第 40 卷第 2 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2018 年 2 月
Vol. 40　No. 2　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Feb.　2018

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.02.008

单调 α -非扩张映象不动点的强收敛定理[①]

闻道君，　胡　洵

重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067

摘要：在一致凸 Banach 空间中引入偏序，介绍了一个改进的关于单调 α -非扩张映象不动点的两步迭代逼近方法，在适当条件下研究了单调 α -非扩张映象不动点的存在性和强收敛定理.

关　键　词：单调 α -非扩张映象；偏序；不动点；强收敛；一致凸 Banach 空间

中图分类号：O177.91　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2018)02-0044-05

设 E 为一个 Banach 空间，其范数和偏序分别表示为 $\|\cdot\|$ 和 $\leqslant$. 设 C 为序 Banach 空间 $(E,\leqslant)$ 的一个非空闭凸子集，$T:C\to E$ 为一个非线性映象，以 $F(T)$ 表示 T 的不动点的集合，即 $F(T)=\{x\in C,Tx=x\}$. 对任意 $x,y\in C$，如果 $x\leqslant y$ 使得 $Tx\leqslant Ty$ 成立，则称 T 是单调映象.

(i) 如果 T 是单调的且 $\|Tx-Ty\|\leqslant\|x-y\|$，则称 T 是单调非扩张映象；

(ii) 如果 T 是单调的且 $\|Tx-p\|\leqslant\|x-p\|$，$\forall p\in F(T)$，则称 T 是单调拟-非扩张映象；

(iii) 如果 T 是单调的且存在常数 $\alpha<1$，使得

$$\|Tx-Ty\|^2\leqslant\alpha\|Tx-y\|^2+\alpha\|Ty-x\|^2+(1-2\alpha)\|x-y\|^2 \tag{1}$$

成立，则称 T 是单调 α -非扩张映象. 显然，单调 α -非扩张映象包含单调非扩张映象(0 -单调非扩张映象)，且具有非空不动点集的单调 α -非扩张映象一定是单调拟-非扩张映象.

设 $\{x_n\}$ 为序 Banach 空间 $(E,\leqslant)$ 中任意序列，以“$\rightharpoonup$”和“$\to$”分别表示序列 $\{x_n\}$ 的弱收敛和强收敛. 本文定义的序区间 $[a,b]=\{x\in E:a\leqslant x\leqslant b\}=[a,+)\cap(-,b]$，不动点集 $F_{\leqslant}(T)=\{p\in F(T):p\leqslant x_1\}$ 和 $F_{\geqslant}(T)=\{p\in F(T):p\geqslant x_1\}$ 与文献[1] 相同.

2004 年，文献[2] 通过引入偏序在度量空间中研究了 Lipschitz 条件下的压缩映象原理，解决了关于不动点正解的存在性问题，拓展了不动点问题的一个新的研究领域. 然而，基于偏序定义的单调映象可能并不连续，导致单调映象的不动点是否存在、不动点的正负解以及不动点逼近方法等问题都变得比较困难. 2015 年，文献[3] 研究了逼近单调非扩张映象不动点的 Mann 迭代：

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Tx_n \tag{2}$$

其中：$\alpha_n\in[0,1]$，并在 Banach 空间中证明了单调非扩张映象不动点的存在性和弱收敛定理. 2016 年，文献[1] 利用 Mann 迭代研究了单调 α -非扩张映象的不动点问题. 然而，由于收敛性分析技巧的特殊性限制，未能将单调 α -非扩张映象不动点的存在性讨论推广到 Ishikawa 等多步迭代逼近方法上[3-6].

在此基础上，本文介绍一个改进的关于单调 α -非扩张映象不动点的类似 Ishikawa 迭代的逼近方法：

---

① 收稿日期：2017-02-19

基金项目：国家自然科学基金项目(11471059)；重庆市前沿与应用基础研究项目(cstc2016jcyjA0101，cstc2016jcyjA0564)；重庆市教委科技研究项目(KJ1500623,KJ1400630).

作者简介：闻道君(1975-)，男，四川内江人，副教授，主要从事非线性算子的不动点定理及其应用的研究.

$$\begin{cases} y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tx_n \\ x_{n+1}=(1-\alpha_n)Tx_n+\alpha_n Ty_n \end{cases} \tag{3}$$

其中：α_n，$\beta_n \in [0,1]$. 本文的目的是改进单调 α-非扩张映象不动点的逼近方法，并在一致凸序Banach空间中研究单调 α-非扩张映象不动点的存在性和强收敛定理，所得结果改进并推广了文献[1-3]中相应的结论.

