第 40 卷第 2 期　　西南大学学报（自然科学版）　　2018 年 2 月
Vol. 40　No. 2　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Feb.　2018

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.02.014

一类二阶离散哈密尔顿系统的无穷多解的存在性①

马　晟，　胡志华，　童　宽，　江　芹

黄冈师范学院 数学系，湖北 黄冈 438000

摘要：基于变分法，运用鞍点定理，得到了一类二阶离散哈密尔顿系统的无穷多解的存在性，推广了已有文献的相关结果.

关　键　词：二阶离散哈密尔顿系统；鞍点定理；周期解；次凸

中图分类号：O176.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2018)02－0085－09

本文讨论下面二阶离散哈密尔顿系统的无穷多解

$$\begin{cases}\Delta^2 u(t-1)+\nabla F(t,u(t))=0 & t\in\mathbb{Z}[1,T]\\ u(0)=u(T)\end{cases}\tag{1}$$

其中：$\Delta u(t)=u(t+1)-u(t)$，$\Delta^2 u(t)=\Delta(\Delta u(t))$，$2\leqslant T\in\mathbb{Z}$，$F(t,x)=\int_0^x\nabla F(t,s)\mathrm{d}s$ 关于变量 t 是 T 周期的，关于变量 x 是连续可微的. $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{R}$ 分别表示整数集和实数集. 对任意 $a,b\in\mathbb{Z}$ 且 $a\leqslant b$，令 $\mathbb{Z}[a,b]=\{a,a+1,\cdots,b\}$.

2003 年，文献[1－3]建立了新的变分框架，运用临界点理论中的极小极大方法研究离散哈密尔顿系统. 此后，有许多作者研究了系统(1)的周期解的存在性与多重性且得到很多有意义的结果. 文献[4]考虑 F 是超二次的情形，文献[5]研究 F 是次二次的情形，分别推广和改进了文献[1]和文献[3]中的相关结果；文献[6]讨论了 F 是次二次的情形，推广了文献[5]的相关结果；文献[7]考虑 F 是次二次且部分周期的情形，推广了文献[5]的相关结果；文献[8]减弱了位势条件推广了文献[7]的相关结果；文献[9]考虑 F 在无穷远处和零点渐进线性的情形，运用临界点理论中的 Morse 理论得到系统(1)的非平凡解的存在性；文献[10]运用对偶原理，研究了系统(1)的规定最小周期的次调和解. 特别是文献[11]，考虑了如下(H1)－(H3)位势条件的无穷多周期解的存在性.

(H1) 存在函数 $f,g:\mathbb{Z}[0,T]\to\mathbb{R}^+$ 和数 $\alpha\in[0,1)$，使得对任意的 $(t,x)\in\mathbb{Z}[0,T]\times\mathbb{R}^N$，有

$$|\nabla F(t,x)|\leqslant f(t)|x|^\alpha+g(t)$$

(H2) $\liminf\limits_{r\to\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N,|x|=r}|x|^{-2\alpha}\sum\limits_{t=0}^{T}F(t,x)=-\infty$.

(H3) $\limsup\limits_{r\to\infty}\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N,|x|=r}\sum\limits_{t=0}^{T}F(t,x)=+\infty$.

其中：r 是某个常数. 最近，文献[12]进一步研究了 $\alpha=1$ 的情形. 受文献[8,13]的启发，在本文中，我们也

① 收稿日期：2017－01－13
基金项目：湖北省自然科学基金资助项目(2013CFB47)，湖北省教育厅科学技术研究重点项目(D20172905).
作者简介：马　晟(1979－)，男，湖北麻城人，副教授，主要从事非线性分析方面的研究.
通信作者：江　芹，副教授.

讨论了一类二阶离散哈密尔顿系统(1)的无穷多解的存在性. 先引出次凸的定义:

对 $\lambda,\mu>0$，函数 $G:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 满足

$$G(\lambda(x+y))\leqslant\mu(G(x)+G(y))\qquad x,y\in\mathbb{R}^N$$

则称这样的函数 G 是(λ,μ)次凸的.

