第 40 卷第 2 期　　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　　2018 年 2 月
Vol. 40　No. 2　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Feb.　2018

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.02.007

非负矩阵最大特征值的新界值①

钟　琴

四川大学 锦江学院 数学教学部，四川 彭山 620860

摘要：非负矩阵最大特征值的估计是非负矩阵理论研究的重要组成部分. 如果上下界能够表示为非负矩阵元素的易于计算的函数，那么这种估计价值更高. 本文通过构造两个收敛的序列得到非负矩阵最大特征值的新界值. 数值算例表明其结果比有关结论更加精确.

关　键　词：新界值；非负矩阵；最大特征值

中图分类号：O151.21　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2018)02－0040－04

非负矩阵理论作为一种基本工具，被广泛应用于计算数学、线性规划、计算机科学、自动控制等领域中. 对非负矩阵最大特征值进行估计是非负矩阵理论研究的重要课题之一. 许多学者都致力于这方面的研究，并取得了一系列的研究成果[1-7].

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的所有元素 $a_{ij}\geqslant 0$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为非负矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$；若 $a_{ij}>0$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正矩阵，记为 $\boldsymbol{A}>0$，用 $\rho(\boldsymbol{A})$ 表示 n 阶非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，如果存在一个置换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 分别是 k，l 阶方阵，$k\geqslant 1$ 和 $l\geqslant 1$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是可约矩阵，否则称 $\boldsymbol{A}$ 是不可约矩阵.

非负矩阵最大特征值的最有名且用的最多的界值是由 Frobenius[1] 提出的. 设 $r_i=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}$，$c_j=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kj}$，$\min\limits_{i}r_i=r$，$\max\limits_{i}r_i=R$，$i,j\in[n]$.

定理 1[1]（Frobenius 界值）　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$，则

$$r\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant R \tag{1}$$

对于列和也有相同的结论.

对于具有非零行和的非负矩阵，文献[2] 对(1) 式进行了改进，有

$$\min_{i}\left(\frac{1}{r_i}\sum_{t=1}^{n}a_{it}r_t\right)\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\max_{i}\left(\frac{1}{r_i}\sum_{t=1}^{n}a_{it}r_t\right)$$

正矩阵是非负矩阵的子类，具有非负矩阵的所有性质. 文献[4－6] 在(1) 式的基础上给出了正矩阵最大特征值的界值定理.

本文通过构造 2 个收敛的序列，将非负矩阵最大特征值的上下界表示为矩阵元素的易于计算的函数，所得结果改进了经典的 Frobenius 界值定理.

1　主要结论

引理 1[2]　设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

① 收稿日期：2017－02－13
基金项目：国家自然科学基金面上项目(11471225)；四川省教育厅自然科学研究项目(13ZB0357)；四川大学锦江学院青年教师科研(12130219).
作者简介：钟　琴(1982－)，女，四川自贡人，副教授，主要从事矩阵理论及应用研究.

和 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ 的特征向量，则

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_ir_i(\boldsymbol{A}),\ \lambda\sum_{j=1}^{n}y_j=\sum_{j=1}^{n}y_jc_j(\boldsymbol{A})$$

引理 2[2] 若 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 是正实数，则对任意实数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，有

$$\min_i\frac{p_i}{q_i}\leqslant\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\leqslant\max_i\frac{p_i}{q_i}$$

引理 3[7] 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$r_i(\boldsymbol{A}^k)$，$c_j(\boldsymbol{A}^k)$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}^k$ 的第 i 行行和与第 j 列列和，则

$$r_i(\boldsymbol{A}^{k+1})=\sum_{t=1}^{n}a_{it}r_t(\boldsymbol{A}^k),\ c_j(\boldsymbol{A}^{k+1})=\sum_{t=1}^{n}a_{tj}c_t(\boldsymbol{A}^k)$$

下面给出本文关于非负矩阵最大特征值的估计结果：

定理 2 设不可约矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$ 具有非零行和以及以及非零列和，令

$$\alpha=\max_i\{a_{ii}\},\ B=(\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{I})^{n-1}$$

