第 40 卷第 2 期　西南大学学报(自然科学版)　2018 年 2 月
Vol. 40 No. 2　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　Feb. 2018

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.02.006

一个准模糊图拟阵的新特征①

吴德垠

重庆大学 数学与统计学院，重庆 401331

摘要： 首先定义模糊拟阵的"元好"概念，并构造了具有"元好"性质的闭模糊拟阵模糊基的结构定理；然后，证明了闭模糊拟阵为准模糊图拟阵的充要条件就是"元好"；最后，用"元好"概念，构建了准模糊图拟阵的又一个模糊基公理.

关 键 词： 拟阵；模糊拟阵；准模糊图拟阵；模糊基集；模糊基公理；元好

中图分类号： O157；O159　**文献标志码：** A　**文章编号：** 1673-9868(2018)02-0035-05

1996 年，文献[1]通过从模糊图产生的模糊图拟阵中提取其特性，定义了"准模糊图拟阵". 在文献[1]中，作者指出了准模糊图拟阵的两个特性"圈好"和"基好"，并找到了用模糊基的"交换性"来描述的准模糊图拟阵的"模糊基公理"[1]. 本文将定义准模糊图拟阵的第三个特性"元好"，然后，通过"元好"特性来进一步讨论准模糊图拟阵的充要条件和"模糊基公理".

1 预备知识

设 $E=\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ 是一个集合，则 E 上的模糊集，μ 是一个映射 $\mu: E \to [0, 1]$. E 上模糊集的全体记为 $F(E)$. $\forall \mu, \nu \in F(E)$，有下列概念和记法：

(1) $\mathrm{supp}\mu=\{x \in E \mid \mu(x)>0\}$ 称为 μ 的支撑集；

(2) 若 $\mathrm{supp}\mu=\phi$(空集)，则称为模糊空集；

(3) $m(\mu)=\inf\{\mu(x) \mid x \in \mathrm{supp}\mu\}$，$R^+(\mu)=\{\mu(x) \mid \mu(x)>0\}$；

(4) $\forall r \in [0, 1]$，记 $C_r(\mu)=\{x \in E \mid \mu(x) \geqslant r\}$，称为 μ 的 r-水平割集；

(5) $\mu \wedge \nu=\min\{\mu, \nu\}$ 称为 μ 和 ν 的交，$\mu \vee \nu=\max\{\mu, \nu\}$ 称为 μ 和 ν 的并；

(6) 若 $\forall x \in E$，有 $\mu(x) \leqslant \nu(x)$，则称模糊集 μ 被包含于模糊集 ν 中，记为 $\mu \leqslant \nu$. 如果 $\mu \leqslant \nu$ 且存在 $x \in E$ 使得 $\mu(x)<\nu(x)$，则称模糊集 μ 被真包含于模糊集 ν 中，记为 $\mu<\nu$.

容易证明：$\mu \leqslant \nu (\forall r \in (0, 1]$，都 $C_r(\mu) \subseteq C_r(\nu))$；

(7) $\forall x \in E$，$\forall \lambda \in [0, 1]$，符号"$x^\lambda$"表示模糊集.

$$x^\lambda(y)=\begin{cases}0 & y \in E \backslash \{x\} \\ \lambda & y=x\end{cases}$$

许多文献也称"x^λ"为"模糊点"或"模糊数".

(8) $\forall \mu \in F(E)$，$\forall a \in \mathrm{supp}\mu$，符号"$\mu \backslash\backslash a$"表示模糊集：

$$(\mu \backslash\backslash a)(x)=\begin{cases}0 & x=a \\ \mu(x) & x \neq a\end{cases}$$

(9) $\forall \mu_1, \mu_2 \in F(E)$，$\forall x' \in \mathrm{supp}\mu_2$，定义模糊集 $\mu_1 ||_{\mu_2} e'$ 为：

---

① 收稿日期：2017-05-08
基金项目：国家自然科学基金项目(61374078).
作者简介：吴德垠(1955-)，男，重庆璧山人，硕士，教授，主要从事模糊拟阵的研究.

$$(\mu_1 \,||_{\mu_2} e')(x) = \begin{cases} \mu_2(x) & x = e' \\ \mu_1(x) & x \neq e' \end{cases}$$

