第 40 卷第 2 期　西南大学学报(自然科学版)　2018 年 2 月
Vol. 40 No. 2　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　Feb. 2018

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.02.012

非自治随机 Sine-Gordon 方程组的拉回动力行为[①]

杨　爽[1]，　王仁海[1]，　李扬荣[1]，　佘连兵[2]

1. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715；2. 六盘水师范学院 数学系，贵州 553004

摘要： 主要研究了带加法扰动的非自治随机 Sine-Gordon 方程组的拉回动力行为，通过对解的一致估计证明了方程组产生的随机动力系统在空间 $(H_0^1(\mathscr{O})\times L^2(\mathscr{O}))^2$ 上存在唯一的拉回吸引子.

关 键 词： 非自治随机 Sine-Gordon 方程组；随机动力系统；拉回吸引子；Wiener 过程

中图分类号：O193　**文献标志码：A**　**文章编号：** 1673-9868(2018)02-0070-08

本文考虑具有 Dirichlet 边界条件的随机 Sine-Gordon 方程组

$$\begin{cases} \mathrm{d}u_{1t}+\mathrm{d}u_1+(-\Delta u_1+\sin(u_1+u_2))\mathrm{d}t=f_1(x,t)\mathrm{d}t+h_1(x)\circ\mathrm{d}W \\ \mathrm{d}u_{2t}+\mathrm{d}u_2+(-\Delta u_2+\sin(u_1-u_2))\mathrm{d}t=f_2(x,t)\mathrm{d}t+h_2(x)\circ\mathrm{d}W \\ u_1(x,t)\mid_{x\in\partial\mathscr{O}}=0,\ u_2(x,t)\mid_{x\in\partial\mathscr{O}}=0 \\ u_1(x,\tau)=u_{10}(x)\in H_0^1(\mathscr{O}),\ u_{1t}(x,\tau)=u_{11}(x)\in L^2(\mathscr{O}) \\ u_2(x,\tau)=u_{20}(x)\in H_0^1(\mathscr{O}),\ u_{2t}(x,\tau)=u_{21}(x)\in L^2(\mathscr{O}) \end{cases} \tag{1}$$

其中，$\mathscr{O}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的具有光滑边界 $\partial\mathscr{O}$ 的有界开子集，$u_{it}=\dfrac{\partial u_i}{\partial t}$，$u_i(x,t)=u_i(i=1,2)$ 均为定义于 $\mathscr{O}\times[\tau,+\infty)$ 上的实值函数，$\sin(u_1+u_2)$，$\sin(u_1-u_2)\in C_b(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$，$C_b(X,Y)$ 是从 X 到 Y 的有界函数的全体，$f_i(x,t)(i=1,2)$ 为依赖时间的外力项，$h_i(x)\in H^2(\mathscr{O})\cap H_0^1(\mathscr{O})(i=1,2)$ 是与时间无关的函数，$W(t)$ 是完备概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一维实值的双边标准 Wiener 过程，其路径为 $\omega(\cdot)\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$，且 $\omega(0)=0$. 空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一簇遍历的保测变换$\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$定义如下：

$$\theta_t\omega(\cdot)=\omega(\cdot+t)-\omega(t)$$

"$\circ$"表示 Stratonovvitch 积. 文献[1]已经研究了带加法扰动具阻尼的自治随机 Sine-Gordon 方程组的随机吸引子；文献[2]已经研究了带加法扰动具阻尼的自治随机 Sine-Gordon 方程的随机吸引子及其性质；文献[3]已经研究了无界区域非自治随机 Sine-Gordon 方程的 $\mathscr{D}$-周期吸引子的存在唯一性；文献[4]已经给出了非自治动力系统的拉回吸引子存在的充分必要条件. 本文将利用相关的理论结果来证明带加法扰动具阻尼的非自治随机 Sine-Gordon 方程组的拉回吸引子的存在性，具体的理论结果可参考文献[4-7].

1　解方程确定随机动力系统(RDS)

已知算子 $A=-\Delta$，$D(A)=(H_0^1(\mathscr{O})\cap H^2(\mathscr{O}))^2$ 是正的自伴线性算子，其特征值$\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$满足 $0<$

---

① 收稿日期：2017-10-26
基金项目：国家自然科学基金项目(11571283).
作者简介：杨　爽(1991-)，女，重庆开州人，硕士研究生，主要从事无穷维随机动力系统与随机分析的研究.
通信作者：李扬荣，教授，博士研究生导师.

