第 40 卷第 3 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2018 年 3 月
Vol. 40　No. 3　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Mar.　2018

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.03.011

周期 Sobolev 空间中 Ostrovsky, Stepanyams 和 Tsimring 方程的局部适定性[①]

王宏伟，　贾红艳，　贺怡婷

安阳师范学院 数学与统计学院，河南 安阳 455000

摘要：在周期 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{T})$ 中研究了 Ostrovsky，Stepanyams 和 Tsimring 方程的初值问题. 通过计算 OST 方程在 $H^s(\mathbb{T})$ 中的线性估计和非线性估计，构造了一类新的辅助空间 X_T^s，利用 X_T^s 中的先验估计和压缩映射定理，在 $H^s(\mathbb{T})\left(s>-\dfrac{3}{2}\right)$ 中证明了 OST 方程局部解的适定性.

关　键　词：周期 Sobolev 空间；OST 方程；初值问题；局部适定性

中图分类号：O175.29　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2018)03-0075-07

本文将在周期 Sobolev 空间中研究如下 Ostrovsky，Stepanyams 和 Tsimring 方程[1] 的初值问题

$$\begin{cases} u_t+u_{xxx}-\eta(H(u_x)+H(u_{xxx}))+uu_x=0 & x\in\mathbb{T},\ t\geqslant 0 \\ u(0)=\psi \end{cases} \tag{1}$$

其中：$u=u(x,t)$ 是未知函数，$\mathbb{T}=\dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$，$\eta>0$，$H$ 表示 Hilbert 变换

$$H(g(x))=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|y|>\varepsilon}\frac{g(x-y)}{y}\mathrm{d}y \qquad g\in S(\mathbb{R})$$

OST 方程是一类具耗散项的色散波方程，其中 u_{xxx} 是色散项，$-\eta(H(u_x)+H(u_{xxx}))$ 是耗散项. 大量的数学物理模型是由耗散色散方程来描述的，例如在研究含气泡的液体流动以及弹性管道中的液体流动问题[2] 中提出的 Korteweg-de Vries Burgers 方程

$$u_t+u_{xxx}-\beta u_{xx}+uu_x=0(\beta>0)$$

在研究流体力学中各种长波问题[3-4] 时得到的 Benney-Lin 方程

$$u_t+uu_x+u_{xxx}+\beta(u_{xx}+u_{xxxx})+\eta u_{xxxxx}=0(\beta>0,\ \eta\in\mathbb{R})$$

在研究流体和等离子体湍流问题[5] 时出现的 Chen-Lee 方程

$$u_t+uu_x+\beta Hu_{xx}+\eta(Hu_x-u_{xx})=0(\beta,\ \eta>0)$$

等. 这些方程得到了许多学者的关注，已经取得了大量的研究成果[6-10].

对 OST 方程的研究，目前主要是在通常的 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R})$ 中进行的. 如文献[11] 在

---

① 收稿日期：2016-12-28

基金项目：国家自然科学基金项目(11401460)；安阳师范学院大学生创新基金项目(ASCX/2017-Z108).

作者简介：王宏伟(1977-)，男，河南安阳人，博士，副教授，主要从事偏微分方程研究.

$H^s(\mathbb{R})\left(s>\frac{1}{2}\right)$ 中证明了(1)式局部解的适定性，在 $H^s(\mathbb{R})(s\geqslant 1)$ 中证明了整体解的适定性；文献[12]改进了以上结果，在 $H^s(\mathbb{R})(s\geqslant 0)$ 中得到了局部解的适定性，在 $L^2(\mathbb{R})$ 中得到了整体解的适定性；文献[13-14]进一步把局部适定性结果推广到 $H^s(\mathbb{R})\left(s>-\frac{5}{4}\right)$；文献[15]最终得到了关于局部适定性的最好结果，在 $H^s(\mathbb{R})\left(s>-\frac{3}{2}\right)$ 中证明了 OST 方程局部解的适定性，同时在 $H^s(\mathbb{R})\left(s<-\frac{3}{2}\right)$ 中找到一个反例，说明了局部解是不适定的. 而在周期 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{T})$ 中局部解和整体解的适定性结果，至今未见相关报道.