引理1 设 C 为一致凸序Banach空间 $(E,\leqslant)$ 的非空闭凸子集，$T: C\to C$ 为单调 α-非扩张映象. 如果 $x_1\leqslant Tx_1$，则由式(3)定义的序列 $\{x_n\}$ 满足：

(i) $x_n\leqslant y_n\leqslant Tx_n\leqslant x_{n+1}\leqslant Ty_n$；

(ii) 如果 $x_n\leqslant x$，则序列 $\{x_n\}$ 弱收敛到 $x\in C$.

证 (i) 由于序区间 $[c_1, c_2]$ 是凸的，故对任意的 $\lambda\in[0,1]$，都有

$$c_1\leqslant \lambda c_1+(1-\lambda)c_2\leqslant c_2$$

成立，其中：c_1，$c_2\in C$ 且 $c_1\leqslant c_2$. 另一方面，由于 $x_1\leqslant Tx_1$，假设 $x_n\leqslant Tx_n$，则

$$x_n\leqslant(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tx_n=y_n\leqslant$$
$$(1-\beta_n)Tx_n+\beta_n Tx_n=Tx_n$$

利用映象 T 的单调性得 $x_n\leqslant y_n\leqslant Tx_n\leqslant Ty_n$. 同时，结合式(2)进一步可得

$$x_n\leqslant(1-\alpha_n)Tx_n+\alpha_n Tx_n=Tx_n\leqslant(1-\alpha_n)Tx_n+\alpha_n Ty_n=x_{n+1}\leqslant$$
$$(1-\alpha_n)Ty_n+\alpha_n Ty_n=Ty_n$$

整理得 $x_n\leqslant y_n\leqslant Tx_n\leqslant x_{n+1}\leqslant Ty_n$，这也蕴含了 $x_{n+1}\leqslant Tx_{n+1}$.

(ii) 同时，由文献[3]的引理3.1类似可得序列 $\{x_n\}$ 弱收敛到 $x\in C$.

定理1 设 C 为一致凸序Banach空间 $(E,\leqslant)$ 的非空闭凸子集，$T: C\to C$ 为单调 α-非扩张映象. 如果 $x_1\leqslant Tx_1$，由式(3)定义的序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\leqslant x\in C$ 且

$$\liminf_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$$

则

$$F_{\geqslant}(T)\neq\Phi$$

证 因为

$$\liminf_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$$

所以存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 满足

$$\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-Tx_{n_k}\|=0 \tag{4}$$

利用引理1得 $x_1\leqslant x_{n_k}\leqslant x_{n_{k+1}}$. 记 $C_k=\{z\in C: x_{n_k}\leqslant z\}$，则 C_k 是闭凸的且 $x\in C_k$，即 C_k 为非空集，进一步得 $\Omega=\bigcap_{k=1}^{\infty}C_k$ 为 C 的非空闭凸子集. 又因为 $\{x_{n_k}\}$ 有界，定义 $g:\Omega\to[0,+\infty)$ 为

$$g(z)=\limsup_{k\to\infty}\|x_{n_k}-z\|^2$$

由文献[1]的引理2.5可知，存在 $z^*\in\Omega$，满足

$$g(z^*)=\inf_{z\in\Omega}g(z)$$

结合 Ω 的定义得 $x_1\leqslant\cdots\leqslant x_{n_k}\leqslant x_{n_{k+1}}\leqslant\cdots\leqslant z^*$，利用引理1可得 $x_{n_k}\leqslant Tx_{n_k}\leqslant Tz^*$，即 $Tz^*\in\Omega$. 因此

$$\lambda z^*+(1-\lambda)Tz^*\in\Omega \qquad \forall\lambda\in[0,1]$$

由 $g(z^*)$ 的定义得

$$g(z^*)\leqslant g(Tz^*),\ g(z^*)\leqslant g(\lambda z^*+(1-\lambda)Tz^*) \tag{5}$$

另一方面，由文献[1]的引理2.2和式(4)可得

$$\limsup_{k\to\infty}\|Tx_{n_k}-Tz^*\|^2\leqslant\limsup_{k\to\infty}\|x_{n_k}-z^*\|^2 \tag{6}$$

由 $g(z)$ 的定义和式(6)得

$$\begin{aligned}g(Tz^*)=&\limsup_{k\to\infty}\|x_{n_k}-Tz^*\|^2=\\&\limsup_{k\to\infty}\|Tx_{n_k}-Tz^*\|^2\leqslant\\&\limsup_{k\to\infty}\|x_{n_k}-z^*\|^2=g(z^*)\end{aligned} \tag{7}$$