$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \cdots \leqslant \lambda_m \leqslant \cdots$, $\lambda_m \to +\infty (m \to +\infty)$. 令 $E_1 = H_0^1(\mathcal{O}) \times L^2(\mathcal{O})$ 和 $E = E_1 \times E_1 = (H_0^1(\mathcal{O}) \times L^2(\mathcal{O}))^2$. 其中, 定义 $(\cdot, \cdot)$ 和 $\|\cdot\|$ 分别是 L^2 中的内积和范数; $((\cdot, \cdot))$ 和 $\|\cdot\|_{H_0^1}$ 分别是 H_0^1 中的内积和范数; 则空间 E_1 的内积和范数分别为:

$$(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)_{E_1} = ((u_1, u_2)) + (v_1, v_2)$$

$$\|\boldsymbol{y}\|_{E_1} = \|u\|_{H_0^1}^2 + \|v\|^2 \qquad \forall\, \boldsymbol{y}_i = (u_i, v_i)^T, \boldsymbol{y} = (u, v)^T \in E_1, i = 1, 2$$

设 $\mathcal{D}$ 是 E_1 中包含所有双参数集 $D = \{D(\tau, \omega)\}$ 的集族, 且满足:

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-\delta t} \|D(\tau - t, \theta_{-t}\omega)\|_{E_1}^2 = 0 \qquad \forall (\tau, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega, \delta = \frac{\lambda_1}{2 + 3\lambda_1} \tag{2}$$

首先, 令

$$u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t)) \qquad u_t = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)$$

$$Au(x, t) = (-\Delta u_1(x, t), -\Delta u_2(x, t)) \qquad g(u) = (\sin(u_1 + u_2), \sin(u_1 - u_2))$$

$$f(x, t) = (f_1(x, t), f_2(x, t))$$

那么方程组(1) 可化为:

$$\begin{cases} \mathrm{d}u_t + \mathrm{d}u + (Au + g(u))\mathrm{d}t = f(x, t)\mathrm{d}t + h(x) \circ \mathrm{d}W \\ u(x, t)\mid_{\partial\mathcal{O}} = (0, 0) \\ u(x, \tau) = u_0(x) = (u_{10}, u_{20}) \in H_0^1(\mathcal{O}) \times H_0^1(\mathcal{O}) \\ u_t(x, \tau) = u_1(x) = (u_{11}, u_{21}) \in L^2(\mathcal{O}) \times L^2(\mathcal{O}) \end{cases} \tag{3}$$

其次, 令 $u_t = v$, 则方程组(3) 可转化为一阶微分方程组:

$$\begin{cases} \mathrm{d}u = v\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = -v\mathrm{d}t - Au\mathrm{d}t - g(u)\mathrm{d}t + f(x, t)\mathrm{d}t + h(x) \circ \mathrm{d}W \\ u(x, \tau) = u_0(x), v(x, \tau) = u_1(x), x \in \mathcal{O} \end{cases} \tag{4}$$

然后, 令

$$z = v - h(x)W$$

即:

$$v = z + h(x)W$$

则可得到与方程组(4) 等价的方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = z + h(x)W \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -z - Au - g(u) + f(x, t) - h(x)W \\ u(x, \tau) = u_0(x), z(\tau, \omega) = z(x, \tau, \omega) = u_1(x) - h(x)W(\tau), x \in \mathcal{O} \end{cases} \tag{5}$$

最后, 对方程组(5) 作变换: $\boldsymbol{\varphi} = (u, z)^T$, 则方程组可化为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}_t = \boldsymbol{L}\boldsymbol{\varphi} + F(\boldsymbol{\varphi}, \omega) \\ \boldsymbol{\varphi}(\tau, \omega) = (u_0, z(\tau, \omega))^T \end{cases} \tag{6}$$

其中,

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & -I \end{pmatrix} \qquad F(\boldsymbol{\varphi}, \omega) = \begin{pmatrix} h(x)W \\ -g(u) + f(x, t) - h(x)W \end{pmatrix}$$

由文献[8]中所讨论的指数二分性可得, $\boldsymbol{L}$ 是空间 E 上的一个 C_0-半群 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{L}t}$ 的无限小的生成元. 容易检验函数 $F(\cdot, \omega)$: $E \to E$ 关于 $\boldsymbol{\varphi}$ 是 Lipschitz 连续的. 并且, 对于任意的 $\omega \in \Omega$, 函数 $F(\cdot, \omega)$ 有界. 由文献[8] 中

关于微分发展方程的解的存在唯一性的经典半群理论可得，对任意的 $\boldsymbol{\varphi}(\tau,\omega)\in E$，方程(6) 有唯一的解：

$$\boldsymbol{\varphi}(t,\tau,\omega)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{L}(t-\tau)}\boldsymbol{\varphi}(\tau,\omega)+\int_{\tau}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{L}(t-s)}F(\boldsymbol{\varphi}(s),\omega)\mathrm{d}s$$

由文献[2] 可得，对于任意的 $(\tau,\omega,f)\in\mathbb{R}\times\Omega\times L_{\mathrm{loc}}^{2}(\mathbb{R},L^{2}(\mathscr{O}))$，有：

(i) 如果 $\boldsymbol{\varphi}(\tau,\omega)\in E$，那么 $\boldsymbol{\varphi}(t,\tau,\omega)\in(C([\tau,+\infty);H_0^1(\mathscr{O}))\times C([\tau,+\infty);L^2(\mathscr{O})))^2$.

