DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.02.010

带有加权 Hardy-Sobolev 临界指数的拟线性椭圆方程正解的存在性和多重性①

朱 玉, 商彦英

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 研究了一类加权拟线性椭圆方程, 利用 Ekeland 变分原理和强极大值原理, 证明了该方程正解的存在性和多重性.

关 键 词: 正解; 加权 Hardy-Sobolev 临界指数; Ekeland 变分原理; 强极大值原理

中图分类号: O176.3 **文献标志码**: A **文章编号**: 1673-9868(2018)02-0056-08

考虑如下拟线性椭圆方程:

$$\begin{cases}\operatorname{div}(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)-\mu\dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{p(1+a)}}=\dfrac{|u|^{p^*(a,b)-2}u}{|x|^{bp^*(a,b)}}+\lambda f(x,u) & x\in\Omega\backslash\{0\}\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{1}$$

其中, Ω 为 $\mathbb{R}^N(N\geqslant 3)$ 中边界光滑的有界开集, 且 $0\in\Omega$, $1<p<N$, $0\leqslant a<\dfrac{N-p}{p}$, $a\leqslant b<a+1$, $0\leqslant\mu<\overline{\mu}\triangleq\left(\dfrac{N-p}{p}-a\right)^p$, $p^*(a,b)\triangleq\dfrac{Np}{N-p(a+1-b)}$ 是 Hardy-Sobolev 临界指数, $\lambda>0$, $f\in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, 由于我们只考虑正解, 不妨定义

$$f(x,t)=0\qquad\forall x\in\Omega,\ t\leqslant 0$$

在本文中, 记 $W=W_a^{1,p}(\Omega)$ 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 关于范数 $\left(\int_\Omega|x|^{-ap}|\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ 的完备化空间. 令

$$\|u\|\triangleq\left(\int_\Omega\left(|x|^{-ap}|\nabla u|^p-\mu\frac{|u|^p}{|x|^{p(1+a)}}\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

由加权的 Hardy 不等式知, 当 $\mu<\overline{\mu}$ 时, $\|u\|$ 等价于 $W_a^{1,p}$ 中的范数. 定义最佳 Hardy-Sobolev 常数为:

$$S_{\mu,a,b}=\inf_{u\in W\backslash\{0\}}\frac{\displaystyle\int_\Omega\left(|x|^{-ap}|\nabla u|^p-\mu\frac{u^p}{|x|^{p(1+a)}}\right)\mathrm{d}x}{\left(\displaystyle\int_\Omega\frac{|u|^{p^*(a,b)}}{|x|^{bp^*(a,b)}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p^*(a,b)}}}\tag{2}$$

---

① 收稿日期: 2017-06-01
基金项目: 国家自然科学基金项目(11471267); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(XDJK2016C119).
作者简介: 朱 玉(1992-), 女, 山西朔州人, 硕士研究生, 主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者: 商彦英, 副教授, 硕士研究生导师.

为了求方程(1)的正解，我们考虑如下泛函：

$$I(u)=\frac{1}{p}\int_{\Omega}\left(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p}-\mu\frac{|u|^{p}}{|x|^{p(1+a)}}\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{p^{*}(a,b)}\int_{\Omega}\frac{(u^{+})^{p^{*}(a,b)}}{|x|^{bp^{*}(a,b)}}\mathrm{d}x-\lambda\int_{\Omega}F(x,u^{+})\mathrm{d}x \tag{3}$$

其中，$u\in W$，$u^{+}=\max\{u,0\}$，$u^{-}=\max\{-u,0\}$，$F(x,u)=\int_{0}^{u}f(x,s)\mathrm{d}s$. 称 u 为方程(1)的弱解，若对任意的函数 $\varphi\in W$，有下列等式成立：

$$\langle I'(u),\varphi\rangle=\int_{\Omega}\left(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi-\mu\frac{|u|^{p-2}u\varphi}{|x|^{p(1+a)}}\right)\mathrm{d}x-\int_{\Omega}\frac{(u^{+})^{p^{*}(a,b)-2}u\varphi}{|x|^{bp^{*}(a,b)}}\mathrm{d}x-\lambda\int_{\Omega}f(x,u^{+})\varphi\mathrm{d}x=0$$

易知，方程(1)的非负弱解与泛函 I 的临界点一一对应.

