

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.03.012

具基因突变的周期脉冲捕食-食饵系统的动力学行为研究^①

李雅芝, 熊 梅

黔南民族师范学院 数学与统计学院, 贵州 都匀 558000

摘要: 研究了一个周期脉冲捕食-食饵系统, 首先得到了系统的一个不变区域; 其次得到了系统的平凡周期解和捕食者灭绝周期解的存在性; 最后通过数值模拟探讨食饵基因突变率对系统动力学行为的影响, 结果显示存在两个阈值 θ_1^* 和 θ_2^* , 使得突变率 θ 在不同的取值范围时, 系统分别出现全部种群灭绝、捕食者种群灭绝和全部种群持续生存 3 种情况, 也即食饵种群的基因突变率对种群的动力学行为有重要影响.

关 键 词: 周期捕食-食饵系统; 基因突变; 脉冲; 灭绝; 持续生存

中图分类号: O175.14 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2018)03-0082-07

近年来, 随着经济的发展, 环境污染问题越来越严重, 导致许多生物体发生基因突变并且造成许多疾病的产生. 这引起了许多学者的关注和研究, 文献[1-2]发现从生物种群中可以追踪到环境的改变, 并且环境改变从某种角度上促使基因发生改变. 文献[3]从生物角度考虑了此问题. 文献[4]指出基因因素和环境因素导致出生缺陷, 这已经成为一个严重的国际问题. 许多学者通过建立数学模型对此问题进行研究, 并且得出一些很有趣的结果^[5-7]. 最近, 种群动力系统的理论和应用取得了很多有用的结果^[8-10]. 然而, 基因突变对种群动力学行为的影响还相对较少. 文献[11]建立了一个带基因突变的脉冲自治捕食-食饵模型, 并研究了其动力学行为. 考虑到现实环境中很多因素不能用常数衡量, 而是一个周期变化的过程, 因此本文建立了一个具有基因突变的周期脉冲捕食-食饵系统, 通过对其动力学行为的讨论得到一些对生产实践有用的结果.

1 模型建立

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = -d_1(t)x(t) - \beta(t)x(t)z(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -d_2(t)y(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = -d_3(t)z(t) + k(t)\beta(t)x(t)z(t) \end{array}\right\} t \neq (n+l)\tau, t \neq (n+1)\tau$$
$$\left\{\begin{array}{l} \Delta x(t) = 0 \\ \Delta y(t) = -\mu_1 y(t) \\ \Delta z(t) = -\mu_2 z(t) \end{array}\right\} t = (n+l)\tau \quad n = 1, 2, \dots$$
$$\left\{\begin{array}{l} \Delta x(t) = (1-\theta)x(t)(a-bx(t)) \\ \Delta y(t) = \theta x(t)(a-bx(t)) \\ \Delta z(t) = 0 \end{array}\right\} t = (n+1)\tau \quad n = 1, 2, \dots$$

① 收稿日期: 2016-11-13
基金项目: 国家自然科学基金项目(61463044); 贵州省教育厅青年项目(黔教合 KY 字[2015]453); 黔南民族师范学院校级科研项目(qnsy2017003).
作者简介: 李雅芝(1990-), 女, 山西晋城人, 讲师, 主要从事动力系统的研究.

其中: $x(t), y(t), z(t)$ 分别表示正常食饵、突变食饵和捕食者的密度; $d_1(t), d_2(t), d_3(t), \beta(t), k(t)$ 是正的 τ -周期函数, 且 $d_1(t), d_2(t), d_3(t)$ 分别表示正常食饵、突变食饵和捕食者的死亡率, $\beta(t)$ 表示捕食者对正常食饵的消化率, $k(t)$ 表示捕食者捕食正常食饵所获营养的转化率, 出生和捕获均是 τ 周期的; μ_1 和 $\mu_2 (0 \leq \mu_1, \mu_2 \leq 1)$ 分别表示在时刻 $t = (n+l)\tau, 0 < l < 1, n \in \mathbb{N}_+$ 处对突变食饵的捕杀努力量和对捕食者的捕获努力量; $a, b (0 < b < a < 1)$ 分别表示正常种群的内禀增长率和密度依赖率; $0 \leq \theta < 1$ 表示正常食饵的基因突变率; $(1-\theta)x(t)(a-bx(t)), \theta x(t)(a-bx(t))$ 分别表示在 $t = (n+1)\tau, n \in \mathbb{N}_+$ 时刻正常食饵和突变食饵的出生。