(ii) 如果 $\boldsymbol{\varphi}(\tau,\omega)\in(D(A)\times H_0^1(\mathscr{O}))^2$，那么 $\boldsymbol{\varphi}(t,\tau,\omega)\in(C([\tau,+\infty);D(A))\times C([\tau,+\infty);H_0^1(\mathscr{O})))^2$.

(iii) 如果 $\boldsymbol{\varphi}(t,\tau,\omega,\boldsymbol{\varphi}(\tau,\omega))$ 表示方程(6) 的解，那么映射 $\boldsymbol{\varphi}(\tau,\omega)\rightarrow\boldsymbol{\varphi}(t,\tau,\omega,\boldsymbol{\varphi}(\tau,\omega))$ 对任意的 $t\geqslant\tau$ 和 $\boldsymbol{\varphi}(\tau,\omega)$ 是连续的.

容易检验方程(6) 的解映射 $\hat{S}(t,\tau,\omega,\cdot)$：$\boldsymbol{\varphi}(\tau,\omega)\rightarrow\boldsymbol{\varphi}(t,\tau,\omega,\boldsymbol{\varphi}(\tau,\omega))$ 确定了一个随机动力系统. 因而，平移映射 $S(t,\tau,\omega,\cdot)$：$\boldsymbol{\varphi}(\tau,\omega)+((0,h_1(x)W(\tau))^T,(0,h_2(x)W(\tau))^T)\rightarrow\boldsymbol{\varphi}(t,\tau,\omega,\boldsymbol{\varphi}(\tau,\omega))+((0,h_1(x)W(t))^T,(0,h_2(x)W(t))^T)$ 也确定了方程组(1) 的一个随机动力系统.

假设 F　$f\in L_{\mathrm{loc}}^{2}(\mathbb{R},L^{2}(\mathscr{O}))$ 满足 tempered 条件，即：

$$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\delta s}\|f(\cdot,s+\tau)\|^2\mathrm{d}s<\infty\qquad\forall\,\delta>0,\tau\in\mathbb{R}\tag{7}$$

假设 G　$A^{\frac{1}{2}}f$ 满足 tempered 条件，即：

$$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\delta s}\|A^{\frac{1}{2}}f(\cdot,s+\tau)\|^2\mathrm{d}s<\infty\qquad\forall\,\delta>0,\tau\in\mathbb{R}\tag{8}$$

2　解的一致估计

在本节中，给出了方程组(1) 的解的一致估计. 在下面的讨论中，字母 c 表示可变化的常数.

令 $\boldsymbol{\psi}=(u,\bar{z})^T$，$\bar{z}=z+\delta u$. 则方程组(5) 可化为：

$$\boldsymbol{\psi}_t+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\psi}=\overline{F}(\boldsymbol{\psi},\omega),\ \boldsymbol{\psi}(\tau,\omega)=(u_0,z(\tau,\omega)+\delta u_0)^T\tag{9}$$

其中，

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\delta I & -I\\ A-\delta(1-\delta)I & (1-\delta)I\end{pmatrix}$$

$$\overline{F}(\boldsymbol{\psi},\omega)=\begin{pmatrix}h(x)W\\ -g(u)+f(x,t)-(1-\delta)h(x)W\end{pmatrix}$$

则方程(9) 可化为：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\psi}_{1t}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\psi}_1=\overline{F}(\boldsymbol{\psi}_1,\omega),\ \boldsymbol{\psi}_1(\tau,\omega)=(u_{10},\bar{z}_1(\tau,\omega))^T\\ \boldsymbol{\psi}_{2t}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\psi}_2=\overline{F}(\boldsymbol{\psi}_2,\omega),\ \boldsymbol{\psi}_2(\tau,\omega)=(u_{20},\bar{z}_2(\tau,\omega))^T\end{cases}\tag{10}$$

对于方程(9) 的解映射 $\hat{S}_\delta(t,\tau,\omega,\cdot)$ 和方程(6) 的解映射 $\hat{S}(t,\tau,\omega,\cdot)$ 满足以下关系：

$$\hat{S}_\delta(t,\tau,\omega,\cdot)=R_\delta\hat{S}(t,\tau,\omega,\cdot)R_{-\delta}$$

其中，R_δ 是 E 上的同构映射. 因此，只需要考虑随机动力系统 $S(t,\tau,\omega,\cdot)$ 的等价系统 $\hat{S}_\delta(t,\tau,\omega,\cdot)$ 在 E 中的拉回吸引子.