本文将在 $H^s(\mathbb{T})$ 中研究方程(1)的局部适定性问题. 通过计算方程(1)中的线性估计和非线性估计，并构造一类新的辅助空间 X_T^s，利用 X_T^s 中的先验估计和压缩映射定理，在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{T})\left(s>-\frac{3}{2}\right)$ 中证明了局部解的适定性. 主要结论如下：

定理 1 如果 $s>-\frac{3}{2}$，那么对任意的 $\psi\in H^s(\mathbb{T})$，存在 $T=T(\|\psi\|_{H^s(\mathbb{T})})>0$ 使得方程(1)有唯一解 $u(t)$，满足 $u\in C([0,T];H^s(\mathbb{T}))\cap X_T^s$. 另外，方程的解映射 Φ：$H^s(\mathbb{T})\longmapsto C([0,T];H^s(\mathbb{T}))\cap X_T^s$，$\psi\longmapsto u$ 是光滑的. 这里 Banach 空间 X_T^s 的范数是

$$\|f\|_{X_T^s}=\sup_{t\in[0,T]}\{\|f\|_{H^s(\mathbb{T})}+t^{\frac{|s|}{3}}\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}\}$$

1 先验估计

考虑与方程(1)等价的积分方程

$$u(t)=S(t)\psi-\int_0^t S(t-t')(u(t')u_x(t'))\,\mathrm{d}t' \tag{2}$$

其中 $S(t)\psi$ 通过半群 $S(t)$ 来表示，即

$$\widehat{S(t)\psi}(k)=\mathrm{e}^{itk^3-t(|k|^3-|k|)}\hat{\psi}(k)$$

引理 1 如果 $a>0$，$\eta>0$，$0<t\leqslant\frac{a}{9\eta}$，那么

$$\||k^2|^a\mathrm{e}^{\eta(|k|-|k|^3)t}\|_{l^\infty(\mathbb{Z})}\leqslant Ct^{-\frac{2a}{3}}x_0^{2a}\mathrm{e}^{\eta(x_0t^{\frac{2}{3}}-x_0^3)}$$

这里

$$x_0(t)=\sqrt[3]{\frac{a}{3\eta}+\sqrt{\frac{a^2}{9\eta^2}-\frac{t^2}{729}}}+\sqrt[3]{\frac{a}{3\eta}-\sqrt{\frac{a^2}{9\eta^2}-\frac{t^2}{729}}}$$

证 作变量替换 $t|k|^3=x^3$，可得如下不等式

$$|k^2|^a\mathrm{e}^{\eta(|k|-|k|^3)t}\leqslant t^{-\frac{2a}{3}}\sup_{x\geqslant 0}x^{2a}\mathrm{e}^{\eta(xt^{\frac{2}{3}}-x^3)}$$

令

$$g(x)=x^{2a}\mathrm{e}^{\eta(xt^{\frac{2}{3}}-x^3)}$$

其中 $x\geqslant 0$，则当 $x\to\infty$ 时，$g(x)\to 0$，并且

$$g'(x_0)=0\Leftrightarrow 3\eta x_0^3-\eta t^{\frac{2}{3}}x_0-2a=0$$

因此，$g(x)$ 在 x_0 处取得最大值，引理得到证明.

引理 2 如果 $a\geqslant 0$，$\eta>0$，$t>0$，那么

$$\||k|^a\mathrm{e}^{\eta(|k|-|k|^3)t}\|_{l^2(\mathbb{Z})}\leqslant C(1+(\eta t)^{-\frac{a}{3}}+(\eta t)^{-\frac{2a+1}{6}})$$

证　当 $k \geqslant 2$ 时，有

$$\eta(|k|-|k|^3)t \leqslant \frac{-\eta|k|^3 t}{2}$$

所以

$$\| |k|^a \mathrm{e}^{\eta(|k|-|k|^3)t} \|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{2a} \mathrm{e}^{2\eta(|k|-|k|^3)t} \leqslant C\left(1+\sum_{k=2}^{\infty} k^{2a} \mathrm{e}^{-\eta|k|^3 t}\right)$$