则对任意的正整数 m,k，有

$$\min_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{r_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\max_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{r_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}\tag{2}$$

$$\min_i\left[\frac{c_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{c_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\max_i\left[\frac{c_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{c_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}\tag{3}$$

证 根据 $r_i(\boldsymbol{A})\neq 0$，可得

$$r_i(\boldsymbol{B})=\alpha+r_i(\boldsymbol{A})\neq 0$$

进一步有

$$r_i(\boldsymbol{B}^k)\neq 0$$

设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}>0$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 对应于 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的特征向量，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\rho(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$，则有

$$(\boldsymbol{B}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=(\rho(\boldsymbol{A})+\alpha)^{k(n-1)}\boldsymbol{X}$$

$$(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\rho^m(\boldsymbol{A})(\rho(\boldsymbol{A})+\alpha)^{k(n-1)}\boldsymbol{X}$$

由引理 1 可知

$$(\rho(\boldsymbol{A})+\alpha)^{k(n-1)}\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_ir_i(\boldsymbol{B}^k)$$

$$\rho^m(\boldsymbol{A})(\rho(\boldsymbol{A})+\alpha)^{k(n-1)}\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_ir_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)$$

于是

$$\rho^m(\boldsymbol{A})=\frac{\rho^m(\boldsymbol{A})(\rho(\boldsymbol{A})+\alpha)^{k(n-1)}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{(\rho(\boldsymbol{A})+\alpha)^{k(n-1)}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_ir_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_ir_i(\boldsymbol{B}^k)}$$

再由引理 2 得

$$\min_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{r_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]=\min_i\left[\frac{x_ir_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{x_ir_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]\leqslant\rho^m(\boldsymbol{A})\leqslant\max_i\left[\frac{x_ir_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{x_ir_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]=\max_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{r_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]$$

故(2)式得证，同理可证(3)式成立.

定理 3 设不可约矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$ 具有非零行和以及非零列和，令

$$\alpha=\max_i\{a_{ii}\},\ \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{I})^{n-1}$$

其中：则对任意的正整数 m,k，

$$\lim_{k\to\infty}\min_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{r_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}\qquad\lim_{k\to\infty}\max_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{r_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$\lim_{k\to\infty}\min_i\left[\frac{c_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{c_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}\qquad\lim_{k\to\infty}\max_i\left[\frac{c_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{c_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}$$

都存在，且有

$$\lim_{k\to\infty}\min_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{r_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\lim_{k\to\infty}\max_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{r_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}\tag{4}$$

$$\lim_{k\to\infty}\min_i\left[\frac{c_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{c_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\lim_{k\to\infty}\max_i\left[\frac{c_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{c_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}\tag{5}$$

证　由引理 3 及引理 2 可知：

$$\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^{k+1})}{r_i(\boldsymbol{B}^{k+1})}=\frac{\sum_{t=1}^n b_{it}r_t(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{\sum_{t=1}^n b_{it}r_t(\boldsymbol{B}^k)}\leqslant\max_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{r_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]$$

即

$$\max_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{r_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}\geqslant\max_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^{k+1})}{r_i(\boldsymbol{B}^{k+1})}\right]^{\frac{1}{m}}$$

所以序列$\left\{\max_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{r_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}\right\}$单调递减且有下界$\rho(\boldsymbol{A})$，从而极限存在.

同理

$$\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^{k+1})}{r_i(\boldsymbol{B}^{k+1})}=\frac{\sum_{t=1}^n b_{it}r_t(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{\sum_{t=1}^n b_{it}r_t(\boldsymbol{B}^k)}\geqslant\min_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{r_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]$$

即

$$\min_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{r_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}\leqslant\min_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^{k+1})}{r_i(\boldsymbol{B}^{k+1})}\right]^{\frac{1}{m}}$$

所以序列$\left\{\min_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{r_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}\right\}$单调递增且有上界$\rho(\boldsymbol{A})$，从而极限存在. 根据定理 5 知：

$$\min_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^{m+k})}{r_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\max_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^{m+k})}{r_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}$$

两边同时取极限得

$$\lim_{k\to\infty}\min_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{r_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant\lim_{k\to\infty}\max_i\left[\frac{r_i(\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^k)}{r_i(\boldsymbol{B}^k)}\right]^{\frac{1}{m}}$$

同理可证对列和的结论也成立.