(10) 如果 $\forall \mu \in F(E)$，$|\mu| = \sum_{x \in E} \mu(x)$ 称为模糊集 μ 的势；

(11) 如果 $\forall \mu \in F(E)$，$\mathrm{supp}\mu = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$，$\mu(x_i) = \lambda_i \in (0, 1]$($\forall x_i \in \mathrm{supp}\mu$，$i = 1, 2, \cdots, k$)，根据模糊集合的分解定理[2] 有

$$\mu = \omega(C_{\lambda_1}(\mu), \lambda_1) \vee \omega(C_{\lambda_2}(\mu), \lambda_2) \vee \cdots \vee \omega(C_{\lambda_k}(\mu), \lambda_k)$$

定义 1[3]　设 $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ 是非空有限集，I 是 E 的子集族. 若 I 满足下列条件：

(1) $\phi \in I$；

(2) 若 $X \in I$，$Y \subseteq X$，则 $Y \in I$；

(3) 若 $X, Y \in I$，$|Y| = |X| + 1$，则有 $x \in Y \backslash X$，使得 $X \cup \{x\} \in I$.

则称对偶(E, I)为 E 上的一个拟阵，记为 $\boldsymbol{M} = (E, I)$. $\forall X \subseteq E$，如果 $X \in I$，则称 X 为 $\boldsymbol{M}$ 的独立集，否则称为 $\boldsymbol{M}$ 的相关集. $\boldsymbol{M}$ 的最大(指集合的势)独立集，称为 $\boldsymbol{M}$ 的基. $\boldsymbol{M}$ 的最小(指集合的势)相关集，称为 $\boldsymbol{M}$ 的圈. 如果 $C \subseteq E$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的圈，并且 $|C| = 1$，则称 C 是 $\boldsymbol{M}$ 的环.

定理 1[3](增广定理)　设 $\boldsymbol{M} = (E, I)$ 是拟阵，$X, Y \in I$ 且 $|X| < |Y|$，则存在 $Z \subseteq Y \backslash X$，使得

$$|X \cup Z| = |Y|$$

且

$$X \cup Z \in I$$

定理 2[3](基公理)　设 E 是有限非空集合，B 是 E 的非空子集族. B 是关于 E 的一个拟阵的基集(全体基组成的集合)当且仅当 B 满足下列条件：

(1) 若 $B_1, B_2 \in B$，则

$$|B_1| = |B_2|$$

(2) 若 $B_1, B_2 \in B$，$x \in B_1$，则存在 $y \in B_2$，使

$$(B_1 \backslash \{x\}) \cup \{y\} \in B$$

定义 2[4]　设 $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ 是非空有限集，$\ell \subseteq F(E)$ 是一个满足下列条件的非空模糊集族：

(1) (继承性) 若 $\mu \in \ell$，$\nu \in F(E)$，$v \leqslant \mu$，则 $\nu \in \ell$；

(2) (交换性) 若 $\mu, \nu \in \ell$，$|\mathrm{supp}\mu| < |\mathrm{supp}\nu|$，则存在 $\omega \in \ell$ 使

(a) $\mu < \omega \leqslant \mu \vee \nu$；

(b) $m(\omega) \geqslant \min\{m(\mu), m(\nu)\}$.

则称对偶 $\boldsymbol{M} = (E, \ell)$ 是 E 上的模糊拟阵，ℓ 称为 $\boldsymbol{M}$ 的独立模糊集族. $\forall \mu \in F(E)$，如果 $\mu \in \ell$，则称 μ 为 $\boldsymbol{M}$ 的独立模糊集，否则(即 $\mu \in F(E) \backslash \ell$)称为 $\boldsymbol{M}$ 的相关模糊集. $\boldsymbol{M}$ 的最大(指模糊集合的势)独立模糊集，称为 $\boldsymbol{M}$ 的模糊基. 如果 μ 是 $\boldsymbol{M}$ 的相关模糊集，但 $\forall a \in \mathrm{supp}\mu$ 都使 $\mu \backslash\backslash a \in \ell$，则称 μ 是 $\boldsymbol{M}$ 的模糊圈[5]. 如果 μ 是 $\boldsymbol{M}$ 的模糊圈且 $|\mathrm{supp}\mu| = 1$，则称 μ 是 $\boldsymbol{M}$ 的模糊环.