2 模型分析

定理 1 集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}_+^3$ 是系统(1) 的一个不变区域, 其中

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : 0 < x < \frac{a}{b} \right\}$$

证 令 $(x(t), y(t), z(t))$ 是系统(1) 具有严格正初值 $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ 的解. 对 $t \in (0, \tau], x(t) \leq x_0 e^{-\int_0^t d_1(s) ds}$, 由

$$0 < x_0 < \frac{a}{b}$$

可得

$$0 < x(\tau) < \frac{a}{b}$$

所以

$$x(\tau^+) = x(\tau)[1 + (1-\theta)(a-bx(\tau))] = -b(1-\theta)x^2(\tau) + [1 + a(1-\theta)]x(\tau)$$

由 $b > 0, 0 < \theta < 1$, 上面的二次多项式在 $0 < x(\tau) < \frac{a}{b}$ 内单调递增, 所以得到 $0 < x(\tau^+) < \frac{a}{b}$, 再由

系统(1) 的周期性, 可得到对所有的 $t \geq 0$ 有 $0 < x(t) < \frac{a}{b}$.

对 $t \in (0, \tau], y(t) = y_0 e^{-\int_0^t d_2(s) ds}$. 由 $y_0 > 0, 0 \leq \mu_1 \leq 1, 0 < x(\tau) < \frac{a}{b}$ 可得

$$\begin{aligned} y(\tau) &= (1-\mu_1)y_0 e^{-\int_0^\tau d_2(s) ds} > 0 \\ y(\tau^+) &= y(\tau) + \theta x(\tau)(a-bx(\tau)) > 0 \end{aligned}$$

再由系统(1) 的周期性, 可得到对所有的 $t \geq 0$ 有 $y(t) > 0$.

对 $t \in (0, \tau], z(t) = z_0 e^{\int_0^t (-d_3(s) + k(s)\beta(s)x(s)) ds}$. 由 $z_0 > 0, 0 \leq \mu_2 \leq 1$, 得

$$z(\tau) = (1-\mu_2)z_0 e^{\int_0^\tau (-d_3(s) + k(s)\beta(s)x(s)) ds} > 0 \quad z(\tau^+) = z(\tau)$$

再由系统(1) 的周期性, 可得到对所有的 $t \geq 0$ 有 $z(t) > 0$. 得证.

下面给出系统(1) 的子系统(2) 的一些基本性质:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -d_1(t)x(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -d_2(t)y(t) \end{aligned} \right\} t \neq (n+l)\tau, t \neq (n+1)\tau$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta x(t) &= 0 \\ \Delta y(t) &= -\mu_1 y(t) \end{aligned} \right\} t = (n+l)\tau \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta x(t) &= (1-\theta)x(t)(a-bx(t)) \\ \Delta y(t) &= \theta x(t)(a-bx(t)) \end{aligned} \right\} t = (n+1)\tau \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

令

$$A = e^{-\int_0^{\tau} d_1(s) ds}$$

$$B = e^{-\int_0^{\tau} d_2(s) ds}$$

显然 $A < 1, B < 1$. 则可得到系统(2)的频闪映射为:

$$\begin{cases} x((n+1)\tau^+) = [1 + (1-\theta)[a - bAx(n\tau^+)]]Ax(n\tau^+) \\ y((n+1)\tau^+) = \theta[a - bAx(n\tau^+)]Ax(n\tau^+) + (1-\mu_1)By(n\tau^+) \end{cases} \quad (3)$$

易知(3)式始终存在不动点 $G_1(0, 0)$, 且当 $[1 + a(1-\theta)]A > 1$ 成立时, (3)式还存在正不动点 $G_2(x^*, y^*)$, 其中

$$x^* = \frac{[1 + a(1-\theta)]A - 1}{b(1-\theta)A^2}$$

$$y^* = \frac{\theta(1-A)[[1 + a(1-\theta)]A - 1]}{[1 - (1-\mu_1)B]bA^2(1-\theta)^2}$$

定理 2 (i) 如果 $[1 + a(1-\theta)]A < 1$ 成立, 则系统(2)的平凡周期解 $(0, 0)$ 是全局渐近稳定的;

(ii) 如果 $[1 + a(1-\theta)]A > 1$ 成立, 则系统(2)的具有正初值 (x^*, y^*) 的周期解 $(x_p(t), y_p(t))$ 是全局渐近稳定的.