当 $p=2$，$\mu=0$ 且 $a=b=0$ 时，方程(1)已经被广泛研究[1-5]. 当 $p\neq 2$ 且 $a=b=0$ 时，文献[1]通过建立局部(PS)条件得到了问题(1)的无穷多非平凡解. 最近，在文献[2]中作者利用Ekeland变分原理和山路引理证明了方程

$$\begin{cases}-\Delta_{p}u-\mu\dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{p}}=\dfrac{|u|^{p^{*}(s)-2}}{|x|^{s}}u+\lambda f(x,u) & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

在一定条件下存在两个正解. 当 $p\neq 2$ 且 $a\neq 0$，$b\neq 0$ 时，通过变分方法，文献[3]中研究了方程

$$\begin{cases}\operatorname{div}(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)-\mu\dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{p(1+a)}}=\dfrac{|u|^{p^{*}(a,b)-2}u}{|x|^{bp^{*}(a,b)}}+\lambda\dfrac{|u|^{q-2}u}{|x|^{dp^{*}(a,d)}} & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

在 $1<p<N$，$p\leqslant q<p^{*}(a,d)$，$a\leqslant d<a+1$ 的条件下正解的存在性. 更多类似的问题可参考文献[5-8].

受文献[2]和[3]的启发，本文考虑加权的拟线性方程(1)的正解的存在性和多重性. 首先，借助Ekeland变分原理证明第一个正解的存在性；然后利用变化的山路引理得到第二个正解. 本文的主要困难在于(PS)条件的证明和能量泛函值的估计. 主要结果为：

定理1 假定 $N\geqslant 3$，$0\leqslant a<\dfrac{N-p}{p}$，$a\leqslant b<a+1$，$0\leqslant\mu<\bar{\mu}$，且 f 满足

(f_1)：$\lim\limits_{t\to 0^{+}}\dfrac{f(x,t)}{t^{p-1}}=+\infty$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f(x,t)}{t^{p^{*}(a,b)-1}}=0$ 对于 $x\in\overline{\Omega}$ 一致成立.

则存在 $\lambda^{*}>0$，使得当 $\lambda\in(0,\lambda^{*})$ 时，方程(1)至少有一个正解 u_{λ}. 记

$$\hat{\mu}=\frac{N-(p^{2}(a+1)+(1-p)bp^{*}(a,b))}{p}\left(\frac{N-bp^{*}(a,b)}{p}\right)^{p-1}$$

定理2 假定 $0\leqslant a<\dfrac{N-p}{p}$，$a\leqslant b<a+1$，$0\leqslant\mu\leqslant\hat{\mu}$，且 f 满足(f_1)及如下条件

(f_2)：$f:\Omega\times\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$ 关于第二个变量单调递增.

(A)：$p\geqslant\dfrac{3N}{3(a+1-b)+N}$，$N\geqslant p^{2}(a+1)+(1-p)bp^{*}(a,b)$. 则存在 $\lambda^{*}>0$，使得对任意的 $\lambda\in(0,\lambda^{*})$，方程(1)至少有两个正解.

注 本文推广了文献[2]和[3]，在文献[2]中，作者证明了方程(1)在 $a=b=0$ 的情况下存在两个正

解. 在文献[3]中，作者研究了当

$$f(x,u)=\frac{|u|^{q-2}u}{|x|^{dp^*(a,d)}}$$

时正解的存在性. 在本文中，我们将考虑当 $a\neq 0$，$b\neq 0$ 且 f 为一般项 $f(x,u)$ 时，方程(1)的正解的存在性与多重性.

为了方便，本文中用 C 表示不同的正常数，$O(\varepsilon^\sigma)(\sigma>0)$ 表示存在一个常数 $M>0$，当 ε 充分小时，有 $|O(\varepsilon^\sigma)|\leqslant M\varepsilon^\sigma$，$o(1)$ 表示当 $n\to\infty$ 时的无穷小量.