定理 3[4]　设 $\boldsymbol{M} = (E, \ell)$ 是模糊拟阵，$\forall r \in (0, 1]$，令

$$I_r = \{C_r(\mu) \mid \forall \mu \in \ell\}$$

则 $\boldsymbol{M}_r = (E, I_r)$ 是 E 上的拟阵.

定理 4[4]　假设和符号同定理 3，则有一个有限实数列 $r_0 < r_1 < \cdots < r_n$，使

(1) $r_0 = 0$，$r_n \leqslant 1$；

(2) 当 $0 < r \leqslant r_n$ 时，$I_r \neq \phi$；当 $r > r_n$ 时，$I_r = \phi$；

(3) 若 $\forall s, t \in (r_i, r_{i+1})$，则 $I_s = I_t \ (0 \leqslant i \leqslant n-1)$；

(4) 若 $r_i < s < r_{i+1} < t < r_{i+2}$，则 $I_s \supset I_t \ (0 \leqslant i \leqslant n-2)$.

我们称序列 $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n \leqslant 1$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的基本序列.

对 $1 \leqslant i \leqslant n$，设 $\bar{r}_i = (r_{i-1} + r_i)/2$，称子拟阵序列

$$\boldsymbol{M}_{\bar{r}_1} = (E, I_{\bar{r}_1}) \supset \boldsymbol{M}_{\bar{r}_2} = (E, I_{\bar{r}_2}) \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{\bar{r}_n} = (E, I_{\bar{r}_n})$$

为 $\boldsymbol{M}$ 的导出拟阵序列. 若 $\boldsymbol{M}_{\bar{r}_i} = \boldsymbol{M}_{r_i} \ (i = 1, 2, \cdots, n)$，则称 $\boldsymbol{M}$ 是闭模糊拟阵.

定理 5[6]　设 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是模糊拟阵，则 $\boldsymbol{M}$ 是闭模糊拟阵的充要条件是 $\forall \mu \in F(E)$，都有 $\boldsymbol{M}$ 的一个模糊基 ν，使得 $\mu \leqslant \nu$.

定义 3[1]　设 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是模糊拟阵，$0=r_0<r_1<\cdots<r_n \leqslant 1$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的基本序列，导出拟阵序列为

$$\boldsymbol{M}_{\bar{r}_1}=(E, I_{\bar{r}_1}) \supset \boldsymbol{M}_{\bar{r}_2}=(E, I_{\bar{r}_2}) \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{\bar{r}_n}=(E, I_{\bar{r}_n})$$

其中，$1 \leqslant i \leqslant n$，$\bar{r}_i=(r_{i-1}+r_i)/2$. 如果 $C \subseteq E$ 是 $\boldsymbol{M}_{\bar{r}_i}(i=1, 2, \cdots, n)$ 的任何非环圈，那么 C 也是 $\boldsymbol{M}_{\bar{r}_1}$ 的非环圈，则称 $\boldsymbol{M}$ 是圈好的模糊拟阵. μ，ν 表示 $\boldsymbol{M}$ 的任何两个模糊基，如果 $\mu=\nu \Leftrightarrow \operatorname{supp}\mu=\operatorname{supp}\nu$，则称模糊拟阵 $\boldsymbol{M}$ 是基好的模糊拟阵.

定义 4[1]　设 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是闭模糊拟阵，而且也是圈好模糊拟阵，则称 $\boldsymbol{M}$ 是准模糊图拟阵.

定理 6[1]　设 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是闭模糊拟阵，$0=r_0<r_1<\cdots<r_n \leqslant 1$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的基本序列，导出拟阵序列为

$$\boldsymbol{M}_{r_1}=(E, I_{r_1}) \supset \boldsymbol{M}_{r_2}=(E, I_{r_2}) \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{r_n}=(E, I_{r_n})$$

$\forall \mu \in F(E)$，则 μ 是 $\boldsymbol{M}$ 的一个模糊基 $\Leftrightarrow \operatorname{supp}\mu=C_{r_1}(\mu)$ 是 $\boldsymbol{M}_{r_1}$ 的基，$C_{r_i}(\mu)$ 是 $C_{r_{i-1}}(\mu)$ 在 $\boldsymbol{M}_{r_i}$ 中的极大独立子集$(i=1, 2, \cdots, n)$，而且 $R^+(\mu) \subseteq \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$.

