

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.01.014

多因子欧式期权定价的主成分蒙特卡罗加速方法^①

梁义娟¹, 徐承龙², 马俊美²

1. 西南大学 经济管理学院, 重庆 400715; 2. 上海财经大学 数学学院, 上海 200433

摘要: 针对多个随机因子的欧式期权定价问题, 提出了一种基于主成分分析的多元控制变量的蒙特卡罗加速框架。其核心思想是, 使用单个主成分替换收益函数中的原始随机变量以便更易获得定价问题的精确值, 从而可将近似的收益函数作为控制变量。由于主成分的独立性, 使用多元控制变量的蒙特卡罗模拟方法比单个控制变量具有更好的加速效果。对多资产期权和亚式期权的数值实验验证了本文算法的高效性和稳定性。

关键词: 期权定价; 主成分分析; 蒙特卡罗模拟; 多元控制变量

中图分类号: O242.1

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2018)01-0088-10

1973 年, 文献[1]给出了欧式标准期权的定价公式, 成为衍生品定价历史上的一项重大突破。然而, 如果欧式期权的标的资产与多个随机因子有关, 如多资产期权、路径依赖期权等, 一般就无法得到期权价格的封闭解。在风险中性世界中, 如果能够对衍生产品进行完全对冲, 则其价格可以表示为风险中性世界中的贴现收益函数的期望值。蒙特卡罗模拟可以用来求解这一类期望问题。相对于有限差分法、二叉树等其它数值方法而言, 蒙特卡罗模拟思想简单, 具有计算误差与维度无关的优势, 可以很自然地用于高维问题的求解。然而, 蒙特卡罗模拟收敛速度较慢, 常常需要使用各类方差减小技巧^[2]来提高其精度。

控制变量是一种常用的方差减小技巧^[2], 它是一种充分利用已知量的估计误差来降低未知量的估计误差的技术。文献[3-8]就使用了控制变量方法来加速各种期权的定价。在本文中, 我们基于主成分分析提出了一种多元控制变量的构造框架, 称为主成分蒙特卡罗方法(principle components Monte Carlo, PCMC)。主成分分析是一种常用的统计降维方法。其主要想法是, 可以使用少数几个独立的主成分去表示原始多维随机变量的绝大部分信息^[9]。主成分的一个重要特征就是, 每一个主成分都是一个一维随机变量, 从而基于一个主成分构造的控制变量容易得到精确值。目前, 使用主成分方法来构造控制变量的研究还较少。文献[10]使用主成分抽样的方法去构造布朗桥, 从而降低问题的维度。

本文首先分析了对欧式多因子期权定价模型使用多元控制变量进行蒙特卡罗模拟的一般思路, 然后基于原始变量的主成分变换构造了 3 种不同的控制变量方法。对多资产期权和亚式期权分别展开的数值算例表明, 与使用几何平均的期权作为控制变量的方法相比, 本文提出的基于主成分的控制变量方法具有方差更小、效果更好且对模型参数不敏感的优点。

1 多因子期权定价模型及主成分控制变量方法

1.1 多因子欧式期权定价模型

本文考虑欧式多因子期权的定价问题。在风险中性世界中, 这等价于求一个如下高维积分问题:

^① 收稿日期: 2017-10-20

基金项目: 国家自然科学基金数学天元基金项目(11626194); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(SWU1609009)。

作者简介: 梁义娟(1987-), 女, 重庆梁平人, 讲师, 博士, 主要从事金融工程与风险管理的研究。

$$E[V] = E[F(\mathbf{X})] \quad (1)$$

其中: \mathbf{X} 是 n 维标的资产的状态变量, 其概率密度函数为 $f(x)$, $F(\mathbf{X})$ 是贴现收益函数. 多因子指的是标的资产状态变量 \mathbf{X} , 它的“多”可能来源于标资产的高维性, 如多资产期权, 或者标的资产的路径依赖性, 如亚式期权的收益函数典型地依赖于多个时间状态的值.

经典的蒙特卡罗 (classical Monte Carlo, CMC) 方法可以用来解决这一类期望问题. 首先根据密度函数 $f(x)$ 生成容量为 N 的随机样本 $\mathbf{X}^{(i)} (i = 1, 2, \dots, N)$, 然后计算每一个样本函数的值 $V^{(i)} = f(\mathbf{X}^{(i)})$, 最后计算样本均值

$$\bar{V}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V^{(i)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{X}^{(i)}) \quad (2)$$

则样本均值 \bar{V}_N 就是期权价格 $E[V]$ 的一个无偏估计. 如果随机样本 $V^{(i)}$ 具有有限方差 σ^2 , 中心极限定理说明样本的误差满足

$$|\bar{V}_N - E[V]| \leq \frac{\sigma z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{N}}$$

其成立的概率为 $1-\alpha$, 其中 $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 是标准正态分布的 $1-\frac{\alpha}{2}$ 分位数. 于是蒙特卡罗方法的有效性可以用样本

的标准误差 $std(\bar{V}_N) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ 来度量. 可以看出, 蒙特卡罗方法的收敛性速度非常慢, 仅为 $O(N^{-1/2})$. 对多因

子期权定价问题, 考虑到标的状态变量的高维性, 即使生成一个简单随机样本也需要大量的时间.