1　定理的证明

定理 1 的证明　我们可通过 Ekeland 变分原理和强极大值原理来证明定理 1，其证明过程与文献[2]中定理 1 的证明相似，在此我们省略其证明过程. 由定理 1 已经得到第一个正解 u_λ，下面寻找具有形式 $u=u_\lambda+v$ 的第二个正解，实际上，只需证存在 $v>0$ 即可. v 对应的方程为：

$$\begin{cases}\operatorname{div}(|x|^{-ap}|\nabla v|^{p-2}\nabla v)-\mu\dfrac{|v|^{p-2}v}{|x|^{p(1+a)}} & \\ =\dfrac{(u_\lambda+v)^{p^*(a,b)-1}}{|x|^{bp^*(a,b)}}-\dfrac{u_\lambda^{p^*(a,b)-1}}{|x|^{bp^*(a,b)}}+\lambda f(x,u_\lambda+v)-\lambda f(x,u_\lambda) & x\in\Omega\backslash\{0\} \\ v=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{4}$$

记

$$g(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(u_\lambda+t)^{p^*(a,b)-1}}{|x|^{bp^*(a,b)}}-\dfrac{u_\lambda^{p^*(a,b)-1}}{|x|^{bp^*(a,b)}}+\lambda f(x,u_\lambda+t)-\lambda f(x,u_\lambda) & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}\tag{5}$$

$$G(x,t)=\int_0^t g(x,\tau)\mathrm{d}\tau$$

方程(4)对应的能量泛函为：

$$\begin{aligned}J(v)=&\frac{1}{p}\int_\Omega\left(|x|^{-ap}|\nabla v|^p-\mu\frac{|v|^p}{|x|^p}\right)\mathrm{d}x-\int_\Omega G(x,v^+)\mathrm{d}x=\\ &\frac{1}{p}\|v\|^p-\frac{1}{p^*(a,b)}\int_\Omega\left(\frac{(u_\lambda+v^+)^{p^*(a,b)}}{|x|^{bp^*(a,b)}}-\frac{u_\lambda^{p^*(a,b)}}{|x|^{bp^*(a,b)}}-p^*(a,b)\frac{u_\lambda^{p^*(a,b)-1}v^+}{|x|^{bp^*(a,b)}}\right)\mathrm{d}x-\\ &\lambda\int_\Omega(F(x,u_\lambda+v^+)-F(x,u_\lambda)-f(x,u_\lambda)v^+)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

为了证明定理 2，我们给出一些主要的引理.

引理 1　$v=0$ 是 J 在 W 中的一个极小值点.

证　对任意的 $v\in W$，我们记 $v=v^+-v^-$. 由 J 的定义有

$$J(v)=\frac{1}{p}\|v^-\|^p+I(u_\lambda+v^+)-I(u_\lambda)\tag{6}$$

因为 u_λ 是 I 在 W 中的一个局部极小值点，所以对充分小的 ε，当 $\|v\|\leqslant\varepsilon$ 时，有

$$J(v)\geqslant\frac{1}{p}\|v^-\|^p\geqslant 0=J(0)$$

从而引理 1 成立.

引理 2　假设条件(f_1)和(f_2)成立，若 $v=0$ 是 J 的唯一临界点，则对于任意的

$$0<c<\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*(a,b)}\right)(S_{\mu,a,b})^{\frac{p^*(a,b)}{p^*(a,b)-p}}$$

J 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件.

证 在 W 中取(PS)序列$\{v_n\}$，使得 $J(v_n)\to c$，且在 W^* 中 $J'(v_n)\to 0$. 类似于文献[2]中引理 3.2 的证明，容易证得$\{v_n\}$有界，从而存在子列(不妨仍记为$\{v_n\}$)及 $v_0\in W$，使得当 $n\to\infty$ 时，有

$$\begin{cases} v_n \rightharpoonup v_0 & \text{在 } W \text{ 中} \\ v_n \to v_0 & \text{在 } L^r(\Omega)(1<r<p^*) \text{ 中} \\ v_n(x)\to v_0(x) & a.e. \text{ 于 } \Omega \end{cases}$$

由于序列$\{v_n\}$在 W 中是有界的，所以由 Sobolev 嵌入定理可知，存在常数 C 有

$$\| u_\lambda + v_n^+ \|_{p^*(a,b)}^{p^*(a,b)} \leqslant C$$

由(f_1)可知对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $C(\varepsilon)>0$ 使得

$$|f(x,t)t| < C(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2C}|t|^{p^*(a,b)} \qquad (x,t)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$$