令

$$h(x)=x^{2a}\mathrm{e}^{-\eta x^3 t} \qquad x>0$$

注意到

$$h'(x)=(2a-3\eta x^3 t)x^{2a-1}\mathrm{e}^{-\eta x^3 t}$$

易知，当 $x=\sqrt[3]{\frac{2a}{3\eta t}}$ 时，$h(x)$ 取得最大值. 如果 $\sqrt[3]{\frac{2a}{3\eta t}} \leqslant 1$，那么在 $[1,\infty)$ 上 $h(x)$ 单调递减. 利用变量替换 $y=\eta x^3 t$ 可以得到

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^{2a}\mathrm{e}^{-\eta k^3 t} \leqslant \int_1^{\infty} x^{2a}\mathrm{e}^{-\eta x^3 t}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot(\eta t)^{\frac{-(2a+1)}{3}}\int_{\eta t}^{\infty} y^{\frac{2a-2}{3}}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y \leqslant$$

$$\frac{1}{3}\cdot(\eta t)^{\frac{-(2a+1)}{3}}\Gamma\left(\frac{2a+1}{3}\right) \tag{3}$$

如果 $\sqrt[3]{\frac{2a}{3\eta t}}>1$，那么 $h(x)$ 在 $\left[1,\sqrt[3]{\frac{2a}{3\eta t}}\right)$ 上单调递增，在 $\left[\sqrt[3]{\frac{2a}{3\eta t}},\infty\right)$ 上单调递减. 与上式类似，有

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^{2a}\mathrm{e}^{-\eta k^3 t} \leqslant \sqrt[3]{\frac{(2a)^{2a}}{(3e\eta t)^{2a}}} + \int_2^{\infty} x^{2\lambda}\mathrm{e}^{-x^4 t}\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\sqrt[3]{\frac{(2a)^{2a}}{(3e\eta t)^{2a}}} + \frac{1}{3}\cdot(\eta t)^{-\frac{2a+1}{3}}\Gamma\left(\frac{2a+1}{3}\right)$$

合并以上两种情况，并取平方根，引理得证.

引理 3(线性估计)　如果 $0<T<1$，$s\in\mathbb{R}$，$\psi\in H^s(\mathbb{T})$. 那么

$$\sup_{t\in[0,T]}\|S(t)\psi\|_{H^s(\mathbb{T})} \leqslant C\|\psi\|_{H^s(\mathbb{T})} \tag{4}$$

进一步，如果 $s<0$，则

$$\sup_{t\in[0,T]} t^{\frac{|s|}{3}}\|S(t)\psi\|_{L^2(\mathbb{T})} \leqslant C\Psi_{s,\eta}(T)\|\psi\|_{H^s(\mathbb{T})} \tag{5}$$

这里 $\Psi_{s,\eta}(t)=(1+x_0(t)^{|s|})\mathrm{e}^{\eta(x_0(t)t^{\frac{2}{3}}-x_0^3(t))}$ 是一个定义在 $[0,1]$ 上的增函数，$x_0(t)$ 是由引理 1 定义的.

证　因为对一切 $k\in\mathbb{Z}$，有

$$\eta(|k|-|k|^3)t \leqslant 0$$

故

$$\|S(t)\psi\|_{H^s(\mathbb{T})} \leqslant C\|\langle k\rangle^s \mathrm{e}^{\eta(|k|-|k|^3)t}\hat{\psi}(k)\|_{l^2(\mathbb{R})} \leqslant C\|\psi\|_{H^s(\mathbb{T})}$$

即(4)式成立. 注意到当 $t\in[0,T]$ 时，下列不等式成立

$$t^{\frac{|s|}{3}} \leqslant \frac{(1+t^{\frac{2}{3}}k^2)^{\frac{|s|}{2}}}{(1+k^2)^{\frac{|s|}{2}}}$$

因此，当 $s<0$ 时，有

$$t^{\frac{|s|}{3}}\|S(t)\psi\|_{L^2(\mathbb{T})} \leqslant$$

$$C\|(1+t^{\frac{2}{3}}k^2)^{\frac{|s|}{2}}\mathrm{e}^{\eta(|k|-|k|^3)t}(1+k^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\psi}(k)\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leqslant$$

$$C(\| \mathrm{e}^{\eta(|k|-|k|^3)t} \|_{l^\infty(\mathbb{Z})} + \| t^{\frac{|s|}{3}} k^{|s|} \mathrm{e}^{\eta(|k|-|k|^3)t} \|_{l^\infty(\mathbb{Z})}) \| \psi \|_{H^s(\mathbb{T})}$$

应用引理 1，(5) 式得证.