主要结论如下:

定理 1 设函数 $F=F_1+F_2$. F_1，F_2 满足以下条件:

(A1) 函数 $F_1(t,\cdot)$ 是(λ,μ)次凸的，其中 $\lambda>\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<\mu<2\lambda^2$，且存在函数 $a\in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$，$b$，$f$，$g:\mathbb{Z}[0,T]\to\mathbb{R}^+$ 和数 $\alpha\in[0,1)$，使得对任意的 $(t,x)\in\mathbb{Z}[0,T]\times\mathbb{R}^N$，有

$$|F_1(t,x)|\leqslant a(|x|)b(t),\ |\nabla F_2(t,x)|\leqslant f(t)|x|^{\alpha}+g(t)$$

(A2) $\limsup\limits_{r\to\infty}\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N,|x|=r}\sum\limits_{t=0}^{T}F(t,x)=+\infty$.

(A3) $\liminf\limits_{r\to+\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N,|x|=r}|x|^{-2\alpha}\sum\limits_{t=0}^{T}\left(\mu F_1\left(t,\frac{x}{\lambda}\right)+F_2(t,x)\right)<-\frac{2\sum\limits_{t=0}^{T}f^2(t)}{\lambda_1}$，其中：$\lambda_1=2-2\cos\frac{2\pi}{T}$ 是特征问题

$$-\Delta^2u(t-1)=\lambda_1u(t)$$

的特征根，则有

(i) 系统(1)有一解序列 $\{u_n\}$，使得 $\{u_n\}$ 是泛函 φ 的临界点且

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(u_n)=+\infty$$

(ii) 系统(1)有一解序列 $\{u_n\}$，使得 $\{u_n\}$ 是泛函 φ 极小点且

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(u_n)=-\infty$$

其中：泛函 φ 定义在 Hilbert 空间 $H_T=\{u:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^N\mid u(t)=u(t+T),t\in\mathbb{Z}\}$ 上，为

$$\varphi(u)=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T}|\Delta u(t)|^2-\sum_{t=0}^{T}F(t,u(t))$$

注 定理 1 推广了文献[11]中的定理 1. 当 $F_1(t,x)=0$ 时，本文中的条件$(A3)$比文献[11]中定理 1 相应的条件$(H2)$弱. 存在满足本定理 1 而不满足文献[1-13]的函数，如

$$F_1(t,x)=2+\sin|x|^6$$

$$F_2(t,x)=\sin\frac{2\pi t}{T}|x|^{\frac{7}{4}}-\frac{49}{\lambda_1}|x|^{\frac{3}{2}}\sin(\ln(1+|x|))+(h(t),x)$$

其中：$(t,x)\in\mathbb{Z}[0,T]\times\mathbb{R}^N$，$h(t):\mathbb{Z}[0,T]\to\mathbb{R}$ 满足

$$h(t+T)=h(t)$$

且

$$\sum_{t=0}^{T}h(t)=0$$

则 F_1 是(1，1)次凸的且对任意的 $(t,x)\in\mathbb{Z}[0,T]\times\mathbb{R}^N$，有

$$|\nabla F_2(t,x)|\leqslant\frac{7}{4}\left|\sin\frac{2\pi t}{T}\right|\cdot|x|^{\frac{3}{4}}+\frac{3}{2}\cdot\frac{49}{\lambda_1}|x|^{\frac{1}{2}}+|h(t)|\leqslant$$

$$\left(\frac{7}{4}\left|\sin\frac{2\pi t}{T}\right|+\varepsilon\right)|x|^{\frac{3}{4}}+A(\varepsilon)+|h(t)|$$

其中：$A(\varepsilon)$ 是依赖于 ε 的正常数. 取 $\alpha=\frac{3}{4}$，$f(t)=\frac{7}{4}\left|\sin\frac{2\pi t}{T}\right|+\varepsilon$. 经过简单的计算得

$$\sum_{t=0}^{T} F(t, x) = (2+\sin|x|^{6})T - \frac{49T}{\lambda_1}|x|^{\frac{3}{2}}\sin(\ln(1+|x|))$$

取序列

$$x_n = \mathrm{e}^{2n\pi+\frac{3\pi}{2}} - 1 \qquad y_m = \mathrm{e}^{2m\pi+\frac{\pi}{2}} - 1 \qquad i = 1,2,3,\cdots$$

则对充分小的 ε，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{t=0}^{T} F(t, x_n) = +\infty$$

和

$$\lim_{m\to\infty}|y_m|^{-\frac{3}{2}}\sum_{t=0}^{T} F(t, y_m) = -\frac{49T}{\lambda_1} < -\frac{2\sum_{t=0}^{T} f^2(t)}{\lambda_1}$$

成立. 这说明函数 F 满足(A1)－(A3).