记 E 的测度为 mes E，令 $\delta=\frac{\varepsilon}{2C(\varepsilon)}>0$，若 $E\subset\Omega$ 且 mes $E<\delta$，则

$$\begin{aligned}\left|\int_E f(x,u_\lambda+v_n^+)(u_\lambda+v_n^+)\mathrm{d}x\right| \leqslant & \int_E |f(x,u_\lambda+v_n^+)(u_\lambda+v_n^+)|\mathrm{d}x \leqslant \\ & \int_E C(\varepsilon)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2C}\int_E |u_\lambda+v_n^+|^{p^*(a,b)}\mathrm{d}x \leqslant \\ & C(\varepsilon)\mathrm{mes}\,E + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

利用 Vitali 定理，可得

$$\int_\Omega f(x,u_\lambda+v_n^+)(u_\lambda+v_n^+)\mathrm{d}x \to \int_\Omega f(x,u_\lambda+v_0^+)(u_\lambda+v_0^+)\mathrm{d}x \qquad n\to\infty$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x,u_\lambda+v_n^+)(u_\lambda+v_n)\mathrm{d}x = & \int_\Omega f(x,u_\lambda+v_n^+)(u_\lambda+v_n^+)\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x,u_\lambda)v_n^-\mathrm{d}x \to \\ & \int_\Omega f(x,u_\lambda+v_0^+)(u_\lambda+v_0)\mathrm{d}x \qquad n\to\infty\end{aligned}$$

$$\int_\Omega F(x,u_\lambda+v_n^+)\mathrm{d}x \to \int_\Omega F(x,u_\lambda+v_0^+)\mathrm{d}x$$

$$\int_\Omega f(x,u_\lambda+v_n^+)w\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega f(x,u_\lambda+v_0^+)w\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

从而，对任意的 $w\in W$，有

$$0=\lim_{n\to\infty}\langle J'(v_n),w\rangle = \langle J'(v_0),w\rangle$$

因此，v_0 是 J 的临界点，由条件可知 $v_0=0$. 下面证明 $v_n\to 0$. 利用反证法，根据 Brezis-Leib 定理和(7)式可知

$$J(v_n)=\frac{1}{p}\|v_n\|^p - \frac{1}{p^*(a,b)}\int_\Omega \frac{(v_n^+)^{p^*(a,b)}}{|x|^{bp^*(a,b)}}\mathrm{d}x + o(1)$$

进而

$$\langle J'(v_n),v_n\rangle = \|v_n\|^p - \int_\Omega \frac{(v_n^+)^{p^*(a,b)}}{|x|^{bp^*(a,b)}}\mathrm{d}x + o(1)\to 0$$

假设

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n\|^p = d$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{(v_n^+)^{p^*(a,b)}}{|x|^{bp^*(a,b)}} = d \qquad d>0$$

由(2)式可得对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$，有

$$\| v_n \|^p \geqslant S_{\mu, a, b}\left(\int_\Omega \frac{(v_n^+)^{p^*(a,b)}}{|x|^{bp^*(a,b)}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p^*(a,b)}}$$

因此

$$d \geqslant S_{\mu, a, b} d^{\frac{p}{p^*(a,b)}}$$

即

$$d \geqslant (S_{\mu, a, b})^{\frac{p^*(a,b)}{p^*(a,b)-p}}$$

进而有

$$c = o(1) + J(v_n) = \frac{1}{p}\| v_n \|^p - \frac{1}{p^*(a,b)}\int_\Omega \frac{(v_n^+)^{p^*(a,b)}}{|x|^{bp^*(a,b)}}\mathrm{d}x + o(1) =$$

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*(a,b)}\right) d + o(1) \geqslant$$

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*(a,b)}\right)(S_{\mu, a, b})^{\frac{p^*(a,b)}{p^*(a,b)-p}}$$

与假设条件矛盾，所以当 $n \to \infty$ 时，$v_n \to 0$. 引理 2 得证. 由文献[3]可知，当 $\Omega = \mathbb{R}^N$ 时，$S_{\mu, a, b}$ 可由如下函数达到

$$V_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-\left(\frac{N-p}{p}-a\right)} U_{p,\mu}\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)$$