1.2 多元控制变量方法

控制变量 (control variate) 技巧是一种常用的方差减小技术, 它利用一个已知量的估计误差来降低未知量的估计误差^[2]. 使用控制变量技巧可以大大提高蒙特卡罗模拟的效率. 为了说明其思想, 考虑问题(1), 即计算随机变量 V 的期望 $E[V]$. 在得到 $V^{(i)}$ 的同时能得到另一个随机向量 $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_d)^T$ 的样本 $\mathbf{C}^{(i)}$, 且其期望 $E[\mathbf{C}]$ 已知. 假设随机样本 $(\mathbf{C}^{(i)}, V^{(i)})$ 具有如下的协方差矩阵

$$\begin{pmatrix} \Sigma_C & \Sigma_{CV} \\ \Sigma_{CV}^T & \sigma_V^2 \end{pmatrix}$$

其中 Σ_C 是非奇异的 $d \times d$ 方阵, Σ_{CV} 是 $d \times 1$ 向量, 常数 σ_V^2 是变量 V 的方差. 对任意固定的向量 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$, 可以构造 $E[V]$ 的一个估计值

$$\bar{V}_N(\mathbf{b}) = \bar{V}_N - \mathbf{b}^T (\bar{\mathbf{C}}_N - E[\mathbf{C}]) \quad (3)$$

其中误差 $\bar{\mathbf{C}}_N - E[\mathbf{C}]$ 是可以观察的, 这就成为未知误差 $\bar{V}_N - E[V]$ 的一个控制, 把 \mathbf{C} 称为 V 的一个控制向量或者多元控制变量. 显然控制变量估计值 $\bar{V}_N(\mathbf{b})$ 是一个无偏估计, 并且可以选择如下的最优系数

$$\mathbf{b}^* = \Sigma_C^{-1} \Sigma_{CV} \quad (4)$$

使得估计值方差最小为

$$\text{var}(\bar{V}_N(\mathbf{b}^*)) = (1 - R_{CV}^2) \text{var}(\bar{V}_N)$$

其中 R_{CV}^2 是平方复相关系数, 它度量了使用控制变量 \mathbf{C} 后 V 的方差减小比例. 于是, 控制变量方法的效率可以用方差减小指数

$$\frac{\text{var}(\bar{V}_N)}{\text{var}(\bar{V}_N(\mathbf{b}^*))} = \frac{1}{1 - R_{CV}^2}$$

来度量. 方差减小指数对控制向量 \mathbf{C} 和原始变量 V 之间的相关系数 R_{CV} 高度敏感, 如果 $|R_{CV}|$ 趋向于 1, 则方差减小指数可以大幅度提高. 这说明, 为了有效地减小方差, 必须要选择一个与原始变量高度相关的控制向量. 当然, 控制向量的选择取决于具体的问题, 对于期权定价问题, 标的资产、债券价格、对冲等都可以作为控制变量.

特别地, 当多元控制变量 \mathbf{C} 的各个分量独立时, 此时协方差矩阵 Σ_C 是对角矩阵. 于是, 平方复相关

系数

$$R_{CV}^2 = \rho_{C_1V}^2 + \rho_{C_2V}^2 + \cdots + \rho_{C_dV}^2$$

其中 ρ_{C_iV} 是控制变量 C_i 与 V 的相关系数. 这也说明, 如果控制变量之间相互独立, 使用的控制变量个数越多, 那么其方差减小效果越好.

1.3 主成分控制变量方法

主成分分析(principle component analysis, PCA) 是一种对多维随机变量的统计降维方法. 更准确地说, 它是将研究对象的多个相关变量近似地转化为少数几个独立变量的一种多元统计方法^[9]. 在多变量统计分析中, 为了尽可能完整地搜集信息, 对每个样品往往测量许多指标, 这虽然可以避免重要信息的遗漏, 然而从统计的角度来看, 这些变量可能高度相关, 反而增加了问题的复杂性. 因此, 自然想到用少数几个不相关的综合变量来代替原来较多的相关变量, 而不损失原始变量的大部分信息.