1　基本引理

对任意的 $u \in H_T$，定义

$$\|u\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{Z}[1, T]}|u(t)|$$

则有

$$\|u\|_\infty \leqslant \|u\| = \left(\sum_{t=0}^{T}|u(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

定义 H_T 的内积和范数分别为

$$\langle u, v\rangle = \sum_{t=0}^{T}(u(t), v(t))$$

和

$$\|u\| = \left(\sum_{t=0}^{T}|u(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u, v \in H_T$$

容易看出：H_T 是有限维空间且由(A1)知 $\varphi \in C^1(H_T, \mathbb{R})$. 要找系统(1)的解即是找 φ 在空间 H_T 上的临界点.

引理 1[5]　H_T 的一个子空间 N_k 记为

$$N_k = \{u \in H_T \mid -\Delta^2 u(t-1) = \lambda_k u(t)\}$$

其中：$\lambda_k = 2 - 2\cos\frac{2k\pi}{T}$，$k \in \mathbb{Z}\left[0, \left[\frac{T}{2}\right]\right]$，则有下面的结论成立：

(i) $N_k \perp N_j$，$k \neq j, k, j \in \mathbb{Z}\left[0, \left[\frac{T}{2}\right]\right]$；

(ii) $H_T = \bigoplus_{k=0}^{[T/2]} N_k$.

显然，

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{\left[\frac{T}{2}\right]} \leqslant 4$$

记

$$V = N_0$$

和

$$W = N_0^{\perp} = \bigoplus_{k=1}^{[T/2]} N_k$$

则由文献[5]中的引理 2 可得：

$$H_T = N_0 \oplus N_0^{\perp} = V \oplus W$$

$$\sum_{t=0}^{T} |\Delta u(t)|^2 \geqslant \lambda_1 \|u\|^2 \qquad \forall u \in W = N_0^{\perp} \tag{3}$$

记

$$u = \bar{u} + \tilde{u} \in V \oplus W = N_0 \oplus N_0^{\perp}$$

其中：

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T} u(t)$$

由下列恒等式子

$$\|u\| = \left(\sum_{t=0}^{T} |\bar{u} + \tilde{u}(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{t=0}^{T}(|\bar{u}|^2 + |\tilde{u}(t)|^2)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$(T|\bar{u}|^2 + \|\tilde{u}\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

可得：$\|u\| \to \infty$ 当且仅当$(|\bar{u}|^2 + \|\tilde{u}\|^2)^{\frac{1}{2}} \to \infty$.

2 定理 1 的证明

我们运用文献[14] 中的极小极大定理(推论 4.3)，逐步给出定理 1 的证明. 记

$$M_1 = \left(\sum_{t=0}^{T} f^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$M_2 = \sum_{t=0}^{T} f(t),\ M_3 = \sum_{t=0}^{T} g(t)$$

推断 1 泛函 φ 在子空间 W 上是强制的. 令

$$\beta = \log_{2\lambda}(2\mu)$$

则 $\beta \in (0, 2)$. 对 $|x| > 1$，存在正整数 n，满足

$$n - 1 < \log_{2\lambda}|x| < n$$

则有

$$|x|^{\beta} > (2\lambda)^{(n-1)\beta} = (2\mu)^{n-1} \qquad |x| \leqslant (2\lambda)^n$$

因此，由(A1) 可知：

$$F_1(t, x) \leqslant 2\mu F_1\left(t, \frac{x}{2\lambda}\right) \leqslant \cdots \leqslant (2\mu)^n F_1\left(t, \frac{x}{(2\lambda)^n}\right) \leqslant 2\mu |x|^{\beta} F_1\left(t, \frac{x}{(2\lambda)^n}\right) \leqslant 2\mu |x|^{\beta} \cdot a_0 b(t)$$