其中 $\varepsilon > 0$. 并且 $V_\varepsilon(x)$ 满足方程

$$\operatorname{div}(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \mu\frac{|u|^{p-2}u}{|x|^{p(1+a)}} = \frac{|u|^{p^*(a,b)-2}u}{|x|^{bp^*(a,b)}} \qquad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

取 $\rho > 0$ 充分小，使得 $B_\rho(0) \subset \Omega$. 定义截断函数 $\varphi(x) \in C_0^\infty(B_\rho(0))$ 使得，当 $x \in B_\rho(0)$ 时，$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$；当 $x \in B_{\frac{\rho}{2}}(0)$ 时，$\varphi(x) = 1$. 设 $v_\varepsilon(x) = \varphi(x) V_\varepsilon(x)$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，有[2]：

$$\| v_\varepsilon \|^p = (S_{\mu, a, b})^{\frac{p^*(a,b)}{p^*(a,b)-p}} + O(\varepsilon^{\beta(\mu)p + p(a+1) - N}) \tag{8}$$

$$\int_\Omega \frac{v_\varepsilon^{p^*(a,b)}}{|x|^{bp^*(a,b)}} = (S_\mu, a, b)^{\frac{p^*(a,b)}{p^*(a,b)-p}} + O(\varepsilon^{(\beta(\mu)+b)p^*(a,b) - N}) \tag{9}$$

$$\int_\Omega \frac{v_\varepsilon^p}{|x|^{bp^*(a,b)}} \geqslant C\varepsilon^{p(a+1) - bp^*(a,b)},\ \frac{N - bp^*(a,b)}{\beta(\mu)} < p < p^*(a,b) \tag{10}$$

$$\int_\Omega \frac{v_\varepsilon^p}{|x|^{bp^*(a,b)}} \geqslant C\varepsilon^{p(a+1) - bp^*(a,b)}|\ln \varepsilon|,\ p = \frac{N - bp^*(a,b)}{\beta(\mu)} \tag{11}$$

其中，$\beta(\mu)$ 为函数

$$k(t) = (p-1)t^p - (N - p(a+1))t^{p-1} + \mu \qquad t \geqslant 0,\ 0 \leqslant \mu < \overline{\mu}$$

的一个零点，且 $\beta(\mu) > \dfrac{N - p(a+1)}{p}$.

引理 3　设 $N \geqslant p^2(a+1) - (p-1)bp^*(a,b)$，$0 \leqslant a < \dfrac{N-p}{p}$，$a \leqslant b < a+1$，$0 \leqslant \mu \leqslant \hat{\mu}$. 若条件($\mathrm{f}_1$)，($\mathrm{f}_2$)和(A)都成立，则存在 $v_* \in W$ 且 $v_* \not\equiv 0$，使得

$$\sup_{t \geqslant 0} J(tv_*) < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*(a,b)}\right)(S_{\mu, a, b})^{\frac{p^*(a,b)}{p^*(a,b)-p}}$$

证 由(A)知

$$p \geqslant \frac{3N}{3(a+1-b)+N}$$

所以

$$p^*(a,b)-1 \geqslant 2$$

由基本不等式

$$(a+b)^\eta \geqslant a^\eta + b^\eta + Ca^{\eta-p+1}b^{p-1} \qquad \eta \geqslant 2$$

结合条件(f_2)和(7)式,可得

$$g(x,l) \geqslant \frac{l^{p^*(a,b)-1}}{|x|^{bp^*(a,b)}} + C\frac{l^{p-1}u_\lambda^{p^*(a,b)-p}}{|x|^{bp^*(a,b)}}$$

因此

$$G(x,tv_\varepsilon) \geqslant \frac{t^{p^*(a,b)}}{p^*(a,b)}\frac{v_\varepsilon^{p^*(a,b)}}{|x|^{bp^*(a,b)}} + \frac{Ct^p}{p}\frac{v_\varepsilon^p u_\lambda^{p^*(a,b)-p}}{|x|^{bp^*(a,b)}}$$