引理 1[1]　对任意的 $\boldsymbol{\varphi}=(u,v)^T\in E_1$，有

$$(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{E_1}\geqslant\frac{\delta}{2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{E_1}^2+\frac{\delta}{4}\|u\|_{H_0^1}^2+\frac{1}{2}\|v\|^2$$

引理 2　若假设 F 成立，则对任意的 $(\tau,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega$，$D\in\mathscr{D}$，存在随机变量 $r_1(\tau,\omega)$ 和 $T=T(D,$

$\tau,\omega)>0$，当 $t\geqslant T$ 时，且 $\boldsymbol{\psi}_0=(\boldsymbol{\psi}_{10},\boldsymbol{\psi}_{20})\in D(\tau-t,\theta_{-t}\omega)$，满足：

$$\|\boldsymbol{\psi}(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\boldsymbol{\psi}_0)\|_E^2\leqslant r_1^2(\tau,\omega) \tag{11}$$

证 在空间 E_1 中，将方程(10)两边与 $\boldsymbol{\psi}_1=(u_1,\bar{z}_1)^T$ 作内积可得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{E_1}^2+(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\psi}_1,\boldsymbol{\psi}_1)_{E_1}=-(g_1(u),\bar{z}_1)+(f_1(x,t),\bar{z}_1)-$$
$$(1-\delta)(h_1(x),\bar{z}_1)W(t)+((h_1(x),u_1))W(t) \tag{12}$$

由引理 1 和 Young 不等式可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{E_1}^2+\delta\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{E_1}^2\leqslant c(\|f_1(\cdot,t)\|^2+\|h_1\|^2|W(t)|^2+\frac{\|h_1\|_{H_0^1}^2}{\delta}|W(t)|^2+1) \tag{13}$$

在 $(\tau-t,\tau)$ 上，由 Gronwall 引理，并用 $\theta_{-\tau}\omega$ 代替 ω 可得：

$$\|\boldsymbol{\psi}_1(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\boldsymbol{\psi}_{10})\|_{E_1}^2\leqslant \mathrm{e}^{-\delta t}\|\boldsymbol{\psi}_{10}\|_{E_1}^2+$$
$$c\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{\delta s}(\|f_1(\cdot,s+\tau)\|^2+\|h_1\|^2|W(s+\tau)|^2+$$
$$\frac{\|h_1\|_{H_0^1}^2}{\delta}|W(s+\tau)|^2+1)\mathrm{d}s \tag{14}$$

同理可得：

$$\|\boldsymbol{\psi}_2(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\boldsymbol{\psi}_{20})\|_{E_1}^2\leqslant \mathrm{e}^{-\delta t}\|\boldsymbol{\psi}_{20}\|_{E_1}^2+$$
$$c\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{\delta s}(\|f_2(\cdot,s+\tau)\|^2+\|h_2\|^2|W(s+\tau)|^2+$$
$$\frac{\|h_2\|_{H_0^1}^2}{\delta}|W(s+\tau)|^2+1)\mathrm{d}s \tag{15}$$

对于 $i=1,2$. 令

$$r_{i1}^2(\tau,\omega)=\mathrm{e}^{-\delta t}\|\boldsymbol{\psi}_{i0}\|_{E_1}^2+$$
$$c\left(\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{\delta s}\|f_i(\cdot,s+\tau)\|^2\mathrm{d}s+\left(\|h_i\|^2+\frac{\|h_i\|_{H_0^1}^2}{\delta}\right)\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^{\delta s}|W(s+\tau)|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{\delta}\right)$$

因为 $\boldsymbol{\psi}_0\in D(\tau-t,\theta_{-t}\omega)$，对于 $i=1,2$，由(2)式可知，存在 $T=T(D,\tau,\omega)>0$，当 $t\geqslant T$ 时，满足：

$$\mathrm{e}^{-\delta t}\|\boldsymbol{\psi}_{i0}\|_{E_1}^2\leqslant \mathrm{e}^{-\delta t}\|D(\tau-t,\theta_{-t}\omega)\|_{E_1}^2\leqslant 1 \tag{16}$$