其中：

$$a_0 = \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} a(s)$$

所以，对任意的$(t, x) \in \mathbb{Z}[0, T] \times \mathbb{R}^N$，有

$$F_1(t, x) \leqslant (2\mu|x|^{\beta} + 1) a_0 b(t) \tag{4}$$

根据条件(A1)，运用 Hölder 不等式和(2)-(4) 式，对所有 $u \in W$，我们可以推出

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T}|\Delta u(t)|^2 - \sum_{t=0}^{T} F_1(t, u) - \sum_{t=0}^{T} F_2(t, u) \geqslant$$

$$\frac{1}{2}\lambda_1\|u\|^2 - \sum_{t=0}^{T}(2\mu|u|^{\beta} + 1) a_0 b(t) - \sum_{t=0}^{T}\left(\frac{f(t)}{\alpha+1}|u(t)|^{\alpha+1} + g(t)|u(t)| + C_1\right) \geqslant$$

$$\frac{1}{2}\lambda_1\|u\|^2 - \|u\|_{\infty}^{\beta}(2\mu a_0)\sum_{t=0}^{T} b(t) - \|u\|_{\infty}^{\alpha+1}\frac{\sum_{t=0}^{T} f(t)}{\alpha+1} - \|u\|_{\infty}\sum_{t=0}^{T} g(t) - C_2 \geqslant$$

$$\frac{1}{2}\lambda_1 \| u \|^2 - (2\mu a_0)\sum_{t=0}^{T} b(t) \| u \|^{\beta} - \frac{M_2}{\alpha+1} \| u \|^{\alpha+1} - M_3 \| u \| - C_2$$

因 $\alpha \in [0, 1)$，$\beta \in (0, 2)$，所以

$$\lim_{\| u \| \to +\infty} \varphi(u) = +\infty$$

推断 2　存在正序列$\{a_n\}$，$\{b_m\}$满足

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{u \in V,\ \| u \| = a_n} \varphi(u) = -\infty$；

(ii) $\lim\limits_{m\to\infty} b_m = +\infty$ 且 $\lim\limits_{m\to\infty} \inf\limits_{u \in H_{b_m}} \varphi(u) = +\infty$，其中 $H_{b_m} = \{u \in V,\ \| u \| = b_m\} \oplus W$.

推断 2 中(i)的证明可参见文献[11]. 由(A3)，我们取常数 $a > \frac{1}{\lambda_1}$，满足

$$\liminf_{r\to+\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^N, |x| = r} | x |^{-2\alpha} \sum_{t=0}^{T}\left(\mu F_1\left(t, \frac{x}{\lambda}\right) + F_2(t, x)\right) < -2aM_1^2 \tag{5}$$

任意 $u \in H_{b_m}$ 可表示为 $u = \tilde{u} + \bar{u}$，其中：$\tilde{u} \in W$ 且 $\bar{u} \in V$. 由 Hölder 不等式，(A1)和(A3)，我们可得

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{t=0}^{T} (F_2(t, u(t)) - F_2(t, \bar{u})) \right| \leqslant \sum_{t=0}^{T} \int_0^1 | (\nabla F_2(t, \bar{u} + s\tilde{u}(t)), \tilde{u}(t)) | \mathrm{d}s \leqslant \\
&\sum_{t=0}^{T} \int_0^1 (f(t) | \bar{u} + s\tilde{u}(t) |^{\alpha} + g(t)) \cdot | \tilde{u}(t) | \mathrm{d}s \leqslant \\
&\sum_{t=0}^{T} f(t) | \bar{u} + \tilde{u}(t) |^{\alpha} | \tilde{u}(t) | + \sum_{t=0}^{T} g(t) | \tilde{u}(t) | \leqslant \\
&\sum_{t=0}^{T} 2^{\alpha} f(t) (| \bar{u} |^{\alpha} + | \tilde{u}(t) |^{\alpha}) | \tilde{u}(t) | + \sum_{t=0}^{T} g(t) | \tilde{u}(t) | \leqslant \\
&2^{\alpha} | \bar{u} |^{\alpha} \left(\sum_{t=0}^{T} f^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{t=0}^{T} | \tilde{u}(t) |^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2^{\alpha} \| \tilde{u} \|_{\infty}^{\alpha+1} \sum_{t=0}^{T} f(t) + \| \tilde{u} \|_{\infty} \sum_{t=0}^{T} g(t) \leqslant \\
&2^{\alpha} M_1 | \bar{u} |^{\alpha} \| \tilde{u} \| + 2^{\alpha} M_2 \| \tilde{u} \|^{\alpha+1} + M_3 \| \tilde{u} \| \leqslant \\
&\frac{1}{2a} \| \tilde{u} \|^2 + 2aM_1^2 | \bar{u} |^{2\alpha} + 2^{\alpha} M_2 \| \tilde{u} \|^{\alpha+1} + M_3 \| \tilde{u} \|
\end{aligned}$$