所以

$$J(tv_\varepsilon)=\frac{t^p}{p}\|v_\varepsilon\|^p-\int_\Omega G(x,tv_\varepsilon)\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\frac{t^p}{p}\|v_\varepsilon\|^p-\frac{t^{p^*(a,b)}}{p^*(a,b)}\int_\Omega\frac{v_\varepsilon^{p^*(a,b)}}{|x|^{bp^*(a,b)}}\mathrm{d}x-Ct^p\int_\Omega\frac{v_\varepsilon^p}{|x|^{bp^*(a,b)}}\mathrm{d}x$$

令

$$Q(t)=\frac{t^p}{p}\|v_\varepsilon\|^p-\frac{t^{p^*(a,b)}}{p^*(a,b)}\int_\Omega\frac{v_\varepsilon^{p^*(a,b)}}{|x|^{bp^*(a,b)}}\mathrm{d}x-Ct^p\int_\Omega\frac{v_\varepsilon^p}{|x|^{bp^*(a,b)}}\mathrm{d}x$$

可得,当 $\varepsilon>0$ 充分小时,$Q'(t)=0$ 有唯一的正解 t_ε,并且 Q 在 t_ε 处取得最大值,t_ε 是一致有界的. 结合(8)式和(9)式,得

$$\sup_{t\geqslant 0}J(tv_\varepsilon)\leqslant\sup_{t\geqslant 0}Q(t)=Q(t_\varepsilon)\leqslant$$

$$\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*(a,b)}\right)(S_{\mu,a,b})^{\frac{p^*(a,b)}{p^*(a,b)-p}}+O(\varepsilon^{\beta(\mu)p+p(a+1)-N})+$$

$$O(\varepsilon^{(\beta(\mu)+b)p^*(a,b)-N})-C\int_\Omega\frac{v_\varepsilon^p}{|x|^{bp^*(a,b)}}\mathrm{d}x$$

通过计算可知

$$(\beta(\mu)+b)p^*(a,b)-N>\beta(\mu)p+p(a+1)-N$$

因此,当 ε 充分小时,有

$$\sup_{t\geqslant 0}J(tv_\varepsilon)\leqslant\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*(a,b)}\right)(S_{\mu,a,b})^{\frac{p^*(a,b)}{p^*(a,b)-p}}+O(\varepsilon^{\beta(\mu)p+p(a+1)-N})-C\int_\Omega\frac{v_\varepsilon^p}{|x|^{bp^*(a,b)}}\mathrm{d}x$$

由文献[3]可知,函数 $k(t)$ 有唯一的极小值点

$$\delta=\frac{N-p(a+1)}{p}$$

且 k 在$(\delta,+\infty)$上单调递增. 又由条件(A)知

$$N\geqslant p^2(a+1)+(1-p)bp^*(a,b)$$

计算可得

$$0\leqslant\mu\leqslant\hat{\mu}\Leftrightarrow\frac{N-bp^*(a,b)}{p}\leqslant\beta(\mu)$$

(i) 若 $\beta(\mu)>\frac{1}{p}(N-bp^{*}(a,b))$，则由(10)式可知

$$\int_{\Omega}\frac{|v_{\varepsilon}|^{p}}{|x|^{bp^{*}(a,b)}}\geqslant C\varepsilon^{p(a+1)-bp^{*}(a,b)}$$

又

$$p(a+1)-bp^{*}(a,b)<\beta(\mu)p+p(a+1)-N$$

结合(12)式，当 $\varepsilon>0$ 充分小时，我们有

$$\sup_{t\geqslant 0}J(tv_{\varepsilon})<\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{*}(a,b)}\right)(S_{\mu,a,b})^{\frac{p^{*}(a,b)}{p^{*}(a,b)-p}}$$

(ii) 若 $\beta(\mu)=\frac{1}{p}(N-bp^{*}(a,b))$，则由(11)式可知

$$\int_{\Omega}\frac{|v_{\varepsilon}|^{p}}{|x|^{bp^{*}(a,b)}}\geqslant C\varepsilon^{p(a+1)-bp^{*}(a,b)}|\ln\varepsilon|$$

而

$$p(a+1)-bp^{*}(a,b)=\beta(\mu)p+p(a+1)-N$$

结合(12)式，取 ε 充分小，可得

$$\sup_{t\geqslant 0}J(tv_{\varepsilon})<\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{*}(a,b)}\right)(S_{\mu,a,b})^{\frac{p^{*}(a,b)}{p^{*}(a,b)-p}}$$

所以，当 ε 充分小时，$v_{*}=v_{\varepsilon}$ 满足引理 3 的结论.