引理 4(非线性估计)　如果 $-\frac{3}{2} < s \leqslant 0$，$0 < T \leqslant 1$，$t \in [0, T]$，那么

$$\| \int_0^t S(t-t')\partial_x(uv)\mathrm{d}t' \|_{X_T^s} \leqslant CT^{\frac{2s+3}{6}} \| u \|_{X_T^s} \| v \|_{X_T^s}$$

证　当 $s < 0$ 时，对一切非零整数 k，有 $(1+k^2)^{\frac{s}{2}} \leqslant |k|^s$. 利用 Minkowski 不等式，得

$$\| \int_0^t S(t-t')\partial_x(uv)\mathrm{d}t' \|_{H^s(\mathbb{T})} \leqslant C\int_0^t \| \langle k \rangle^s \mathrm{e}^{\eta(t-t')(|k|-|k|^3)t} |k| \widehat{u(t')} * \widehat{v(t')} \|_{l^2(\mathbb{Z})} \mathrm{d}t' \leqslant$$

$$C\int_0^t \| |k|^{s+1} \mathrm{e}^{\eta(t-t')(|k|-|k|^3)t} \|_{l^2(\mathbb{Z})} \| \widehat{u(t')} * \widehat{v(t')} \|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \mathrm{d}t' \tag{6}$$

Young 不等式表明

$$\| \widehat{u(t')} * \widehat{v(t')} \|_{l^\infty(\mathbb{R})} \leqslant Ct'^{\frac{-2|s|}{3}} \| u \|_{X_T^s} \| v \|_{X_T^s} \tag{7}$$

由引理 2 得

$$\| |k|^{s+1} \mathrm{e}^{\eta(t-t')(|k|-|k|^3)t} \|_{l^2(\mathbb{R})} \leqslant C(1 + (\eta(t-t'))^{\frac{-(s+1)}{3}} + (\eta(t-t'))^{\frac{-(2s+3)}{6}}) \tag{8}$$