又由假设 F 和 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{W(t)}{t}=0$，$r_{i1}^2(\tau,\omega)(i=1,2)$ 是有限的，则：

$$\|\boldsymbol{\psi}(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\boldsymbol{\psi}_0)\|_E^2=\|\boldsymbol{\psi}_1(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\boldsymbol{\psi}_{10})\|_{E_1}^2+\|\boldsymbol{\psi}_2(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\boldsymbol{\psi}_{20})\|_{E_1}^2\leqslant$$
$$r_{11}^2(\tau,\omega)+r_{21}^2(\tau,\omega)$$

最后令

$$r_1^2(\tau,\omega)=r_{11}^2(\tau,\omega)+r_{21}^2(\tau,\omega)$$

所以，随机动力系统 $S(t,\tau,\omega,\cdot)$ 存在一个闭的随机 $\mathscr{D}$-拉回吸收集.

$$K(\tau,\omega)=\{\xi\in E:\|\xi\|_E^2\leqslant r_1^2(\tau,\omega)\}$$

证毕.

令 $u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t))$ 为带有初值 $((u_{10},u_{11}+\delta u_{10})^T,(u_{20},u_{21}+\delta u_{20})^T)\in D$ 的方程组(1)的解，将 $u(x,t)$ 作如下分解：

$$u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t))=(y_{11}(t)+y_{12}(t),y_{21}(t)+y_{22}(t))=y_1(t)+y_2(t)$$

其中，

$$y_1(t)=(y_{11}(t),\ y_{21}(t))\qquad y_2(t)=(y_{12}(t),\ y_{22}(t))$$

满足：

$$\begin{cases}\mathrm{d}y_{1t}+\mathrm{d}y_1+Ay_1\mathrm{d}t=(0,\ 0)\\ y_1(x,\ t)\mid_{x\in\partial\mathcal{O}}=(0,\ 0),\ t\geqslant\tau\\ y_1(x,\ \tau)=u_0,\ y_{1t}(x,\ \tau)=u_1,\ x\in\mathcal{O}\end{cases}\tag{17}$$

$$\begin{cases}\mathrm{d}y_{2t}+\mathrm{d}y_2+(Ay_2+g(u))\mathrm{d}t=f(x,\ t)\mathrm{d}t+h(x)\circ\mathrm{d}W\\ y_2(x,\ t)\mid_{x\in\partial\mathcal{O}}=(0,\ 0),\ t\geqslant\tau\\ y_2(x,\ \tau)=y_{2t}(x,\ \tau)=(0,\ 0),\ x\in\mathcal{O}\end{cases}\tag{18}$$

其中，方程组(17)使得 $i=1,2$ 时，以下方程组成立：

$$\begin{cases}\mathrm{d}y_{i1t}+\mathrm{d}y_{i1}+Ay_{i1}\mathrm{d}t=0\\ y_{i1}(x,\ t)\mid_{x\in\partial\mathcal{O}}=0,\ t\geqslant\tau\\ y_{i1}(x,\ \tau)=u_{i0},\ y_{i1t}(x,\ \tau)=u_{i1},\ x\in\mathcal{O}\end{cases}\tag{19}$$

并且，方程组(18)使得 $i=1,2$ 时，以下方程组成立：

$$\begin{cases}\mathrm{d}y_{i2t}+\mathrm{d}y_{i2}+(Ay_{i2}+g_i(u))\mathrm{d}t=f_i(x,\ t)\mathrm{d}t+h_i(x)\circ\mathrm{d}W\\ y_{i2}(x,\ t)\mid_{x\in\partial\mathcal{O}}=0,\ t\geqslant\tau\\ y_{i2}(x,\ \tau)=y_{i2t}(x,\ \tau)=0,\ x\in\mathcal{O}\end{cases}\tag{20}$$

引理 3　若假设 F,G 成立，则对任意的 $(\tau,\ \omega)\in\mathbb{R}\times\Omega$，$D\in\mathscr{D}$，存在随机变量 $r_2(\tau,\ \omega)$ 和 $T=T(D,\ \tau,\ \omega)>0$，当 $t\geqslant T$ 时，且 $\boldsymbol{Y}_{j0}\in D(\tau-t,\ \theta_{-t}\omega)(j=1,\ 2)$，满足：

$$\|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Y}_2(\tau,\ \tau-t,\ \theta_{-\tau}\omega,\ \boldsymbol{Y}_{20})\|_E^2\leqslant r_2^2(\tau,\ \omega)\tag{21}$$

其中，

$$\boldsymbol{Y}_2=(\boldsymbol{Y}_{12},\ \boldsymbol{Y}_{22})=\left(\begin{pmatrix}y_{12}\\ y_{12t}+\delta y_{12}-h_1(x)W\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}y_{22}\\ y_{22t}+\delta y_{22}-h_2(x)W\end{pmatrix}\right)$$