对标的资产的状态变量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$, 假设其均值向量和协方差矩阵分别为 $\boldsymbol{\mu}_X, \Sigma_X$. 显然 Σ_X 是一个半正定对称矩阵, 于是有谱分解

$$\Sigma_X = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^T$$

其中

$$\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

是特征值组成的对角矩阵, 且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$. 而 $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n)$ 是一个正交矩阵, \mathbf{u}_i 是特征值 λ_i 对应的特征向量. 于是, \mathbf{X} 的主成分变换为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}^T(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X) \quad (5)$$

此时, 贴现收益函数 $F(\mathbf{X})$ 变为 $g(\mathbf{Y})$, 期权定价问题(1) 等价于

$$E[V] = E[g(\mathbf{Y})] = E[g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)] \quad (6)$$

显然(5) 式定义的主成分 \mathbf{Y} 具有零均值. \mathbf{Y} 的第 i 个分量 $Y_i = \mathbf{u}_i^T(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X)$ 称为第 i 个主成分(principle component, PC). 显然, \mathbf{Y} 的协方差矩阵就是 $\boldsymbol{\Lambda}$, 也就是说 $\text{var}(Y_i) = \lambda_i$, 并且 $\text{cov}(Y_i, Y_j) = 0, i \neq j$. 第 i 个主成分 Y_i 的贡献率定义为

$$\frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}$$

这说明了 Y_i 对原变量的信息解释能力. 前 q 个主成分的解释能力可以用累计贡献率 ψ_q 来度量,

$$\psi_q = \frac{\sum_{j=1}^q \lambda_j}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} = \frac{\sum_{j=1}^q \text{var}(Y_j)}{\sum_{j=1}^n \text{var}(Y_j)} \quad (7)$$

ψ_q 越大, 说明前 q 个主成分的解释能力越强.

现在, 对多因子期权定价问题(6), 利用主成分可以构造多元控制变量, 我们称这种模拟方法为主成分蒙特卡罗(principle component Monte Carlo, PCMC) 方法.

1.3.1 PCMC 方法 1

采用式(7) 中定义的累计贡献率 ψ_q 作为标准, 如果特征值 λ_1 相对于 λ_2 很大, 则第一个主成分 Y_1 可以解释原始变量 \mathbf{X} 的绝大部分信息. 自然, Y_1 可以用来构造一个控制变量

$$C^1 = g(Y_1, 0, \cdots, 0)$$

如果 λ_1 相对于 λ_2 不是很大, 那么在使用 Y_1 的同时, 可以使用第二个主成分 Y_2 一起来解释 \mathbf{X} 的信息. 同时使用 Y_1, Y_2 构造的一个控制变量是

$$C^2 = g(Y_1, Y_2, \cdots, 0)$$

理论上, 可以用前 k 个主成分 Y_1, Y_2, \cdots, Y_k 构造如下的控制变量

$$C^k = g(Y_1, \cdots, Y_k, 0, \cdots, 0)$$

实际上,上面构造的控制变量可以从另一个角度来理解.在 n 维积分问题(6)中,如果特征值 $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ 相对于 λ_1 很小,这说明主成分 Y_2, \dots, Y_n 的方差也很小,于是可以把它们近似看作是常数.也就是说,在积分(6)中, Y_2, \dots, Y_n 可以用它们的期望值0代替,于是就得到了 C^1 . C^1 自然地可以看作是贴现收益函数的一个近似.同样地, C^k 也可以看作是贴现收益函数的一个近似.它们都可以用作蒙特卡罗模拟的控制变量.

一个好的控制变量必须容易得到它的期望,并且与原始变量高度相关.在实际中,考虑到计算的复杂程度,运用最多的还是 C^1, C^2, C^3 .

1.3.2 PCMC 方法 2

为了避免计算形如 C^k 这样的高维积分,可以使用单个的主成分构造如下的控制变量:

$$C_k = g(0, \dots, 0, Y_k, 0, \dots, 0) \quad k=1, 2, \dots, n$$

C_k 的期望 $E[C_k]$ 是一个一维积分,采用一些数值方法容易得到.由于主成分 Y_k 是按照它们的重要程度降序排列的,可以猜测 C_k 与贴现收益函数 $g(\mathbf{Y})$ 之间的相关性也随着 k 增大而减小.由于 Y_1, Y_2, \dots, Y_k 之间是相互独立的,所以控制变量 C_1, C_2, \dots, C_k 之间也是独立的,使用多元控制可以得到更好的方差减小效果.

1.3.3 PCMC 方法 3

如果从贴现收益函数 $g(\mathbf{Y})$ 的近似表达来看, C^k 显然比 C_1, C_2, \dots, C_k 的精确程度更高,当然也具有更高的相关系数.于是,可以提出一种混合的多元控制变量,即使用 C^k, C_{k+1}, \dots, C_p ($p \leq n$).注意到 $C^1 = C_1$.在下文中,我们将使用形如 C^2, C_3, \dots, C_k 的控制变量.