因此，由上面的不等式和(4)知：对任意 $u \in H_{b_m}$，有下面不等式成立：

$$\begin{aligned}
\varphi(u) = &\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T} | \Delta u(t) |^2 - \sum_{t=0}^{T} F_1(t, u(t)) - \sum_{t=0}^{T} (F_2(t, u(t)) - F_2(t, \bar{u})) - \sum_{t=0}^{T} F_2(t, \bar{u}) \geqslant \\
&\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T} | \Delta \tilde{u}(t) |^2 - \mu \sum_{t=0}^{T} F_1\left(t, \frac{\bar{u}}{\lambda}\right) - \mu \sum_{t=0}^{T} F_1\left(t, \frac{\tilde{u}(t)}{\lambda}\right) - \\
&\sum_{t=0}^{T} (F_2(t, u(t)) - F_2(t, \bar{u})) - \sum_{t=0}^{T} F_2(t, \bar{u}) \geqslant \\
&\frac{1}{2}\lambda_1 \| \tilde{u} \|^2 - \mu \sum_{t=0}^{T} F_1\left(t, \frac{\bar{u}}{\lambda}\right) - \mu (2\mu\lambda^{-\beta} \| \tilde{u} \|_{\infty}^{\beta} + 1) \sum_{t=0}^{T} a_0 b(t) - \\
&\frac{1}{2a} \| \tilde{u} \|^2 - 2aM_1^2 | \bar{u} |^{2\alpha} - 2^{\alpha} M_2 \| \tilde{u} \|^{\alpha+1} - M_3 \| \tilde{u} \| - \sum_{t=0}^{T} F_2(t, \bar{u}) \geqslant \\
&\left(\frac{\lambda_1}{2} - \frac{1}{2a}\right) \| \tilde{u} \|^2 - C_3 \| \tilde{u} \|^{\beta} - 2 M_2 \| \tilde{u} \|^{\alpha+1} - M_3 \| \tilde{u} \| - C_4 - \\
&| \bar{u} |^{2\alpha} \left(\frac{\sum\limits_{t=0}^{T} \left(\mu F_1\left(t, \frac{\bar{u}}{\lambda}\right) + F_2(t, \bar{u})\right)}{| \bar{u} |^{2\alpha}} + 2aM_1^2 \right)
\end{aligned} \tag{6}$$

根据(5)式,(6)式和 $\|u\| \to \infty$ 当且仅当

$$(|\overline{u}|^2 + \|\widetilde{u}\|^2)^{\frac{1}{2}} \to \infty$$

推断 2 的(ii)即可证明.

现给出一个集合

$$\Gamma_n = \{\gamma \in C(B_{a_n}, H_T) \mid \gamma|_{\partial B_{a_n}} = Id|_{\partial B_{a_n}}\}$$

其最小值 c_n 为

$$c_n = \inf_{\gamma \in \Gamma_n} \max_{u \in B_{a_n}} \varphi(\gamma(u))$$

其中:B_{a_n} 是 V 内的球体,a_n 是球 B_{a_n} 的半径.由文献[14]中的定理 4.6 可知,对任意 $\gamma \in \Gamma_n$,有

$$\gamma(B_{a_n}) \cap W \neq \varnothing$$

推断 3 对充分大的 n,存在序列 $\{\gamma_k\} \subset \Gamma_n$ 和空间 H_T 中的序列 $\{\nu_k\}$,使得当 $k \to \infty$ 时,分别满足

$$\max_{u \in B_{a_n}} \varphi(\gamma_k(u)) \to c_n$$

$$\varphi(\nu_k) \to c_n, \ \varphi'(\nu_k) \to 0, \ \mathrm{dist}(\nu_k, \gamma_k(B_{a_n})) \to 0 \tag{7}$$