证　令

$$\boldsymbol{Y}_1=(\boldsymbol{Y}_{11},\ \boldsymbol{Y}_{21})$$

其中，

$$\boldsymbol{Y}_{i1}=(y_{i1},\ y_{i1t}+\delta y_{i1})^T\qquad i=1,2$$

将方程(19)化简可得：

$$\boldsymbol{Y}_{i1t}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}_{i1}=0,\ \boldsymbol{Y}_{i1}(\tau,\ \omega)=(u_{i0},\ u_{i1}+\delta u_{i0})^T\tag{22}$$

将方程(22)与 $\boldsymbol{Y}_{i1}$ 在 E_1 中作内积，再结合引理 1 可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{Y}_{i1}\|_{E_1}^2\leqslant-\delta\|\boldsymbol{Y}_{i1}\|_{E_1}^2\tag{23}$$

因为

$$\boldsymbol{Y}_{10}=(\boldsymbol{Y}_{110},\ \boldsymbol{Y}_{210})\in D(\tau-t,\ \theta_{-t}\omega)$$

在 $(\tau-t,\ \tau)$ 上，由 Gronwall 引理，并用 $\theta_{-\tau}\omega$ 代替 ω 可得：

$$\|\boldsymbol{Y}_{i1}(\tau,\ \tau-t,\ \theta_{-\tau}\omega,\ \boldsymbol{Y}_{i10})\|_{E_1}^2\leqslant\mathrm{e}^{-\delta t}\|\boldsymbol{Y}_{i10}\|_{E_1}^2\leqslant$$
$$\mathrm{e}^{-\delta t}(\|u_{i0}\|_{H_0^1}^2+\|u_{i1}+\delta u_{i0}\|^2)\tag{24}$$

因此，

$$\|\boldsymbol{Y}_1(\tau,\ \tau-t,\ \theta_{-\tau}\omega,\ \boldsymbol{Y}_{10})\|_E^2=\|\boldsymbol{Y}_{11}(\tau,\ \tau-t,\ \theta_{-\tau}\omega,\ \boldsymbol{Y}_{110})\|_{E_1}^2+\|\boldsymbol{Y}_{21}(\tau,\ \tau-t,\ \theta_{-\tau}\omega,\ \boldsymbol{Y}_{210})\|_{E_1}^2\leqslant$$

$$e^{-\delta t}(\| u_{10} \|_{H_0^1}^2 + \| u_{20} \|_{H_0^1}^2 + \| u_{11} + \delta u_{10} \|^2 + \| u_{21} + \delta u_{20} \|^2) \tag{25}$$

因为

$$((u_{10}, u_{11} + \delta u_{10})^T, (u_{20}, u_{21} + \delta u_{20})^T) \in D$$

由(2)式可知,

$$\| \boldsymbol{Y}_1(\tau, \tau - t, \theta_{-\tau}\omega, \boldsymbol{Y}_{10}) \|_E^2 \to 0 \qquad t \to +\infty \tag{26}$$

所以,存在 $T = T(D, \tau, \omega) > 0$,当 $t \geqslant T$ 时,满足:

$$\| \boldsymbol{Y}_1(\tau, \tau - t, \theta_{-\tau}\omega, \boldsymbol{Y}_{10}) \|_E^2 \leqslant 1$$

当 $i = 1$ 时,方程组(20)可化为:

$$\boldsymbol{Y}_{12t} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}_{12} = H(\boldsymbol{Y}_{12}, \omega), \boldsymbol{Y}_{12}(\tau, \omega) = (0, -h_1(x)W(\tau))^T \tag{27}$$

其中,

$$H(\boldsymbol{Y}_{12}, \omega) = (h_1(x)W(t), -g_1(u) + f_1(x, t) - (1 - \delta)h_1(x)W(t))^T \tag{28}$$

又令

$$\boldsymbol{Y}_{12} = (\eta_1, \chi_1)^T = (y_{12}, y_{12t} + \delta y_{12} - h_1(x)W)^T \tag{29}$$

在空间 E_1 中,将方程(27)两边与 $A\boldsymbol{Y}_{12}$ 作内积可得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Y}_{12} \|_{E_1}^2 + (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}_{12}, \boldsymbol{Y}_{12})_{E_1} = -(g_1(u), A\chi_1) + (f_1(x, t), A\chi_1) - \\ (1 - \delta)(h_1(x), A\chi_1)W(t) + ((h_1(x), A\eta_1))W(t) \end{aligned} \tag{30}$$