2 期权定价实例

2.1 多资产期权定价问题

假设欧式多资产期权的标的资产 $\mathbf{S} = (S_1, S_2, \dots, S_n)^T$ 满足如下的随机微分方程(SDEs)^[11]:

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = (r - d_i)dt + dW_i(t) \quad i=1, 2, \dots, n \quad (8)$$

其中: r 是市场无风险利率, d_i 是股票 $S_i(t)$ 的连续分红率, σ_i 是 $S_i(t)$ 的波动率, $W_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$)是标准布朗运动,且具有如下的相关系数矩阵

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{12} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n} & \rho_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

对于欧式多资产期权,设其在到期日 T 的收益函数为 $h(\mathbf{S}(T))$,则其在初始时刻的价值为

$$V = E[e^{-rT}h(\mathbf{S}(T))] = E[e^{-rT}h(S_1(T), S_2(T), \dots, S_n(T))] \quad (9)$$

令

$$X_i = \frac{\sigma_i W_i(T)}{\sqrt{T}} \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$$

则 \mathbf{X} 是一个 n 维正态随机向量.并且 \mathbf{X} 的期望为零,协方差矩阵为

$$\Sigma = \text{diag}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{\Gamma}\text{diag}(\boldsymbol{\sigma}) \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)^T$$

从而随机微分方程(8)的解为

$$S_i(T) = S_i(0)\exp\left[\left(r - d_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)T + \sqrt{T}X_i\right] \quad i=1, 2, \dots, n \quad (10)$$

于是,期权价格 V 具有显性表达式

$$V = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\Sigma)}} e^{-rT} h(\mathbf{S}(T)) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}} d\mathbf{X} \quad (11)$$

假设 \mathbf{X} 的协方差矩阵有谱分解 $\Sigma = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^T$, 其中 $\mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 是特征值组成的对角矩阵, $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ 是一个正交矩阵, 其元素 \mathbf{u}_i 是特征值 λ_i 对应的特征向量. 则 \mathbf{X} 的主成分变换为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}^T \mathbf{X} \quad (12)$$

于是收益函数 $h(\mathbf{S}(T))$ 变为 $g(\mathbf{Y}) = g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, 再注意到 \mathbf{Y} 的协方差矩阵就是对角阵 \mathbf{A} , 从而可以将式(11) 改写为

$$V = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\mathbf{A})}} e^{-rT} g(\mathbf{Y}) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{Y}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Y}} d\mathbf{Y} \quad (13)$$

2.1.1 一篮子期权

一篮子期权是一种典型的多资产期权, 其收益函数取决于标的资产的平均数. 对算术平均一篮子期权, 在到期日 T 的欧式看涨期权的收益函数可以记作

$$h(\mathbf{S}(T)) = \left(\sum_{i=1}^n \omega_i S_i(T) - K \right)^+$$

其中: 第 i 个资产价格 S_i 服从(8) 式定义的几何布朗运动, ω_i 是对应的权重, $\omega_i \geq 0$, $\sum \omega_i = 1$, K 是敲定价格. 对算术平均一篮子期权, 即使是欧式期权, 我们也无法得到其封闭解. 然而, 我们容易得到对应的几何平均一篮子期权的价格^[11].

2.1.2 实验 1: 二维一篮子期权

为了说明算法的有效性, 我们不妨从一个 2 维的一篮子期权说起. 此时, 它的收益函数为

$$h(S_1(T), S_2(T)) = (\omega_1 S_1(T) + \omega_2 S_2(T) - K)^+$$

利用主成分变换(12) 式, 收益函数变为

$$g(Y_1, Y_2) = (\omega_1 S_1(0) e^{(r-d_1-\frac{\sigma_1^2}{2})T + \sqrt{T}(u_{11}Y_1 + u_{12}Y_2)} + \omega_2 S_2(0) e^{(r-d_2-\frac{\sigma_2^2}{2})T + \sqrt{T}(u_{21}Y_1 + u_{22}Y_2)} - K)^+$$

此时, 期权价格可以表示为

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-rT}}{2\pi \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} g(Y_1, Y_2) e^{-\frac{Y_1^2}{2\lambda_1} - \frac{Y_2^2}{2\lambda_2}} dY_1 dY_2$$

我们可以构造两个独立的控制变量

$$C_1 = g(Y_1, 0) \quad C_2 = g(0, Y_2)$$

蒙特卡罗控制变量模拟算法如下:

- 1) 生成独立的标准正态随机变量 $Z_1^{(i)}, Z_2^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), N 是给定的模拟路径数;
- 2) 计算收益函数

$$g^{(i)} = g(\sqrt{\lambda_1} Z_1^{(i)}, \sqrt{\lambda_2} Z_2^{(i)})$$

及控制变量

$$C_1^{(i)} = g(\sqrt{\lambda_1} Z_1^{(i)}, 0) \quad C_2^{(i)} = g(0, \sqrt{\lambda_2} Z_2^{(i)})$$

- 3) 根据(4) 式计算最优系数 b_1 和 b_2 ;
- 4) 得到蒙特卡罗估计值

$$\bar{V}_N = e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g^{(i)}$$

以及主成分控制变量(PCMC) 估计值:

$$\bar{V}_{N,1} = \bar{V}_N - b_1 (\bar{C}_{1N} - E[C_1]) \quad (14)$$

$$\bar{V}_{N,2} = \bar{V}_N - (\bar{C}_{1N} - E[C_1], \bar{C}_{2N} - E[C_2]) \mathbf{b}_2 \quad (15)$$

为简单起见, 令 $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$, 分红率 $d_1 = d_2 = 0$. 模拟的路径数 $N = 100\,000$.

由于波动率对期权价格具有显著影响, 下面主要考虑波动率对蒙特卡罗模拟方法的影响. 令

$$S_1(0) = S_2(0) = 50 \quad K = 40 \quad r = 0.05$$

$$T = 1 \quad \rho = 0.5 \quad \sigma_1 = \sigma_2$$

经过计算, 此时对协方差矩阵谱分解后特征值之比为 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 3$. 试验结果见表 1.

表 1 不同波动率情形下的蒙特卡罗模拟的期权价格及标准差

$\sigma_1 = \sigma_2$	精确值	CMC	GMC	PCMC-(14)	PCMC-(15)
0.1	11.951 7	11.961 1(0.013 6)	11.951 5(0.000 3)	11.951 5(0.000 3)	11.951 6(2.6E-05)
0.2	12.136 3	12.143 6(0.026 5)	12.136 1(0.001 2)	12.136 0(0.001 1)	12.136 5(0.000 3)
0.3	12.806 1	12.804 9(0.038 3)	12.804 8(0.002 9)	12.804 8(0.002 5)	12.805 9(0.001 2)
0.4	13.801 1	13.791 2(0.050 2)	13.798 6(0.005 7)	13.799 2(0.004 6)	13.801 1(0.002 6)
0.5	14.969 3	14.950 4(0.063 1)	14.965 4(0.009 7)	14.967 1(0.007 5)	14.970 0(0.004 6)

表 1 展示了几种蒙特卡罗模拟的期权价格, 括号里是对应的样本标准差. 其中精确值是使用数值算法得到的精确解^[1], CMC 表示普通的蒙特卡罗模拟方法, GMC 是使用几何平均一篮子期权作为控制变量, PCMC-(14)表示的是使用式(14)的一元控制变量, PCMC-(15)表示的是使用式(15)的二元控制变量. 明显看出, 在各种波动率情形下, 构造的二元控制变量 PCMC-(15)具有最小的标准差, 其次是一元控制变量 PCMC-(14), 它们均优于使用几何平均一篮子期权作为控制变量. 另外, 随着波动率的增加, 期权价格也在增加, 模拟的标准差也在增加, 但是 3 种控制变量方法的方差减小指数却在减小.

当 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.4$ 时, 协方差矩阵的特征值为 $\lambda_1 = 0.24$, $\lambda_2 = 0.08$. 现在固定 λ_1 , 改变特征值的比例 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 或者 λ_2 , 观察试验结果, 见表 2.

表 2 不同特征值比例情形下的方差减小指数

λ_2	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$	GMC	PCMC-(14)	PCMC-(15)
0.08	3	78	119	378
0.06	4	139	210	645
0.04	6	314	470	1 389
0.02	12	1 263	1 874	5 352
0.01	24	5 072	7 487	20 995

表 2 说明 3 种控制变量的方差减小指数随着 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 的增大而增大. 当 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 增大时, $C_1 = g(Y_1, 0)$ 对收益函数 $g(Y_1, Y_2)$ 的近似就越好, 它们之间的相关系数就越高, 从而方差减小指数就越大. 注意到方差减小指数与 $\frac{1}{1-\rho^2}$ 成比例, 这说明当 $|\rho|$ 趋近于 1 时, 方差减小指数迅速增加. 这也说明, 此时对相关系数的一点点提高都会使得方差减小效果大幅度提高.