由推断 1,我们知道

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \varphi(u) = +\infty \qquad u \in W$$

因此,存在常数 C_5 满足

$$\max_{u \in B_{a_n}} \varphi(\gamma(u)) \geqslant \inf_{u \in W} \varphi(u) \geqslant C_5$$

且对充分大的 n,有

$$c_n \geqslant \inf_{u \in W} \varphi(u) \geqslant C_5$$

根据事实 $\gamma(B_{a_n}) \cap W \neq \varnothing$ 和推断 2 的(i),对充分大的 n,有

$$c_n > \max_{u \in \partial B_{a_n}} \varphi(u)$$

因此,由文献[14]中的定理 4.3 和推论 4.3,对固定的 n,此推断成立.

推断 4 $\{\nu_k\}$ 在 H_T 中有界.由(7)式,对充分大的 k,我们可得

$$c_n \leqslant \max_{u \in B_{a_n}} \varphi(\gamma_k(u)) \leqslant c_n + 1$$

选取 $w_k \in \gamma_k(B_{a_n})$ 满足

$$\|\nu_k - w_k\| \leqslant 1 \tag{8}$$

根据推断 2 的(ii),对给定的 n,存在充分大的 m,使得下式成立:

$$b_m > a_n$$

和

$$\inf_{u \in H_{b_m}} \varphi(u) > c_n + 1$$

这就意味着

$$\gamma_k(B_{a_n}) \cap H_{b_m} = \varnothing$$

记

$$w_k = \overline{w}_k + \widetilde{w}_k$$

其中:$\overline{w}_k \in V$ 和 $\widetilde{w}_k \in W$.则对每一个 k,我们可得到

$$\|\overline{w}_k\| < b_m \tag{9}$$

则 $\mu \sum_{t=0}^{T} F_1\left(t, \frac{\overline{w}_k}{\lambda}\right)$ 有界,又由定理 1 的(A1)以及(2)式,(3)式和(9)式可知

$$1+c_n \geqslant \varphi(w_k)=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T}|\Delta w_k(t)|^2-\sum_{t=0}^{T}F_1(t,w_k(t))-\sum_{t=0}^{T}F_2(t,w_k(t))\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\lambda_1\|\widetilde{w}_k\|^2-\mu\sum_{t=0}^{T}F_1\left(t,\frac{\overline{w}_k}{\lambda}\right)-\mu\sum_{t=0}^{T}F_1\left(t,\frac{\widetilde{w}_k(t)}{\lambda}\right)-$$
$$\sum_{t=0}^{T}\left(\frac{f(t)}{\alpha+1}|w_k(t)|^{\alpha+1}+g(t)|w_k(t)|+C_1\right)\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\lambda_1\|\widetilde{w}_k\|^2-\mu\sum_{t=0}^{T}F_1\left(t,\frac{\overline{w}_k}{\lambda}\right)-\mu(2\mu\lambda^{-\beta}\|\widetilde{w}_k\|_\infty^\beta+1)\sum_{t=0}^{T}a_0b(t)-$$
$$4\sum_{t=0}^{T}f(t)[|\overline{w}_k|^{\alpha+1}+|\widetilde{w}_k(t)|^{\alpha+1}]-\sum_{t=0}^{T}g(t)(|\overline{w}_k|+|\widetilde{w}_k(t)|)-C_1T\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\lambda_1\|\widetilde{w}_k\|^2-C_3\|\widetilde{w}_k\|^\beta-4\|\widetilde{w}_k\|_\infty^{\alpha+1}\sum_{t=0}^{T}f(t)-4\|\overline{w}_k\|^{\alpha+1}\sum_{t=0}^{T}f(t)-$$
$$\|\widetilde{w}_k\|_\infty\sum_{t=0}^{T}g(t)-\|\overline{w}_k\|\sum_{t=0}^{T}g(t)-C_6\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\lambda_1\|\widetilde{w}_k\|^2-C_3\|\widetilde{w}_k\|^\beta-4M_2\|\widetilde{w}_k\|^{\alpha+1}-4M_2b_m{}^{\alpha+1}-M_3\|\widetilde{w}_k\|-M_3b_m-C_6 \tag{10}$$