将(7),(8) 式代入(6) 式得到

$$\begin{aligned}
&\| \int_0^t S(t-t')\partial_x(uv)\mathrm{d}t' \|_{H^s(\mathbb{T})} \leqslant \\
&C \| u \|_{X_T^s} \| v \|_{X_T^s} \int_0^t t'^{\frac{-2|s|}{3}} (1 + (\eta(t-t'))^{\frac{-(s+1)}{3}} + (\eta(t-t'))^{\frac{-(2s+3)}{6}}) \mathrm{d}t' \leqslant \\
&C \| u \|_{X_T^s} \| v \|_{X_T^s} \left(\frac{3t^{\frac{(2s+3)}{3}}}{2s+3} + \frac{t^{\frac{s+2}{3}}}{\eta^{\frac{s+1}{3}}} \int_0^1 y^{\frac{2s}{3}} (1-y)^{\frac{-(s+1)}{3}} \mathrm{d}y \right) + \\
&C \| u \|_{X_T^s} \| v \|_{X_T^s} \left(\frac{t^{\frac{2s+3}{6}}}{\eta^{\frac{2s+3}{6}}} \int_0^1 y^{\frac{2s}{3}} (1-y)^{\frac{-(2s+3)}{6}} \mathrm{d}y \right) \leqslant \\
&C(1 + \eta^{\frac{-(s+1)}{3}} + \eta^{\frac{-(2s+3)}{6}}) T^{\frac{2s+3}{6}} \| u \|_{X_T^s} \| v \|_{X_T^s}
\end{aligned} \tag{9}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
&t^{\frac{|s|}{3}} \| \int_0^t S(t-t')\partial_x(uv)\mathrm{d}t' \|_{L^2(\mathbb{T})} \leqslant \\
&Ct^{\frac{|s|}{3}} \int_0^t \| \mathrm{e}^{\eta(t-t')(|k|-|k|^3)t} |k| \widehat{u(t')} * \widehat{v(t')} \|_{l^2(\mathbb{Z})} \mathrm{d}t' \leqslant \\
&Ct^{\frac{|s|}{3}} \int_0^t \| |k| \mathrm{e}^{\eta(t-t')(|k|-|k|^3)t} \|_{l^2(\mathbb{Z})} \| \widehat{u(t')} * \widehat{v(t')} \|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \mathrm{d}t' \leqslant \\
&Ct^{\frac{-s}{3}} \| u \|_{X_T^s} \| v \|_{X_T^s} \int_0^t t'^{-\frac{2|s|}{3}} (1 + (\eta(t-t'))^{-\frac{1}{3}} + (\eta(t-t'))^{-\frac{1}{2}}) \mathrm{d}t' \leqslant \\
&C \| u \|_{X_T^s} \| v \|_{X_T^s} \left(\frac{3t^{\frac{2s+3}{3}}}{s+3} + \frac{t^{\frac{s+2}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}}} \int_0^1 y^{\frac{2s}{3}} (1-y)^{-\frac{1}{3}} \mathrm{d}y \right) + \\
&C \| u \|_{X_T^s} \| v \|_{X_T^s} \left(\frac{t^{\frac{2s+3}{6}}}{\eta^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 y^{\frac{2s}{3}} (1-y)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \right) \leqslant \\
&C(1 + \eta^{-\frac{1}{3}} + \eta^{-\frac{1}{2}}) T^{\frac{2s+3}{6}} \| u \|_{X_T^s} \| v \|_{X_T^s}
\end{aligned} \tag{10}$$

合并(9),(10) 式，引理得到证明.

在正指数 Sobolev 空间中，与引理 4 类似，有如下的非线性估计.

引理 5　如果 $s \geqslant 0$，$0 < T \leqslant 1$，$t \in [0, T]$，那么

$$\left\| \int_0^t S(t-t')\partial_x(uv)\mathrm{d}t' \right\|_{L_t^\infty H_x^s} \leqslant CT^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L_t^\infty H_x^s} \|v\|_{L_t^\infty H_x^s}$$

证　当 $s \geqslant 0$ 时，$H^s(\mathbb{T})$ 嵌入 $L^2(\mathbb{T})$. 对 $m, n \in L^2(\mathbb{T})$，下列等式成立

$$\widehat{mn}(k) = \widehat{m} * \widehat{n} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \widehat{m}(i)\widehat{n}(k-i)$$

根据下列 Peetre 不等式

$$(1+|x|^2)^{\mu} \leqslant 2^{|\mu|}(1+|x-y|^2)^{|\mu|}(1+|y|^2)^{\mu}$$

x，y，μ 是任意实数，可以得到

$$\langle k\rangle^s \leqslant 2^{\frac{s}{2}}\langle k-j\rangle^s\langle j\rangle^s$$

合并上述结论，并利用 Young 不等式，有

$$\begin{aligned}|\langle k\rangle^s \widehat{mn}(k)| &\leqslant 2^{\frac{s}{2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\langle i\rangle^s \widehat{m}(i)\langle k-i\rangle^s \widehat{n}(k-i)| \leqslant \\ & 2^{\frac{s}{2}} \|\langle k\rangle^s \widehat{m}(k)\|_{l^2(\mathbb{Z})} \|\langle k\rangle^s \widehat{n}(k)\|_{l^2(\mathbb{Z})} \end{aligned} \tag{11}$$

