马极值分布的点点收敛速度.

定理 2　设 $\{Z_n, n\geqslant 1\}$ 为独立同分布随机变量序列，其分布函数 $F(x)$ 在(4)式中给出，即 $F(x)\sim$ MGGD. 当 $n\to\infty$ 时，对 $\beta_i>0$，$\lambda_i>0$，$c_i>0$，有

$$F^n(a_nx+b_n)-\Lambda(x)\sim\frac{\Lambda(x)\exp(-x)(1-c_k^{-1})((\beta_k-1)(\log\log n))^2}{2\log n}\tag{10}$$

其中，规范常数

$$a_n=(\lambda_kc_k)^{-1}(\log n)^{\frac{1}{c_k}-1}$$

和

$$b_n=\lambda_k^{-1}\log n^{\frac{1}{c_k}}+\frac{(\beta_k-1)\log\log n-\log\Gamma(\beta_k)+\log p_k}{c_k\lambda_k\log n^{1-\frac{1}{c_k}}}$$

证　由定理 1 可得 $F\in D(\Lambda)$. 设

$$\tau_n=n(1-F(u_n))\qquad u_n=a_nx+b_n$$

则

$$\begin{aligned}u_n=&\frac{x}{\lambda_kc_k(\log n)^{1-\frac{1}{c_k}}}+\lambda_k^{-1}\log n^{\frac{1}{c_k}}+\frac{(\beta_k-1)\log\log n-\log\Gamma(\beta_k)+\log p_k}{c_k\lambda_k\log n^{1-\frac{1}{c_k}}}=\\&\lambda_k^{-1}(\log n)^{\frac{1}{c_k}}\left(1+\frac{x}{c_k\log n}+\frac{(\beta_k-1)\log\log n-\log\Gamma(\beta_k)+\log p_k}{c_k\log n}\right)\end{aligned}$$

且

$$\log u_n=-\log\lambda_k+\frac{1}{c_k}\log\log n+O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)$$

$$\begin{aligned}u_n^{c_k}=\lambda_k^{-c_k}(&\log n+x+(\beta_k-1)\log\log n-\log\Gamma(\beta_k)+\log p_k+\\&\frac{(c_k-1)((\beta_k-1)(\log\log n)-\log\Gamma(\beta_k)+\log p_k)^2}{2c_k\log n}(1+o(1)))\end{aligned}$$

由式(2)和式(3),有

$$\tau_n = n(1-F(u_n)) = np_k(1-F_k(u_n))(1+o(1)) =$$

$$np_k \frac{\lambda_k^{c_k(\beta_k-1)}}{\Gamma(\beta_k)} \exp(-\lambda_k^{c_k} u_n^{c_k} + c_k(\beta_k - 1)\log u_n)(1+o(1)) =$$

$$\exp(-x)\left(1 - \frac{(c_k-1)((\beta_k-1)(\log\log n) - \log\Gamma(\beta_k) + \log p_k)^2}{2c_k \log n}(1+o(1))\right)$$

令

$$\tau(x) = \exp(-x)$$

当 $n\to\infty$ 时,有

$$\tau(x) - \tau_n(x) = \exp(-x)\frac{(c_k-1)((\beta_k-1)(\log\log n) - \log\Gamma(\beta_k) + \log p_k)^2}{2c_k\log n}(1+o(1)) \sim$$

$$\exp(-x)\frac{(1-c_k^{-1})((\beta_k-1)(\log\log n))^2}{2\log n}$$

因此,由文献[2]中的定理2.4.2可知(10)式成立.

定理2证毕.

参考文献:

[1] LEADBETTER M R, LINDGREN G, ROOTZEN H. Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes [M]. New York: Springer, 1983: 5-7.

[2] RESNICK S. Extreme Value, Regular Variation, and Point Processes [M]. New York: Springer, 1987: 26-67.

[3] STACY E W. A Generalization of Gamma Distribution [J]. Annals of Mathematics Statistics, 1962, 33(3): 1187-1192.

[4] DU L, CHEN S. Asymptotic Properties for Distributions and Densities of Dxtremes from Generalized Gamma Distribution [J]. Journal of the Korean Statistical Society, 2015, 45(2): 188-198.

[5] WINGO D R. Computing Maximum-Likelihood Parameter Estimates of the Generalized Gamma Distribution by Numerical Root Isolation [J]. IEEE Transactions on Reliability, 1987, 36(5): 586-590.

[6] 潘立先. 四参数广义伽马分布函数拟合居民收入分布 [D]. 成都:西南财经大学, 2014.

[7] PENG Z, TONG B, NADARAJAH S. Tail Behavior of the General Error Distribution [J]. Econometrica, 2009, 38(11): 1884-1892.

The Asymptotic Behaviors of Mixed Generalized Gamma Distributions

LIU Guo-tao, CHEN Shou-quan

School of Mathematics and Statistics of Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this note, we discuss the asymptotic behaviors of independent and identically distributed (i. i. d.) extremes for mixed generalized gamma distributions (MGGD) and their pointwise convergence rate.

Key words: mixed distribution; generalized gamma distribution; extreme value type distribution; asymptotic behavior

责任编辑 张 枸