定理 7[1]　设 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是闭模糊拟阵，B 为其模糊基集，则下列论述等价：

(1) $\boldsymbol{M}$ 是基好的；

(2) $\forall \mu_1, \mu_2 \in B$，若 $\operatorname{supp}\mu_1 \cap \operatorname{supp}\mu_2 \neq \phi$，则对 $\forall e \in \operatorname{supp}\mu_1 \cap \operatorname{supp}\mu_2$，都有 $\mu_1(e)=\mu_2(e)$；

(3) $\boldsymbol{M}$ 是圈好的.

定理 8[1]（准模糊图拟阵的模糊基公理）　设 E 是有限集，$B \subseteq F(E)$，则 B 是某准模糊图拟阵的模糊基集 $\Leftrightarrow B$ 满足下列条件：

(1) $\forall \mu_1, \mu_2 \in B$，若 $\mu_1 \leqslant \mu_2$，则 $\mu_1=\mu_2$；

(2) $\forall \mu_1, \mu_2 \in B$，都有 $|\operatorname{supp}\mu_1|=|\operatorname{supp}\mu_2|$；

(3) $\forall \mu_1, \mu_2 \in B$，任 $e \in \operatorname{supp}\mu_1$，都有 $e' \in \operatorname{supp}\mu_2$ 使 $(\mu_1 \backslash\backslash e)||_{\mu_2} e' \in B$.

2　准模糊图拟阵的新模糊基公理

受前面定理 7 中(2)的启发，是否可以通过确定有限非空集合 E 中每个元素在模糊基中的模糊隶属度来描述准模糊图拟阵的模糊基公理？下面，我们就来讨论这个问题.

定义 5　设 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是模糊拟阵，$\forall e \in E$，若有 $\boldsymbol{M}$ 的模糊基 μ，使 $e \in \operatorname{supp}\mu$，令 $\lambda_e=\mu(e)$. 如果对 $\boldsymbol{M}$ 的任意模糊基 ν，只要 $e \in \operatorname{supp}\nu$，都有 $\nu(e)=\lambda_e$，则我们称模糊拟阵 $\boldsymbol{M}$ 具有元好性.

根据定理 7 的(2)，很容易得到以下命题：

命题 1　设 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是准模糊图拟阵，则 $\boldsymbol{M}$ 具有元好性.

如果 $\boldsymbol{M}$ 是具有元好性的闭模糊拟阵，那么 $\boldsymbol{M}$ 的模糊基由其支撑集唯一确定. 以下这个定理，可以看作是具有元好性的闭模糊拟阵模糊基结构定理.

定理 9　设 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是一个不含模糊环的具有元好性的闭模糊拟阵，$0=r_0<r_1<\cdots<r_n \leqslant 1$ 为其基本序列，$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$，则有实数多重(即 A 中的元素可能有重复)集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\} \subseteq \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ 和映射 $f: E \rightarrow A$，使对 $\boldsymbol{M}$ 的任何模糊基 μ，都有

$$\mu=\bigvee_{e_j \in \operatorname{supp}\mu} e_j^{f(e_j)}$$

且

$$|\mu|=\sum_{e_j \in \operatorname{supp}\mu} f(e_j)$$

证　对 $\forall e_i \in E$，由于 $\boldsymbol{M}$ 没有模糊环，因此，必有 $\mu \in \ell$，使 $e_i \in \operatorname{supp}\mu$. 又由 $\boldsymbol{M}$ 是闭模糊拟阵，因此，有 $\boldsymbol{M}$ 的模糊基 ν，使 $\mu \leqslant \nu$. 那么，更有 $e_i \in \operatorname{supp}\nu$. 此时，令 $a_i=\nu(e_i)$，由定理 6，$a_i \in \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$. 这样得到实数多重集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\} \subseteq \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$. 再构造映射 $f: E \rightarrow A$，使 $f(e_i)=a_i(i=1, 2, \cdots, m)$.