根据引理 2 和(11) 式，有

$$\begin{aligned}&\left\| \int_0^t S(t-t')\partial_x(uv)\mathrm{d}t' \right\|_{L_t^\infty H_x^s} \leqslant \\ &C\int_0^t \left\| |k| \mathrm{e}^{\eta(t-t')(|k|-|k|^3)t} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \|\langle k\rangle^s \widehat{uv(t')}(k)\|_{l^\infty(\mathbb{Z})}\mathrm{d}t' \leqslant \\ &C\int_0^t \left\| |k| \mathrm{e}^{\eta(t-t')(|k|-|k|^3)t} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \|u(t')\|_{H^s(\mathbb{T})} \|v(t')\|_{H^s(\mathbb{T})}\mathrm{d}t' \leqslant \\ &C\int_0^t (1+(-t')^{-\frac{1}{3}}+(-t')^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}t' \|u\|_{L_t^\infty H_x^s} \|v\|_{L_t^\infty H_x^s} \leqslant \\ &CT^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L_t^\infty H_x^s} \|v\|_{L_t^\infty H_x^s}\end{aligned}$$

2　主要结论的证明

本节要证明初值问题(1) 在 $H^s(\mathbb{T})\left(s > -\dfrac{3}{2}\right)$ 中是局部适定的. 为此，利用积分方程(2) 构造一个压缩映射，在合适的空间 M 中，根据引理 4 和引理 5 对非线性项进行双线性估计来得出结论.

定理 1 的证明　对 $0 < T \leqslant 1$，当 $-\dfrac{3}{2} < s < 0$ 时，取 $M = X_T^s$；当 $s \geqslant 0$ 时，取 $M = C([0, T]; H^s(\mathbb{T}))$. 下面分 3 步来证明结论.

1) 解的存在性. 当 $\psi \in H^s(\mathbb{T})$，$s > -\dfrac{3}{2}$ 时，定义映射

$$\Psi(u) = S(t)\psi - \frac{1}{2}\int_0^t S(t-t')\partial_x(u^2(t'))\mathrm{d}t'$$

由引理 3－5，存在一个常数 $C = C(\eta, s)$，使得对任意的 $u, v \in M$，有

$$\|\Psi(u)\|_M \leqslant C(\|\psi\| + T^{g(s)}\|u\|_M^2) \tag{12}$$

$$\|\Psi(u)-\Psi(v)\|_M \leqslant CT^{g(s)}\|u-v\|_M\|u+v\|_M \tag{13}$$

其中，当 $-\dfrac{3}{2} < s < 0$ 时，

$$g(s)=\frac{2s+3}{6}$$

当 $s \geqslant 0$ 时，

$$g(s)=\frac{1}{2}$$

下面取 M 的一个子集 $M(d)=\{u \in M: \| u \|_M \leqslant d\}$，$d=2C\|\psi\|_{H^s(\mathbb{T})}$. 当 $0<T\leqslant \min\{1,(4Cd)^{-\frac{1}{g(s)}}\}$ 时，(12)，(13) 式表明 Ψ 是完备度量空间 $M(d)$ 上的压缩映射. 于是，由压缩映射原理，积分方程(2) 在 $M(d)$ 上存在唯一解 u，并且 u 满足初始条件 $u(0)=\psi$.

2) 连续依赖性. 假定初值 ψ_1，ψ_2 对应的解是 u_1，u_2，则

$$\| u_i \|_M \leqslant 2C \| \psi_i \|_{H^s} \qquad i=1,2$$

$$0<T_i \leqslant \min\{1,(3C^2\|\psi_i\|_{H^s})^{-\frac{1}{g(s)}}\}$$

由引理 3－5，当 $0<T\leqslant \min\{T_1,T_2\}$ 时

$$\begin{aligned}\|u_1-u_2\|_M \leqslant & C\|\psi_1-\psi_2\|_{H^s}+CT^{g(s)}\|u_1+u_2\|_M\|u_1-u_2\|_M \leqslant \\ & C\|\psi_1-\psi_2\|_{H^s}+\frac{2(\|\psi_1\|_{H^s}+\|\psi_2\|_{H^s})}{3\max\{\|\psi_1\|_{H^s},\|\psi_2\|_{H^s}\}}\|u_1-u_2\|_M \leqslant \\ & C\|\psi_1-\psi_2\|_{H^s}+\frac{2}{3}\|u_1-u_2\|_M\end{aligned}$$

这就表明

$$\|u_1-u_2\|_{H^s} \leqslant \|u_1-u_2\|_M \leqslant 3C\|\psi_1-\psi_2\|_{H^s}$$

3) 唯一性. 假定 u，v 是方程(2) 对应于初值 ψ 的两个解，则

$$\|u-v\|_M \leqslant CT^{g(s)}\|u+v\|_M\|u-v\|_M \tag{14}$$

取

$$0<T_1\leqslant (0.5\|u+v\|_M)^{-\frac{1}{g(s)}}$$

由(14) 式在 $[0,T_1]$ 上得到 $u\equiv v$，重复这个过程，可以把唯一性结果延拓到 $[0,T]$.