定理 2 的证明　若 $v=0$ 是 J 的唯一临界点，由引理 1 知存在 $\alpha>0$，使得对任意的 $v\in\partial B_{\rho}=\{v\in W,\ \|v\|=\rho\}$，都有 $J(v)>\alpha$ 成立，其中 $\rho>0$ 充分小. 由引理 3 可知存在 $v_{*}\in W$，$v_{*}\not\equiv 0$ 使得

$$\sup_{t\geqslant 0}J(tv_{*})<\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{*}(a,b)}\right)(S_{\mu,a,b})^{\frac{p^{*}(a,b)}{p^{*}(a,b)-p}}$$

又由条件(f_1)可知

$$\lim_{t\to+\infty}J(tv_{*})\to-\infty$$

因此，存在 $t_0>0$，使得当 $\|t_0v_{*}\|>\rho$ 时，有

$$J(t_0v_{*})<0$$

根据山路引理可知，存在 $\{v_n\}\subset W$，使得当 $n\to\infty$ 时，

$$J(v_n)\to c\geqslant\alpha,\ J'(v_n)\to 0$$

其中，

$$c=\inf_{h\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J(h(t))$$

$$\Gamma=\{h\in C([0,1],W)\mid h(0)=0,\ h(1)=t_0v_{*}\}$$

进而

$$0<\alpha\leqslant c=\inf_{h\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J(h(t))\leqslant\max_{t\in[0,1]}J(tt_0v_{*})\leqslant$$

$$\sup_{t\geqslant 0}J(tv_{*})<\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{*}(a,b)}\right)(S_{\mu,a,b})^{\frac{p^{*}(a,b)}{p^{*}(a,b)-p}}$$

由引理 2 可知

$$v_n\to 0(n\to\infty)$$

而

$$0=J(0)=\lim_{n\to\infty}J(v_n)=c\geqslant\alpha>0$$

矛盾. 定理 2 证毕.

参考文献:

[1] GHOUSSOUB N, YUAN C. Multiple Solutions for Quasi-Linear PDEs Involving the Critical Sobolev and Hardy Exponents [J]. Trans Amer Math Soc, 2000, 352(12): 5703-5743.

[2] PENG Z, CHEN G. Existence and Multiplicity of Positive Solutions for P-Laplacian Elliptic Equations [J]. Bound Value Probl, 2016, 2016: 125.

[3] KANG D. Positive Solutions to the Weighted Critical Quasilinear Problems [J]. Appl Math Comput, 2009, 213(2): 432-439.

[4] BREZIS H, NIRENBERG L. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents [J]. Comm Pure Appl Math, 1983, 36(4): 437-477.

[5] KANG D. Some Properties of Solutions to the Singular Quasilinear Problems [J]. Nonlinear Anal, 2010, 72(2): 682-688.

[6] KANG D. Some Results on Weighted Critical Quasilinear Problems [J]. Differ Equ Appl, 2010, 2(4): 519-535.

[7] 刘海燕,廖家锋,唐春雷. 带 Hardy-Sobolev 临界指数的半线性椭圆方程正解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(6): 60-65.

[8] 丁 凌,唐春雷. 具有 Hardy-Sobolev 临界指数的 p-Laplacian 方程解的存在性和多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2007, 29(4): 5-10.

Existence and Multiplicity of Positive Solutions for a Quasilinear Elliptic Equation with Weighted Hardy-Sobolev Exponents

ZHU Yu, SHANG Yan-ying

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: We investigate a quasilinear elliptic equation with weighted Hardy-Sobolev exponents and, by means of Ekeland's variational principle and strong maximum principle, prove the existence and multiplicity of its positive solutions under different conditions.

Key words: positive solution; weighted Hardy-Sobolev critical exponent; Ekeland's variational principle; strong maximum principle

责任编辑 崔玉洁