$\forall e_i \in E$，由元好性知，对 $\boldsymbol{M}$ 的任何模糊基 ν，只要 $e_i \in \operatorname{supp}\nu$，都有 $\nu(e_i)=f(e_i)=a_i$.

因此，对 $\boldsymbol{M}$ 的任何模糊基 μ，若 $\mathrm{supp}\mu=\{e_1, e_2, \cdots, e_h\}$，都有

$$\mu=e_1^{f(e_1)} \vee e_2^{f(e_2)} \vee \cdots \vee e_h^{f(e_h)}=\bigvee_{e_j \in \mathrm{supp}\mu} e_j^{f(e_j)}$$

$$|\mu|=\sum_{e_j \in \mathrm{supp}\mu} \mu(e_j)=\sum_{e_j \in \mathrm{supp}\mu} f(e_j)$$

下面，我们利用模糊拟阵的元好性来得到本文的两个主要结论.

定理 10 设 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是一个闭模糊拟阵，则 $\boldsymbol{M}$ 是准模糊图拟阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{M}$ 具有元好性.

证 必要性就是命题 1. 为了证明充分性，我们需要证明 $\boldsymbol{M}$ 具有圈好性.

设 $0=r_0<r_1<\cdots<r_n \leqslant 1$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的基本序列，其导出拟阵序列为

$$\boldsymbol{M}_{r_1}=(E, I_{r_1}) \supset \boldsymbol{M}_{r_2}=(E, I_{r_2}) \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{r_n}=(E, I_{r_n})$$

反证，假设 $\boldsymbol{M}$ 不具有圈好性. 即存在 $\boldsymbol{M}_{r_i}=(E, I_{r_i})(1<i \leqslant n)$ 的非环圈 $C \subseteq E$，使 C 不是 $\boldsymbol{M}_{r_1}=(E, I_{r_1})$ 的非环圈. 由于

$$\boldsymbol{M}_{r_1}=(E, I_{r_1}) \supset \boldsymbol{M}_{r_i}=(E, I_{r_i})$$

因此，C 也不能是 $\boldsymbol{M}_{r_1}$ 的其他模糊相关集，即 $C \in I_{r_1}$.

根据定理 1，可将 C 扩充为 $\boldsymbol{M}_{r_1}$ 的基 $B \supseteq C$. 由于 $C \in I_{r_1}$，$C \notin I_{r_i}$ 以及 $I_{r_i} \subset I_{r_1}$，因此有 $k \in \{1, 2, \cdots, i-1\}$，使当 $k \geqslant j(j=1, \cdots, k)$ 时，$C \in I_{r_j}$，而 $C \notin I_{r_{k+1}}$. 又由 $I_{r_i} \subseteq I_{r_{k+1}}$，$C$ 是 $\boldsymbol{M}_{r_i}$ 的非环圈，因此，C 也是 $\boldsymbol{M}_{r_{k+1}}$ 的非环圈.

由 $B \supseteq C$，可取 B 的在 $\boldsymbol{M}_{r_2}$ 中的包含 C 的极大独立子集 A_2，取 A_2 的在 $\boldsymbol{M}_{r_3}$ 中的包含 C 的极大独立子集 A_3，…，取 A_{k-1} 的在 $\boldsymbol{M}_{r_k}$ 中的包含 C 的极大独立子集 A_k；由于 C 是 $\boldsymbol{M}_{r_{k+1}}$ 的非环圈，因此，$A_k \supseteq C$ 在 $\boldsymbol{M}_{r_{k+1}}$ 中的极大独立子集至少有两个 A'_{k+1} 和 $A''_{k+1}(A'_{k+1} \neq A''_{k+1})$. 分别取 A'_{k+1} 和 A''_{k+1} 在 $\boldsymbol{M}_{r_{k+2}}$ 中的极大独立子集 A'_{k+2} 和 A''_{k+2}，…，分别取 A'_{n-1} 和 A''_{n-1} 在 $\boldsymbol{M}_{r_n}$ 中的极大独立子集 A'_n 和 A''_n. 构造模糊集：