证 为了得到系统(2)周期解的稳定性, 只需考虑系统(3)的不动点的稳定性. 记

$$(x^n, y^n) = (x(n\tau^+), y(n\tau^+))$$

则(3)式的线性化表达为

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix}$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x} & \frac{\partial T_1}{\partial y} \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} & \frac{\partial T_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A[1 + a(1-\theta)] - 2b(1-\theta)A^2x & 0 \\ \theta aA - 2\theta bA^2x & (1-\mu_1)B \end{pmatrix}$$

当 $\mathbf{M}$ 的特征根的模小于 1 时, $G_1(0, 0)$ 和 $G_2(x^*, y^*)$ 局部渐近稳定. 而 $\mathbf{M}$ 仅需满足下面的 Jury 条件^[12]:

$$1 - \text{tr}\mathbf{M} + \det\mathbf{M} > 0$$

$$1 + \text{tr}\mathbf{M} + \det\mathbf{M} > 0$$

$$1 - \det\mathbf{M} > 0$$

(i) 如果 $[1 + a(1-\theta)]A < 1$ 成立, $G_1(0, 0)$ 是(3)式唯一的非负不动点, 且有

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}|_{G_1} = \begin{pmatrix} [1 + a(1-\theta)]A & 0 \\ \theta aA & (1-\mu_1)B \end{pmatrix}$$

易知

$$0 < \det\mathbf{M}_1 = (1-\mu_1)B[1 + a(1-\theta)]A < 1$$

$$\text{tr}\mathbf{M}_1 = [1 + a(1-\theta)]A + (1-\mu_1)B > 0$$

显然

$$1 + \text{tr}\mathbf{M}_1 + \det\mathbf{M}_1 > 0$$

$$1 - \det \mathbf{M}_1 > 0$$

进一步有

$$1 - \operatorname{tr} \mathbf{M}_1 + \det \mathbf{M}_1 = [1 - [1 + a(1 - \theta)]A][1 - (1 - \mu_1)B] > 0$$

即 $G_1(0, 0)$ 局部稳定, 进而系统(2) 的平凡周期解 $(0, 0)$ 是全局渐近稳定的.

(ii) 如果 $[1 + a(1 - \theta)]A > 1$ 成立, $G_1(0, 0)$ 不稳定. $G_2(x^*, y^*)$ 存在, 且

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}|_{G_2} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

其中

$$m_1 = [1 + a(1 - \theta)]A - 2b(1 - \theta)A^2 x^* = 2 - [1 + a(1 - \theta)]A < 1$$

$$m_2 = \theta a A - 2\theta b A^2 x^*$$

$$m_3 = (1 - \mu_1)B < 1$$

由 $0 < a, \theta, A < 1$ 得

$$1 < [1 + a(1 - \theta)]A < 2$$

所以

$$0 < \det \mathbf{M}_2 = m_1 m_3 = [2 - [1 + a(1 - \theta)]A](1 - \mu_1)B < 1$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{M}_2 = m_1 + m_3 = 2 - [1 + a(1 - \theta)]A + (1 - \mu_1)B > 0$$

显然

$$1 + \operatorname{tr} \mathbf{M}_2 + \det \mathbf{M}_2 > 0$$

$$1 - \det \mathbf{M}_2 > 0$$

进一步有

$$1 - \operatorname{tr} \mathbf{M}_2 + \det \mathbf{M}_2 = [[1 + a(1 - \theta)]A - 1][1 - (1 - \mu_1)B] > 0$$

即 $G_2(x^*, y^*)$ 局部稳定, 进而系统(2) 的周期解 $(x_p(t), y_p(t))$ 是全局渐近稳定的.

由定理 2 的结论可得系统(1) 解的性质如下:

定理 3 (i) 如果 $[1 + a(1 - \theta)]A < 1$ 成立, 则系统(1) 的平凡周期解 $X_1 = (0, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的;

(ii) 如果 $[1 + a(1 - \theta)]A > 1$ 成立, 则系统(1) 的捕食者种群灭绝周期解 $X_2 = (x_p(t), y_p(t), 0)$ 是全局渐近稳定的.