由 Young 不等式、引理 1 和引理 2 可得:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Y}_{12} \|_{E_1}^2 + \delta \| A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Y}_{12} \| \leqslant \\ &3\| A^{\frac{1}{2}} f_1(\cdot, t) \|^2 + 3\left(\| h_1 \|_{H_0^1}^2 + \frac{\| Ah_1 \|^2}{\delta}\right) | W(t) |^2 + 6r_1^2(\tau, \omega) \end{aligned} \tag{31}$$

因为

$$\boldsymbol{Y}_{20} = (\boldsymbol{Y}_{120}, \boldsymbol{Y}_{220}) \in D(\tau - t, \theta_{-t}\omega)$$

在$(\tau - t, \tau)$上,由 Gronwall 引理,并用 $\theta_{-\tau}\omega$ 代替 ω 可得:

$$\begin{aligned} &\| A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Y}_{12}(\tau, \tau - t, \theta_{-\tau}\omega, \boldsymbol{Y}_{120}) \|_{E_1}^2 \leqslant \\ &e^{-\delta t}\| h_1 \|_{H_0^1}^2 | W(\tau) |^2 + 3\int_{-\infty}^0 e^{\delta s}\| A^{\frac{1}{2}} f_1(\cdot, s + \tau) \|^2 \mathrm{d}s + \\ &3\left(\| h_1 \|_{H_0^1}^2 + \frac{\| Ah_1 \|^2}{\delta}\right)\int_{-\infty}^0 e^{\delta s} | W(s + \tau) |^2 \mathrm{d}s + \frac{6}{\delta}r_1^2(\tau, \theta_{-\tau}\omega) = \\ &r_{12}^2(\tau, \omega) \end{aligned} \tag{32}$$

同理,可得:

$$\begin{aligned} &\| A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Y}_{22}(\tau, \tau - t, \theta_{-\tau}\omega, \boldsymbol{Y}_{220}) \|_{E_1}^2 \leqslant \\ &e^{-\delta t}\| h_2 \|_{H_0^1}^2 | W(\tau) |^2 + 3\int_{-\infty}^0 e^{\delta s}\| A^{\frac{1}{2}} f_2(\cdot, s + \tau) \|^2 \mathrm{d}s + \\ &3\left(\| h_2 \|_{H_0^1}^2 + \frac{\| Ah_2 \|^2}{\delta}\right)\int_{-\infty}^0 e^{\delta s} | W(s + \tau) |^2 \mathrm{d}s + \frac{6}{\delta}r_1^2(\theta_{-\tau}\omega) = \\ &r_{22}^2(\tau, \omega) \end{aligned} \tag{33}$$

又由假设 G 和$\lim\limits_{t \to \infty}\dfrac{W(t)}{t} = 0$,$r_{12}^2(\tau, \omega)$ 和 $r_{22}^2(\tau, \omega)$ 是有限的. 又令

$$r_2^2(\tau, \omega) = r_{12}^2(\tau, \omega) + r_{22}^2(\tau, \omega)$$

使得：

$$\|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Y}_2(\tau, \tau - t, \theta_{-\tau}\omega, \boldsymbol{Y}_{20})\|_E^2 = \|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Y}_{12}(\tau, \tau - t, \theta_{-\tau}\omega, \boldsymbol{Y}_{120})\|_{E_1}^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Y}_{22}(\tau, \tau - t, \theta_{-\tau}\omega, \boldsymbol{Y}_{220})\|_{E_1}^2 \leqslant r_{12}^2(\tau, \omega) + r_{22}^2(\tau, \omega) = r_2^2(\tau, \omega) \tag{34}$$

3　$\mathscr{D}$-拉回吸引子的存在性

在本节中，讨论非自治随机 Sine-Gordon 方程组(1) 的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子的存在性和唯一性.

引理 4　若假设 F,G 成立，则随机动力系统 S 在 E 中是 $\mathscr{D}$-拉回渐近紧的.

证　令 $B_{\frac{1}{2}}(\omega)$ 是空间 $(D(A)\times H_0^1(\mathscr{O}))^2$ 上以 $r_2(\tau, \omega)$ 为半径的球. 由于 $(D(A)\times H_0^1(\mathscr{O}))^2 \hookrightarrow (H_0^1(\mathscr{O})\times \boldsymbol{L}^2(\mathscr{O}))^2 = E$ 的嵌入是紧的，可得 $B_{\frac{1}{2}}(\omega)$ 是 E 中的紧集. 对于任意的 $D\in\mathscr{D}$，$\boldsymbol{\psi}(t, \tau - t, \theta_{-t}\omega, \boldsymbol{\psi}_0)\in \hat{S}_\delta(t, \tau - t, \theta_{-t}\omega)D$，由引理 3 可得：

$$\boldsymbol{Y}_2(t, \tau - t, \theta_{-t}\omega, \boldsymbol{Y}_{20}) = \boldsymbol{\psi}(t, \tau - t, \theta_{-t}\omega, \boldsymbol{\psi}_0) - \boldsymbol{Y}_1(t, \tau - t, \theta_{-t}\omega, \boldsymbol{Y}_{10}) \in B_{\frac{1}{2}}(\omega)$$