$$\mu_1=\omega(B, r_1) \vee \omega(A_2, r_2) \vee \cdots \vee \omega(A_k, r_k) \vee \omega(A'_{k+1}, r_{k+1}) \vee \omega(A'_{k+2}, r_{k+2}) \vee \cdots \vee \omega(A'_n, r_n)$$

$$\mu_2=\omega(B, r_1) \vee \omega(A_2, r_2) \vee \cdots \vee \omega(A_k, r_k) \vee \omega(A''_{k+1}, r_{k+1}) \vee \omega(A''_{k+2}, r_{k+2}) \vee \cdots \vee \omega(A''_n, r_n)$$

由于

$$A'_{k+1} \neq A''_{k+1}$$

因此

$$\mu_1 \neq \mu_2$$

根据定理 6，μ_1，μ_2 都是 $\boldsymbol{M}$ 的模糊基. 取 $e \in A'_{k+1} \backslash A''_{k+1}$，则根据 μ_1，μ_2 的构造知

$$\mu_1(e)=r_{k+1}>\mu_2(e)=r_k$$

这是因为 $e \in A'_{k+1} \backslash A''_{k+1}$，$e \in C \subseteq A_k$. 这与 $\boldsymbol{M}$ 具有元好性矛盾.

故 $\boldsymbol{M}$ 具有圈好性. 即 $\boldsymbol{M}$ 是准模糊图拟阵.

下面，我们利用准模糊图拟阵的元好性来得到准模糊图拟阵的有一个新的模糊基公理.

定理 11(准模糊图拟阵的新模糊基公理) 设 E 是一个非空有限集，$\Omega \subseteq F(E)$，$B=\{\mathrm{supp}\mu \subseteq E \mid \forall \mu \in \Omega\}$，则 Ω 是某个准模糊图拟阵的模糊基集 $\Leftrightarrow \Omega$ 具有下列性质：

(1) $\Omega \neq \phi$；

(2) $\forall \mu_1, \mu_2 \in \Omega$，若 $\mathrm{supp}\mu_1 \cap \mathrm{supp}\mu_2 \neq \phi$，则 $\forall e \in \mathrm{supp}\mu_1 \cap \mathrm{supp}\mu_2$，都 $\mu_1(e)=\mu_2(e)$；

(3) $\forall B_1, B_2 \in B$，都 $|B_1|=|B_2|$. 而且 $\forall x \in B_1$，都有 $y \in B_2$，使 $(B_1 \backslash \{x\}) \cup \{y\} \in B$.

证 首先证明必要性. 设 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是一个准模糊图拟阵，基本序列为 $0=r_0<r_1<\cdots<r_n \leqslant 1$，

$$\boldsymbol{M}_{r_1}=(E, I_{r_1}) \supset \boldsymbol{M}_{r_2}=(E, I_{r_2}) \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{r_n}=(E, I_{r_n})$$

为其导出拟阵序列，$\Omega \subseteq F(E)$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的模糊基集.

(1) 由 E 非空，因此，ℓ 非空. 由定理 5 知，$\Omega \neq \phi$.

(2) 由于准模糊图拟阵具有元好性，因此，$\forall \mu_1, \mu_2 \in \Omega$，若

$$\mathrm{supp}\mu_1 \cap \mathrm{supp}\mu_2 \neq \phi$$

则对于 $\forall e \in \mathrm{supp}\mu_1 \cap \mathrm{supp}\mu_2$，都有 $\mu_1(e)=\mu_2(e)$.

(3) 由于 $B=\{\mathrm{supp}\mu \subseteq E \mid \forall \mu \in \Omega\}$，又由导出拟阵序列性质知，$B$ 组成 $\boldsymbol{M}_{r_1}=(E, I_{r_1})$ 的基集. 由拟阵的基公理和定理 3 知本定理的(3) 成立.

下面来证明定理的充分性. 我们证明 Ω 满足定理 8 的 3 个条件.