2.1.3 实验 2: 三维一篮子期权

下面讨论一个 3 维的一篮子期权, 它的收益函数为

$$h(S_1(T), S_2(T), S_3(T)) = (\omega_1 S_1(T) + \omega_2 S_2(T) + \omega_3 S_3(T) - K)^+$$

利用主成分变换(12)式, 收益函数变为

$$g(Y_1, Y_2, Y_3) = \left(\sum_{i=1}^3 \omega_i S_i(0) e^{\left(r - d_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)T + \sqrt{T}(u_{i1}Y_1 + u_{i2}Y_2 + u_{i3}Y_3)} - K \right)^+$$

此时, 可以构造如下的控制变量

$$C_1 = g(Y_1, 0, 0) \quad C_2 = g(0, Y_2, 0)$$

$$C_3 = g(0, 0, Y_3) \quad C^2 = g(Y_1, Y_2, 0)$$

为了比较不同控制变量之间的加速效果, 考虑如下一些组合:

PCMC-1: 用 C_1 做一元控制;

PCMC-2: 用 C_1, C_2 做二元控制;

PCMC-3: 用 C_1, C_2, C_3 做三元控制;

PCMC-4: 用 C^2 做一元控制;

PCMC-5: 用 C^2, C_3 做二元控制.

实际上, PCMC-1, PCMC-2, PCMC-3 就是主成份蒙特卡罗方法 2, PCMC-4 是主成份蒙特卡罗方法 1, PCMC-5 是主成份蒙特卡罗方法 3.

先讨论波动率对加速效果的影响. 令

$$S_1(0) = S_2(0) = S_3(0) = 50 \quad K = 40 \quad r = 0.05$$

$$T = 1 \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{3} \quad \rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23}$$

为了保证相关系数矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 的半正定性, 必须有 $-\frac{1}{2} \leq \rho_{12} \leq 1$. 取 $\rho_{12} = 0.5$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, 则协方差矩阵谱分解后特征值之比为 $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 4 : 1 : 1$. 改变波动率的大小, 试验结果见表 3.

表 3 不同波动率情形下的方差减小指数

σ_1	PCMC-1	PCMC-2	PCMC-3	PCMC-4	PCMC-5
0.1	2 360	4 652	292 750	4 689	548 731
0.2	553	1 005	5 789	1 111	12 683
0.3	221	357	973	447	2 142
0.4	115	172	347	234	749
0.5	68	96	166	138	346

表 3 再次验证实验 1 的结论. 首先, 固定特征值的比例时, 波动率越大, 方差减小指数越小. 其次, 从 PCMC-1, PCMC-2, PCMC-3 3 种方法来看, 高维的多元控制变量比低维的多元控制变量效果要好. 再次, 比较 PCMC-2 和 PCMC-4, 发现后者的方差减小指数略大一些, 尤其当波动率较大时. 这是由于 C^2 作为贴现收益函数的近似值时, 比 C_1, C_2 的组合要准确一些. 在 PCMC-3 和 PCMC-5 之间也有类似的结果.

改变特征值比例 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 和 $\frac{\lambda_1}{\lambda_3}$ 的大小, 下面比较各种控制变量方法的加速效果, 结果见表 4. 表 4 上半部分

是固定 $\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = 1 : 1$, 可以看出方差减小指数随着波动率的减小而增大. 表 4 的下半部分固定 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 4 : 1$, 也有类似的结论.

表 4 $\lambda_1 = 0.5$, λ_2, λ_3 取不同值时的方差减小指数

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$	$\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$	PCMC-1	PCMC-2	PCMC-3	PCMC-4	PCMC-5
1	1	5	8	16	10	28
4	1	68	96	166	138	346
10	1	419	580	945	862	2 026
4	1	68	96	166	138	346
4	5	109	209	267	3 478	7 943
4	10	136	343	348	13 936	31 408

2.2 亚式期权定价问题

亚式期权是一种典型的路径依赖期权, 它的收益函数取决于标的资产在期权有效期内的平均表现. 其定价问题也是一个多因子期权定价问题. 亚式期权在到期日的收益分两大类: 固定敲定价格或浮动敲定价格^[11]. 标的资产的平均表现可以是算术平均也可以是几何平均, 即

$$\bar{S}_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i) \quad \text{或} \quad \bar{S}_G = \left(\prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{\frac{1}{n}}$$

考虑一个固定敲定价格的欧式看涨算术平均亚式期权, 其在到期日的收益函数为

$$h_A = (\bar{S}_A - K)^+ = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i) - K \right)^+$$

假设标的资产服从几何布朗运动, 即

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r dt + \sigma dW(t)$$

如果对时间作等距剖分, 记 $t_j = \frac{jT}{n}$, $j = 0, 1, \dots, n$. 则标的资产在时间节点 t_j 处的价格为

$$S(t_j) = S(0) \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t_j + \sigma W(t_j) \right] \quad j = 1, 2, \dots, n$$