由此可得：$\|\widetilde{w}_k\|$ 有界. 又由(9)式和 $\|w_k\|=(T|\overline{w}_k|^2+\|\widetilde{w}_k\|^2)^{\frac{1}{2}}$，我们可得：$\{w_k\}$ 是有界的. 又由(8)式，我们马上得到：$\{\nu_k\}$ 在 H_T 中有界.

推断 5　c_n 是 φ 的临界值. 因 $\{\nu_k\}$ 有界而且 H_T 是有限维空间，则 $\{\nu_k\}$ 有一个收敛子列，记为 $\{\nu_k\}$，满足

$$\lim_{k\to\infty}\nu_k=u_n$$

那么由(7)式，可得

$$\varphi(u_n)=c_n \qquad \varphi'(u_n)=0$$

因此，u_n 是系统(1)的解.

下面我们证明定理 1 中的(i). 取充分大的 n 满足 $a_n>b_m$，则对任意 $\gamma\in\Gamma_n$，有

$$\gamma(B_{a_n})\cap H_{b_m}\neq\varnothing$$

则

$$\max_{u\in B_{a_n}}\varphi(\gamma(u))\geqslant\inf_{u\in H_{b_m}}\varphi(u)$$

运用上面的不等式和推断 2 的(ii)，有下面的等式成立

$$\lim_{n\to\infty}c_n=+\infty$$

定理 1 中的(i)得证.

接下来，我们证明定理 1 中的(ii). 对给定的 m，定义 H_T 的子集为

$$P_m=\{u=\overline{u}+\widetilde{u}\in H_T\mid\overline{u}\in V,\ \|\overline{u}\|\leqslant b_m,\ \widetilde{u}\in W\}$$

类似于(10)式的证明，对 $u\in P_m$，有不等式

$$\varphi(u)=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{T}|\Delta u(t)|^2-\sum_{t=0}^{T}F(t,u(t))\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\lambda_1\|\widetilde{u}\|^2-\mu\sum_{t=0}^{T}F_1\left(t,\frac{\overline{u}}{\lambda}\right)-\mu(2\mu\lambda^{-\beta}\|\widetilde{u}\|_\infty^\beta+1)\sum_{t=0}^{T}a_0b(t)-$$
$$\sum_{t=0}^{T}\left(\frac{f(t)}{\alpha+1}|u(t)|^{\alpha+1}+g(t)|u(t)|+C_1\right)\geqslant$$

$$\frac{1}{2}\lambda_1 \| \tilde{u} \|^2 - C_3 \| \tilde{u} \|^\beta - 4M_2 \| \tilde{u} \|^{\alpha+1} - 4M_2 b_m{}^{\alpha+1} - M_3 \| \tilde{u} \| - M_3 b_m - C_6 \tag{11}$$

由(11)式可知,φ 在 P_m 中有下界. 取

$$\mu_m = \inf_{u \in P_m} \varphi(u)$$

和序列$\{u_k\} \subset P_m$,满足

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(u_k) = \mu_m$$

类似于$\{w_k\}$的有界性的证明,根据(11)式,我们可得:$\{u_k\}$在 H_T 中有界. 则$\{u_k\}$有一个收敛子列,记为$\{u_k\}$,满足:$k \to \infty$ 时,有

$$u_k \rightharpoonup u_m^*$$

又 P_m 在 H_T 中是闭凸的,所以 $u_m^* \in P_m$,且有

$$\mu_m = \lim_{k \to \infty} \varphi(u_k) \geqslant \varphi(u_m^*)$$

和

$$\mu_m = \varphi(u_m^*)$$

最后,我们将证明 u_m^* 是 P_m 的内点,也将证明 u_m^* 是 φ 的临界点.