利用式(5)和式(7)进一步得 $g(z^*)=g(Tz^*)$. 同时，由文献[7]的定理2得

$$\begin{aligned}g(\lambda z^*+(1-\lambda)Tz^*)=&\limsup_{k\to\infty}\|\lambda(x_{n_k}-z^*)+(1-\lambda)(x_{n_k}-Tz^*)\|^2\leqslant\\&\limsup_{k\to\infty}[\lambda\|x_{n_k}-z^*\|^2+(1-\lambda)\|x_{n_k}-Tz^*)\|^2-\lambda(1-\lambda)f(\|z^*-Tz^*\|)]\leqslant\\&\lambda g(z^*)+(1-\lambda)g(Tz^*)-\lambda(1-\lambda)f(\|z^*-Tz^*\|)=\\&g(z^*)-\lambda(1-\lambda)f(\|z^*-Tz^*\|)\end{aligned} \tag{8}$$

结合式(5)和式(8)得

$$\lambda(1-\lambda)f(\|z^*-Tz^*\|)\leqslant g(z^*)-g(\lambda z^*+(1-\lambda)Tz^*)\leqslant 0$$

由 $\lambda\in[0,1]$ 的任意性得

$$f(\|z^*-Tz^*\|)=0$$

进一步得

$$z^*=Tz^*$$

即

$$F_{\geqslant}(T)\neq\Phi$$

定理 2　设 C 为一致凸序 Banach 空间 $(E,\leqslant)$ 的非空闭凸子集，$T:C\to C$ 为单调 α-非扩张映象. 如果 $x_1\geqslant Tx_1$，由式(3)定义的序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\geqslant x\in C$ 且

$$\liminf_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$$

则

$$F_{\leqslant}(T)\neq\Phi$$

证　如果 $x_1\geqslant Tx_1$，由引理1类似可得 $x_n\geqslant y_n\geqslant Tx_n\geqslant x_{n+1}\geqslant Ty_n$；如果 $x_n\geqslant x\in C$，则序列 $\{x_n\}$ 弱收敛到点 $x\in C$，即 $x_n\rightharpoonup x$. 由定理1类似可证.

定理 3　设 C 为一致凸序 Banach 空间 $(E,\leqslant)$ 的非空闭凸紧子集. 设 $T:C\to C$ 为单调 α-非扩张映象且 $F_{\geqslant}(T)\neq\varnothing$. 给定 $x_1\leqslant Tx_1$，如果 $\alpha_n\in[a,b]\subset(0,1)$，$\beta_n\in(0,1)$ 且

$$0<\liminf_{n\to\infty}\beta_n\leqslant\limsup_{n\to\infty}\beta_n<1$$

则由式(3)定义的序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 $x^*\in F_{\geqslant}(T)$.

证　首先，证明 $\{x_n\}$ 有界. 取 $p\in F_{\geqslant}(T)=\{p\in F(T): p\geqslant x_1\}$，则由式(3)和 T 的单调性得

$$x_1\leqslant Tx_1\leqslant Tp=p$$

$$y_1=(1-\beta_1)x_1+\beta_1Tx_1\leqslant p,\ Ty_1\leqslant Tp=p$$

$$x_2=(1-\alpha_1)Tx_1+\alpha_1Ty_1\leqslant p,\ Tx_2\leqslant Tp=p$$

不妨假设 $x_n\leqslant p$，$Tx_n\leqslant Tp=p$，且 $y_n\leqslant p$，$Ty_n\leqslant Tp=p$. 由引理1得

$$x_n\leqslant y_n\leqslant Tx_n\leqslant x_{n+1}\leqslant Ty_n\leqslant p$$

这蕴含了 $x_{n+1}\leqslant p$. 因此，序列 $\{x_n\}$ 有界. 同理可得 $\{y_n\}$ 有界.

其次，证明

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$$

由式(3)和 T 的拟-非扩张性得

$$\begin{aligned}\| y_n - p \| &\leqslant (1-\beta_n) \| x_n - p \| + \beta_n \| T x_n - p \| \leqslant \\ &\| x_n - p \| \end{aligned} \tag{9}$$

结合式(3)和式(9)进一步得

$$\begin{aligned}\| x_{n+1} - p \| &\leqslant (1-\alpha_n) \| T x_n - p \| + \alpha_n \| T y_n - p \| \leqslant \\ &(1-\alpha_n) \| x_n - p \| + \alpha_n \| y_n - p \| \leqslant \\ &\| x_n - p \| \end{aligned} \tag{10}$$

即序列$\{ \| x_n - p \| \}$单调有界,故极限存在.记

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - p \| = r$$

由式(9)得

$$\limsup_{n \to \infty} \| y_n - p \| \leqslant \limsup_{n \to \infty} \| x_n - p \| = r \tag{11}$$

同时,整理式(10)得

$$\| x_{n+1} - p \| - \| x_n - p \| \leqslant \frac{\| x_{n+1} - p \| - \| x_n - p \|}{\alpha_n} \leqslant \| y_n - p \| - \| x_n - p \|$$