其中: $S(0)$ 是初始股价, r 是市场无风险利率, σ 是波动率, 向量 $\mathbf{W} = (W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_n))^T$ 定义了布朗运动的路径. 显然, \mathbf{W} 是一个正态随机向量, 均值为零, 协方差矩阵为

$$\Sigma = (\min(t_i, t_j)) = \frac{T}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad (16)$$

此时, 期权定价问题即为求解

$$V_A = E[e^{-rT} h_A] = E[e^{-rT} h_A(\mathbf{W})] \quad (17)$$

考虑一个具体的例子, 到期日为 $T=1$, $n=32$, 则式(16)中的协方差矩阵 Σ 的特征值衰减得很快, 最大的 5 个特征值分别是 13.380 2, 1.189 0, 0.537 7, 0.275 6 和 0.167 8, 其累计贡献率分别是 81%, 90%, 93%, 95% 及 96%. 这说明布朗路径的主要方差可以由前面少数几个主成分决定. 对于一般情形, 文献[12]分析了一般情形下布朗路径协方差矩阵的特征值的衰减规律.

对于欧式算数平均亚式期权, 一般无法得到其封闭解. 但容易得到其对应的几何平均亚式期权的价格^[13-14], 从而可以使用几何平均的亚式期权作为控制变量^[3].

2.2.1 实验 3: 固定敲定价格的欧式看涨算数平均亚式期权

下面讨论固定敲定价格的欧式看涨算术平均亚式期权的定价问题(17). 令

$$\begin{aligned} S(0) &= 10 & K &= 8 & r &= 0.05 \\ T &= 1 & \sigma &= 0.5 \end{aligned}$$

针对不同控制变量方法的试验结果如表 5 所示. 其中 k 是满足累计贡献率 $\psi_k \geq 95\%$ 的主成分的最小个数. PCMC-1 表示采用 C_1 作为一元控制变量, PCMC-2 表示用 C_1, C_2, \dots, C_k 作为多元控制变量, PCMC-3 表示使用所有的 C_1, C_2, \dots, C_n 作为多元控制变量. PCMC-4 表示用 C^2, C_3, \dots, C_k 作为多元控制变量, PCMC-5 表示使用 C^2, C_3, \dots, C_n 作为多元控制变量. GMC 表示采用对应的几何平均亚式期权作为控制变量.

表 5 观察点个数不同时亚式期权的方差减小指数

n	k	PCMC-1	PCMC-2	PCMC-3	PCMC-4	PCMC-5	GMC
4	3	84	309	323	1 752	2 333	245
8	4	78	312	325	1 545	1 918	258
16	4	75	313	331	1 388	1 860	259
32	4	75	318	340	1 357	1 869	257
64	5	74	329	342	1 541	1 849	255
128	5	74	330	344	1 555	1 871	254

从表 5 可以看出, 对不同的观察点个数而言, 各种控制变量方法的方差减小指数是比较稳定的. 所有的多元 PCMC 方法都比 GMC 方法要好. 如同我们在前面提过, (16)式中的协方差矩阵 Σ 的特征值衰减得

很快, 所以只需较小的 k 就会使得累计贡献率 ψ_k 很大. 比如, 当 $n=128$ 时, 前 5 个主成分就能解释 95% 的原始信息.

取 $n=32, k=8$, 考察波动率对方差减小效果的影响. 不失一般性, 主要考虑方法 PCMC-2 和 PCMC-4. 具体结果见图 1. 显然, 随着波动率的增加, 各种控制变量方法的平方相关系数均下降. 综合而言, 我们提出的 PCMC-4 方法最稳定, 具有最好的方差减小指数, 尤其适合波动率较大的情况.

最后, 考察不同到期日 T 的影响, 见图 2. 显然, GMC 的平方相关系数随着到期日的增加下降最快, 而我们提出的 PCMC 方法则相对十分稳定从而具有很好的加速效果.