从而：

$$\inf_{l(t)\in B_{\frac{1}{2}}(\omega)} \|\boldsymbol{\psi}(t, \tau - t, \theta_{-t}\omega, \boldsymbol{\psi}_0) - l(t, \tau - t, \theta_{-t}\omega, l_0)\|_E^2 \leqslant \|\boldsymbol{Y}_1(t, \tau - t, \theta_{-t}\omega, \boldsymbol{Y}_{10})\|_E^2 \to 0 \qquad t\to+\infty$$

其中，

$$l_0 \in D(\tau - t, \theta_{-t}\omega)$$

所以：

$$\mathrm{dist}(\hat{S}_\delta(t, \tau - t, \theta_{-t}\omega)D, B_{\frac{1}{2}}(\omega)) \to 0 \qquad t\to+\infty \tag{35}$$

又由 $\hat{S}_\delta$ 和 S 等价可知，对于任意的 $D\in\mathscr{D}$，有 P-a. e. $\omega\in\Omega$：

$$\mathrm{dist}(S(t, \tau - t, \theta_{-t}\omega)D, B_{\frac{1}{2}}(\omega)) \to 0 \qquad t\to+\infty \tag{36}$$

即随机动力系统 S 在 E 中存在一个拉回吸引紧集 $B_{\frac{1}{2}}(\omega)$，所以随机动力系统 S 在 E 中是 $\mathscr{D}$-拉回渐近紧的.

定理 1　若假设 F,G 成立，则非自治随机 Sine-Gordon 方程组(1) 在 E 中生成的随机动力系统 S 存在唯一的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子 $\mathscr{A}(\tau, \omega)$.

证　由引理 2 可得，随机动力系统 S 在 E 中存在一个闭的随机 $\mathscr{D}$-拉回吸收集. 由引理 4 可得，随机动力系统 S 在 E 中是 $\mathscr{D}$-拉回渐近紧的. 因此，由文献[4] 中的定理 2.23 可得，随机动力系统 S 存在唯一的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子 $\mathscr{A}(\tau, \omega)$.

参考文献：

[1]　赵月利，李扬荣，贺军可. 带加法扰动的随机 Sine-Gordon 方程组的随机吸引子 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2012，37(6)：32－36.

[2]　FAN X M. Random Attractors for a Damped Sine-Gordon Equations with White Noise [J]. Pacific J Math. 2004，216(1)：63－76.

[3]　尹福其，刘林芳，肖翠辉. 无界区域非自治随机 Sine-Gordon 方程的 $\mathscr{D}$-周期吸引子 [J]. 数学学报，2014，57(6)：1127－1140.

[4]　WANG B X. Sufficient and Necessary Criteria for Existence of Pullback Attractors for Non-Compact Random Dynamical

Systems [J]. Journal of Differential Equations, 2012, 253(5): 1544-1583.

[5] LI Y R, GUO B L. Random Attractors for Quasi-Continuous Random Dynamical Systems and Applications to Stochastic Reaction-Diffusion Equations [J]. Journal of Differential Equations, 2008, 245(7): 1775-1800.

[6] CUI H Y, LANGA J A, LI Y R, Regularity and Structure of Pullback Attractors for Reaction Diffusion Type Systems without Uniqueness [J]. Nonlinear Analysis, 2016, 140: 208-235.

[7] 赵文强. 带加法白噪音的随机 Boussinesq 方程组的解的渐近行为 [J]. 数学学报, 2013, 56(1): 1-14.

[8] PAZY A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

Pullback Dynamics for Non-Autonomous Stochastic Sine-Gordon Equations

YANG Shuang[1], WANG Ren-hai[1], LI Yang-rong[1], SHE Lian-bing[2]

1. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China;

2. Department of Mathematics, Liupanshui Normal College, Liupanshui Guizhou 553004, China

Abstract: We are interested in the pullback dynamics for non-autonomous stochastic Sine-Gordon equations with an additive noise. By the use of the uniform estimates of solutions, we prove the existence of a unique pullback attractor for the random dynamical system generated by non-autonomous stochastic Sine-Gordon equations defined in $(H_0^1(\mathscr{O})\times L^2(\mathscr{O}))^2$.

Key words: non-autonomous stochastic Sine-Gordon equations; random dynamical system; pullback attractor; Wiener process

责任编辑 包 颖