(1) $\forall \mu_1, \mu_2 \in \Omega$，由已知条件(3) 知：

$$|\operatorname{supp}\mu_1| = |\operatorname{supp}\mu_2|$$

(2) $\forall \mu_1, \mu_2 \in \Omega$，若 $\mu_1 \leqslant \mu_2$，则由 $\operatorname{supp}\mu_1 \subseteq \operatorname{supp}\mu_2$ 和 $|\operatorname{supp}\mu_1| = |\operatorname{supp}\mu_2|$ 知，$\operatorname{supp}\mu_1 = \operatorname{supp}\mu_2$. 再由已知条件(2) 知，$\mu_1 = \mu_2$.

(3) $\forall \mu_1, \mu_2 \in \Omega$，$\forall x \in \operatorname{supp}\mu_1$. 由已知条件(3)，有 $y \in \operatorname{supp}\mu_2$，使得

$$(\operatorname{supp}\mu_1 \backslash \{x\}) \cup \{y\} \in B$$

因此，必有 $\omega \in \Omega$，使 $\operatorname{supp}\omega = (\operatorname{supp}\mu_1 \backslash \{x\}) \cup \{y\}$. 我们下面证明 $\omega = (\mu_1 \backslash\backslash x) ||_{u_2} y$.

由 $\operatorname{supp}\omega = (\operatorname{supp}\mu_1 \backslash \{x\}) \cup \{y\}$ 知，ω 的支撑集由$(\mu_1 \backslash\backslash x)$ 的支撑集和$\{y\}$ 组成. 因此，根据已知条件(2)，$\forall e \in \operatorname{supp}\omega$，当 $e \in \operatorname{supp}(\mu_1 \backslash\backslash x)$ 时，$\omega(e) = (\mu_1 \backslash\backslash x)(e)$；当 $e = y$ 时，由 $y \in \operatorname{supp}\mu_2$ 知，

$$\omega(e) = \mu_2(e) = \mu_2(y)$$

所以，

$$\omega = (\mu_1 \backslash\backslash x) ||_{u_2} y$$

以上证明说明 Ω 满足定理 8 的 3 个条件. 即 Ω 是 E 上某个准模糊图拟阵的模糊基集.

定理 8 和定理 11 的不同，一是定理 8 强调了元好性[即定理中的(2)]，二是将定理 8 的模糊基交换性[定理 8 的(3)] 改为了普通拟阵的基交换性[定理 11 中(3) 的后半部分].

3　结　论

本文通过定义模糊拟阵的“元好” 概念，找到了具有元好性的闭模糊拟阵模糊基结构定理；证明了“元好” 是闭模糊拟阵为准模糊图拟阵的充要条件；通过元好性，给出了准模糊图拟阵的又一个模糊基公理. 这些结论将丰富模糊拟阵理论，促进准模糊图拟阵的研究.

参考文献：

[1]　吴德垠. 准模糊图拟阵 [J]. 重庆大学学报(自然科学版)，1996，19(5)：100－109.

[2]　李安贵，张志宏，孟　艳，等. 模糊数学及其应用 [M]. 2 版. 北京：冶金工业出版社，2005：19－27.

[3]　刘桂真，陈庆华. 拟阵 [M]. 长沙：国防科技大学出版社，1994.

[4]　GOETSCHEL R，VOXMAN W. Fuzzy matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems，1988，27(3)：291－302.

[5]　GOETSCHEL R，VOXMAN W. Fuzzy Circuits [J]. Fuzzy Sets and Systems，1989，32(1)：35－43.

[6]　GOETSCHEL R，VOXMAN W. Bases of Fuzzy Matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems，1989，32(2)：253－261.

The New Character of Quasi-Fuzzy Graph Matroids

WU De-yin

College of Mathematics and Statistics，Chongqing University，Chongqing 401331，China

Abstract：First，the concept of “good-element” in fuzzy matroids is defined in this paper，and the structure theorem of fuzzy bases in closed fuzzy matroids of good-element is constructed. Then，it is proved that “good-element” is the necessary and sufficient condition for a closed fuzzy matroid being a quasi-fuzzy graph matriod. Finally，with the help of the concept “good-element”，another axiom of fuzzy bases is formed for quasi-fuzzy graph matroids.

Key words：matroid；fuzzy matroid；quasi-fuzzy graph matriod；fuzzy base set；axiom of fuzzy bases；good-element

责任编辑　周仁惠