参考文献:

[1] OSTROVSKY L A，STEPANYAMS Y A，TSIMRING L S. Radiation Instability in a Stratified Shear Flow [J]. Int J Non-Linear Mech，1984，19(2)：151－161.

[2] OTT E，SUDAN N. Damping of Solitary Waves [J]. Phys Fluids，1970，13(6)：1432－1434.

[3] BENNEY D J. Long Waves on Liquid Films [J]. Studies in Applied Mathematics，1966，45(1－4)：150－155.

[4] LIN S P. Finite Amplitude Side-Band Stability of a Viscous Film [J]. J Fluid Mech，1974，63(3)：417－429.

[5] Lee Y C，Chen H H. Nonlinear Dynamical Models of Plasma Turbulence [J]. Phys Scr，1982，T2A(1)：41－47.

[6] MOLINET L，RIBAUD F. The Cauchy Problem for Dissipative Korteweg-de Vries Equations in Sobolev Spaces of Negative Order [J]. Indiana Univ Math J，2001，50(5)：1745－1776.

[7] MOLINET L，RIBAUD F. The Global Cauchy Problem in Bourgain's Type Spaces for a Dispersive Dissipative Semilinear Equation [J]. SIAM J Math Anal，2002，33(6)：1269－1296.

[8] MOLINET L，RIBAUD F. On the Low Regularity of the Korteweg-de Vries-Burgers Equation [J]. Int Math Res Not，2002，37(7)：1979－2005.

[9] DIX D B. Nonuniqueness and Uniqueness in the Initial-Value Problem for Burgers Equation [J]. SIAM J Math Anal，1996，27(3)：708－724.

[10] GUO Z，WANG B. Global Well-Posedness and Inviscid Limit for the Korteweg-de Vries-Burgers Equation [J]. Nonlinear

Analysis，2008，71(12)：1708－1715.

[11] ALVAREZ B. The Cauchy Problem for a Nonlocal Perturbation of the KdV Equation [J]. Differential Integral Equations，2003，16(10)：1249－1280.

[12] CARVAJAL X，SCIALOM M. On the Well-Posedness for the Generalized Ostrovsky，Stepanyams and Tsimring Equation [J]. Nonlinear Anal. 2005，62(7)：1277－1287.

[13] ZHAO X. On Low Regularity of the Ostrovsky，Stepanyams and Tsimring Equation [J]. J Math Anal Appl，2011，378(2)：687－699.

[14] ZHAO X，CUI S. Local Well-Posedness of the Ostrovsky，Stepanyams and Tsimring Equation in Sobolev Spaces of Negative Indices [J]. Nonlinear Anal，2009，70(10)：3483－3501.

[15] ESFAHANI A. Sharp Well-Posedness of the Ostrovsky，Stepanyams and Tsimring Equation [J]. Math Commun，2013，18(2)：323－335.

Local Well-Posedness for Ostrovsky，Stepanyams and Tsimring Equation in Periodic Sobolev Space

WANG Hong-wei，　JIA Hong-yan，　HE Yi-ting

School of Mathematics and Statistics，Anyang Normal University，Anyang Henan 455000，China

Abstract：In this paper，we study the initial data problem of Ostrovsky，Stepanyams and Tsimring equation in periodic Sobolev space. We compute the linear estimates and nonlinear estimates of OST equation in $H^s(\mathbb{T})$，and construct a new auxiliary space X_T^s. Using the priori estimate in X_T^s and the contraction mapping principle，we prove the local well-posedness of OST equation in $H^s(\mathbb{T})\left(s>-\frac{3}{2}\right)$.

Key words：periodic Sobolev space；OST equation；initial value problem；local well-posedness

责任编辑　张　枸