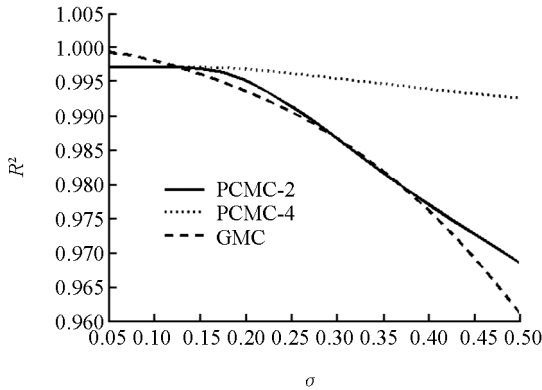


图 1 不同波动率时控制变量方法的平方相关系数, $T=1$

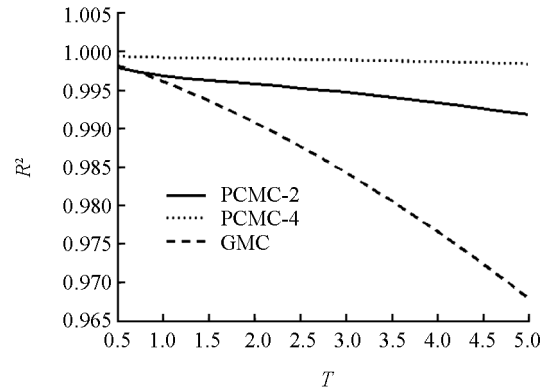


图 2 不同到期日时控制变量方法的平方相关系数, $\sigma=0.5$

3 结 论

在本文中, 对于具有多个随机因子的欧式期权定价问题, 基于标的资产状态变量的主成分变换构造了一系列的控制变量. 数值结果说明, 使用多个主成分控制变量方法可以大大提高蒙特卡罗模拟的效率, 并且加速效果比较稳定. 相对于使用几何平均的期权作为控制变量而言, 本文提出的方法在各种参数下都具有更好的效果.

本文提出的通过主成分来构造控制变量的方法也可以推广到其它多因子定价模型, 如高维的随机波动率模型以及随机利率模型下的衍生产品定价问题.

参考文献:

- [1] BLACK F, SCHOLES M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities [J]. The Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-654.
- [2] GLASSERMAN P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering [M]. Beijing: Higher Education Press, 2008.
- [3] KEMNA A G Z, VORST A C F. A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values [J]. Journal of Banking and Finance, 1990, 14(1): 123-129.
- [4] BARRAQUAND J. Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate European Securities [J]. Management Science, 1995, 41(12): 1882-1891.
- [5] PELLIZARI P. Efficient Monte Carlo Pricing of European Options Using Mean Value Control Variates [J]. Decisions in Economics and Finance, 2001, 24(2): 107-126.
- [6] BOROGOVAC T, VAKILI P. Control Variate Technique: A Constructive Approach [C]// Simulation Conference, 2008. New York: IEEE Computer Society Press, 2008: 320-327.
- [7] DINGEÇ K D, HÖRMANN W. Control Variates and Conditional Monte Carlo for Basket and Asian Options [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2013, 52(3): 421-434.
- [8] MEHRDOUST F, BABAEI S, FALLAH S. Efficient Monte Carlo Option Pricing under CEV Model [J]. Communication in Statistics-Simulation and Computation, 2017, 46(3): 2254-2266.

- [9] HÄRDLE W, SIMAR L. Applied Multivariate Statistical Analysis [M]. Berlin: Springer Press, 2003.
- [10] L'ECUYER P, PARENT-CHARTIER J S, DION M. Simulation of a Lévy Process by PCA Sampling to Reduce the Effective Dimension [C]// Proceedings of the 2008 Winter Simulation Conference. New York: IEEE Computer Society Press, 2009: 436–443.
- [11] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法 [M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [12] AKESSON F, LEHOCZKY J. Discrete Eigenfunction Expansion of Multi-Dimensional Brownian Motion and the Ornstein-Uhlenbeck Process [J]. Eprint Arxiv, 1998, 7(4): 729–738.
- [13] KAMIZONO K, KARIYA T, LIU RY, et al. A New Control Variate Estimator for an Asian Option [J]. Asian-Pacific Financial Markets, 2004, 11(2): 143–160.
- [14] TURNBULL S, WAKEMAN L. A Quick Algorithm for Pricing European Average Options [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1991, 26(3): 377–389.

An Efficient Principal Component Monte Carlo Method for Pricing European Options with Multi-Factors

LIANG Yi-juan¹, XU Cheng-long², MA Jun-mei²

1. School of Economics and Management, Southwest University, Chongqing 400715, China;

2. School of Mathematics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China

Abstract: This paper constructs a framework of accelerating Monte Carlo simulation for pricing European options with multiple stochastic factors. The underlying principle of the technique is that if all stochastic factors in the payoff function are replaced by some important principal components (PCs), the resulting integral can easily be evaluated in a closed form, and thus the approximated payoff can be used as a control variate. Due to the independence of the PCs, Monte Carlo simulations with multiple control variates are always more effective than the ones with a univariate control. Numerical tests designed for portfolio options and Asian options verify the efficiency and stability of our method.

Key words: option pricing; principal component analysis; Monte Carlo simulation; multiple control variate

责任编辑 张 杓