即

$$\| x_{n+1} - p \| \leqslant \| y_n - p \|$$

由于$\alpha_n \in [a, b] \subset (0, 1)$,取极限得

$$r = \liminf_{n \to \infty} \| x_{n+1} - p \| \leqslant \liminf_{n \to \infty} \| y_n - p \| \tag{12}$$

由式(11)和式(12)得

$$\lim_{n \to \infty} \| y_n - p \| = \lim_{n \to \infty} \| (1-\beta_n)(x_n - p) + \beta_n (T x_n - p) \| = r \tag{13}$$

另一方面,利用$p = Tp$和T的单调非扩张性得

$$\limsup_{n \to \infty} \| T x_n - p \| \leqslant \limsup_{n \to \infty} \| x_n - p \| = r$$

结合式(13)和文献[8]的引理3.1得

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - T x_n \| = 0 \tag{14}$$

最后,证明$\{x_n\}$强收敛到$x^* \in F_{\leqslant}(T)$.由于C为$(E, \leqslant)$的非空紧子集,且$\{x_n\}$有界,则存在子序列$\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$强收敛到$x^* \in C$.由引理1得$x_1 \leqslant x_{n_k} \leqslant x^*$.由式(14)得

$$\lim_{k \to \infty} \| x_{n_k} - T x_{n_k} \| = 0 \tag{15}$$

由文献[8]的引理2.2得

$$\lim_{k \to \infty} \| T x_{n_k} - T x^* \| = 0$$

结合式(15)进一步得

$$\lim_{k \to \infty} \| x_{n_k} - T x^* \| = 0$$

即$x^* \in F_{\geqslant}(T)$.又因为序列$\{ \| x_n - x^* \| \}$的极限存在,所以

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x^* \| = 0$$

定理4 设C为一致凸序Banach空间$(E, \leqslant)$的非空闭凸紧子集.设$T: C \to C$为单调α-非扩张映象且$F_{\leqslant}(T) \neq \varnothing$.给定$x_1 \geqslant T x_1$,如果$\alpha_n \in [a, b] \subset (0, 1)$,$\beta_n \in (0, 1)$且

$$0 < \liminf_{n \to \infty} \beta_n \leqslant \limsup_{n \to \infty} \beta_n < 1$$

则由式(3)定义的序列$\{x_n\}$强收敛到$x^* \in F_{\leqslant}(T)$.

证 因为C为$(E, \leqslant)$的非空闭凸紧子集,$F_{\leqslant}(T) \neq \varnothing$且$x_1 \geqslant T x_1$,由定理2和定理3类似可证.

参考文献：

[1] SONG Y S，PROMLUANG K，KUMAN P，et al. Some Convergence Theorems of the Mann Iteration for Monotone α-Nonexpansive Mappings [J]. Appl Math Comput，2016，287－288(S)：74－82.

[2] RAN A C M. REURINGS M C B. A Fixed Point Theorem in Partially Ordered Sets and Some Applications to Matrix Equations [J]. Proc Am Math Soc，2003，132(5)：1435－1443.

[3] BIN DEHAISH B A，KHAMSI M A. Mann Iteration Process for Monotone Nonexpansive Mappings [J]. Fixed Point Theory and Applications，2015，2015(1)：177.

[4] ISHIKAWA S，Fixed Points and Iteration of a Nonexpansive Mapping in a Banach Space [J]. Proc Am Math Soc，1976，59(1)：65－71.

[5] 闻道君. 广义平衡问题和渐近严格伪压缩映象的粘滞－投影方法 [J]. 系统科学与数学，2014，34(6)：693－702.

[6] THAKUR B S，THAKUR D，POSTOLACHE M. A new Iterative Scheme for Numerical Reckoning Fixed Points of Suzuki's Generalized Nonexpansive Mappings [J]. Appl Math Comput，2016，275：147－155.

[7] XU H K. Inequality in Banach Spaces with Applications [J]. Nonlinear Analysis，1991，16(12)：1127－1138.

[8] SCHU J. Weak and Strong Convergence to Fixed Points of Asymptotically Nonexpansive Mappings [J]. Bull Aust Math Soc，1991，43(1)：153－159.

Some Strong Convergence Theorem of Fixed Point for Monotone α-Nonexpansive Mapping

WEN Dao-jun，　HU　Xun

College of Mathematics and Statistics，Chongqing Technology and Business University，Chongqing 400067，China

Abstract：In this paper，a modified two-step iterative approximation method is introduced for finding a fixed point of monotone α-nonexpansive mapping in a uniformly convex ordered Banach space with a partial order. Moreover，the existence theorems and strong convergence theorems are studied about the fixed point of monotone α-nonexpansive mapping under some suitable conditions.

Key words：monotone α-nonexpansive mapping；partial order；fixed point；strong convergence；uniformly convex Banach space

责任编辑　周仁惠