注 1　若 $\boldsymbol{B}^0=\boldsymbol{I}$，当 $m=1$ 时，(2) 式即为 Frobenius 界值.

注 2　若 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 阶非负可约矩阵，则存在 n 阶置换矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1m}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2m}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\cdots&\boldsymbol{A}_{mm}\end{pmatrix}\qquad m\geqslant 2$$

其中块对角线上每块 $\boldsymbol{A}_{ii}\ (1\leqslant i\leqslant m)$ 或为不可约矩阵，或为一阶零矩阵. 显然

$$\rho(\boldsymbol{A})=\rho(\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}})=\max_i\rho(\boldsymbol{A}_{ii})$$

因此对非负可约矩阵，施行合适的置换变换后，同样可以对其最大特征值进行估计.

2 数值算例

例 考虑非负矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 3\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$，真值 $\rho(\boldsymbol{A})=5.741\,657\,38\cdots$. 以下是参考文献[1-2]，[4-5]和本文定理2关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 最大特征值估计的结果比较.

表1 最大特征值的界值比较

	行	列
Frobenius	$4<\rho(\boldsymbol{A})<8$	$5<\rho(\boldsymbol{A})<7$
Minc	$5<\rho(\boldsymbol{A})<6.25$	$5.6<\rho(\boldsymbol{A})<5.857\,2$
Ledermannn	$4.154\,7<\rho(\boldsymbol{A})<7.866\,1$	$5.080\,0<\rho(\boldsymbol{A})<6.925\,9$
Ostrowski	$4.527\,5<\rho(\boldsymbol{A})<7.654\,7$	$5.224\,7<\rho(\boldsymbol{A})<6.816\,5$
Brauer	$4.828\,4<\rho(\boldsymbol{A})<7.464\,2$	$5.372\,2<\rho(\boldsymbol{A})<6.701\,6$
刘丽明($m=k=2$)	$5.683\,6\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant 5.853\,9$	$5.697\,5\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant 6.308\,7$
定理5($m=k=2$)	$5.701\,6\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant 5.791\,4$	$5.719\,6\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\leqslant 5.764\,3$

由表1可以看出，定理5得到的结果在一定程度上比现有的相关结果更精确.

参考文献：

[1] HORNR A, JOHNSON C R. Topic in Matrix Analysis [M]. New York: Cambrielge University Press, 1912: 465-477.
[2] MINC H. Nonnegative Matrices [M]. New York: Wiley, 1988.
[3] 孙德淑. 非负矩阵 Hadamard 积的谱半径上界和 M -矩阵 Fan 积的最小特征值下界的新估计 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(2): 7-11.
[4] LEDERMANNN W. Bounds for the Greatest Latent Root of a Positive Matrix [J]. J London Math Soc, 1950(4): 265-268.
[5] BRAUER A. The Theorems of Ledermann and Ostrowski on Positive Matrices [J]. Duke Math, 1957, 24(2): 265-274.
[6] LIU S L. Bounds for the Greatest Characteristic Root of a Nonnegative Matrix [J]. Lin Alg Appl, 1996, 239(2): 151-160.
[7] 刘丽明, 黄廷祝, 刘小琴. 非负矩阵最大特征值的新界值 [J]. 电子科技大学学报, 2007, 36(2): 343-345.

New Bounds for the Greatest Eigenvalue of a Nonnegative Matrix

ZHONG Qin

Department of Mathematics, Jinjiang College of Sichuan University, Pengshan Sichuan 620860, China

Abstract: Estimation the bounds for the greatest eigenvalue of a nonnegative matrix is important part in the theory of nonnegative matrices. It is more practical value when the bounds are expressed easily calculated function in element of matrix. New bounds for the greatest eigenvalue of a nonnegative matrix were obtained by constructing two convergent sequences. Numerical example is given to illustrate the effectiveness by comparing with the relevant conclusions.

Key words: new bounds; nonnegative matrix; the greatest eigenvalue

责任编辑 夏 娟
廖 坤