$$u_m^* = \bar{u}_m^* + \tilde{u}_m^*$$

其中:$\bar{u}_m^* \in V$,$\tilde{u}_m^* \in W$. 若 $a_n < b_m$,则有 $\partial B_{a_n} \subset P_m$. 这意味着

$$\varphi(u_m^*) = \inf_{u \in P_m} \varphi(u) \leqslant \sup_{u \in \partial B_{a_n}} \varphi(u)$$

由上式和推断2的(ⅱ),我们可以得到

$$\lim_{m \to \infty} \varphi(u_m^*) = -\infty$$

根据推断3,我们可得:对充分大的 m,有 $\bar{u}_m^* \neq b_m$. 这就说明 u_m^* 是 P_m 的内点且 u_m^* 是 φ 的临界点. 定理1得证.

参考文献:

[1] GUO Z M, YU J S. The Existence of Periodic and Subharmonic Solutions of Subquadratic Second-Order Difference Equations [J]. J London Math Soc, 2003, 68(2): 419-430.

[2] GUO Z M, YU J S. Periodic and Subharmonic Solutions for Superquadratic Discrete Hamiltonian Systems [J]. Nonlinear Anal, 2003, 55(7-8): 969-983.

[3] GUO Z M, YU J S. Existence of Periodic and Subharmonic Solutions for Second-Order Superlinear Difference Equations [J]. Sci China Ser A, 2003, 46(4): 506-515.

[4] ZHOU Z, YU J S, GUO Z M. Periodic Solutions of Higher-Dimensional Discrete Systems [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 2004, 134(5): 1013-1022.

[5] XUE Y F, TANG C L. Existence of a Periodic Solution for Subquadratic Second-Order Discrete Hamiltonian Systems [J]. Nonlinear Anal, 2007, 67(7): 2072-2080.

[6] LI C, TANG C L, SHEN X K. Existence of Periodic Solution for Second-Order Discrete Hamiltonian Systems [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2009, 31(6): 116-119.

[7] YAN S H, WU X P, TANG C L. Multiple Periodic Solutions of Second-Order Discrete Hamiltonian Systems [J]. App Math Comput, 2014, 234(C): 142-149.

[8] JIANG Q, MA S, HU Z H. Existence of Multiple Periodic Solutions for Second-Order Discrete Hamiltonian Systems with Partially Periodic Potentials [J], Electronic Journal of Differential Equations, 2016, 2016(307): 1-14.

[9] BIN H H, YU J S, GUO Z M. Nontrivial Periodic Solutions for Asymptotically Linear Resonant Difference Problem [J]. J Math Anal Appl, 2006, 322(1): 477-488.

[10] LONG Y H. Applications of Clark Duality to Periodic Solutions with Minimal Period for Discrete Hamiltonian Systems [J]. J Math Anal Appl，2008，342(1)：726－741.

[11] CHE C F，XUE X P. Infinitely Many Periodic Solutions for Discrete Second-Order Hamiltonian Systems with Oscillating Potential [J]. Advances in Difference Equations，2012，2012(1)：1－9.

[12] JIANG Q，MA S. A Note on Existence of Infinitely Many Periodic Solutions for Second-Order Nonlinear Difference Systems [J]. Advances in Difference Equations，2016，2016(1)：295.

[13] LI C，AGARWAL R P. TANG C L. Infinitely Many Periodic Solutions for Ordinary p-Laplacian Systems [J]. Adv Nonlinear Anal，2015，4(4)：251－261.

[14] MAWHIN J，WILLEM M. Critical Point Theory and Hamiltonian Systems [M]. New York：Applied Mathematical Sciences，Springer-Verlag，1989.

The Existence of Infinitely Many Periodic Solutions for a Class of Second-Order Discrete Hamiltonian Systems

MA Sheng，HU Zhi-hua，TONG Kuan，JIANG Qin

Department of Mathematics，Huanggang Normal University，Huanggang Hubei 438000，China

Abstract：In the paper，based on the variational method，the existence of infinitely many periodic solutions is obtained for a class of second-order discrete Hamiltonian systems via the saddle point theorem.

Key words：second-order discrete Hamiltonian system；saddle point theorem；periodic solution；subconvex

责任编辑　张　枸