3 讨 论

本部分主要通过数值模拟探讨食饵种群突变率对整个系统动力学行为的影响. 数值模拟中模型的参数、函数及初值取为: $a = 0.7, b = 0.05, \mu_1 = 0.7, \mu_2 = 0.05, l = 0.25, \tau = 1, d_1(t) = 0.1 + 0.001 \sin t, d_2(t) = 0.2 + 0.002 \sin t, d_3(t) = 0.1 + 0.001 \sin t, k(t) = 0.5 + 0.001 \cos t, \beta(t) = 0.05 + 0.0001 \cos t, x_0 = 1, y_0 = 0.2, z_0 = 0.5$.

从仿真实验可看出突变率 θ 的不同取值对应了系统(1) 不同的动力学行为. 由图 1 知当 $\theta = 0.95$ 时, 系统(1) 中的种群全部灭绝. 由图 2 知当 $\theta = 0.8$ 时, 系统(1) 中的捕食者种群灭绝. 由图 3 知当 $\theta = 0.6$ 时, 系统(1) 是持续生存的. 为了更好地反映突变率对整个系统解的影响, 图 4 显示了以突变率作为分支参数的分支图.

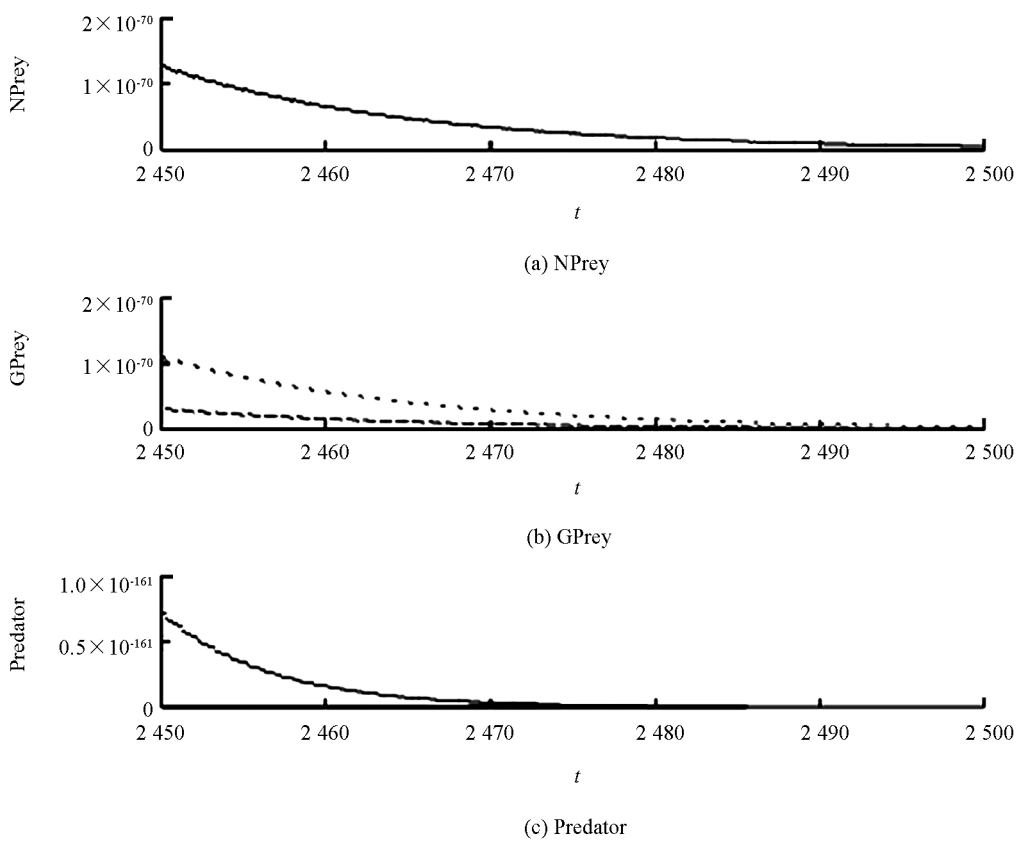


图 1 系统(1)平凡周期解 $X_1 = (0, 0, 0)$ 的稳定性, $\theta = 0.95$

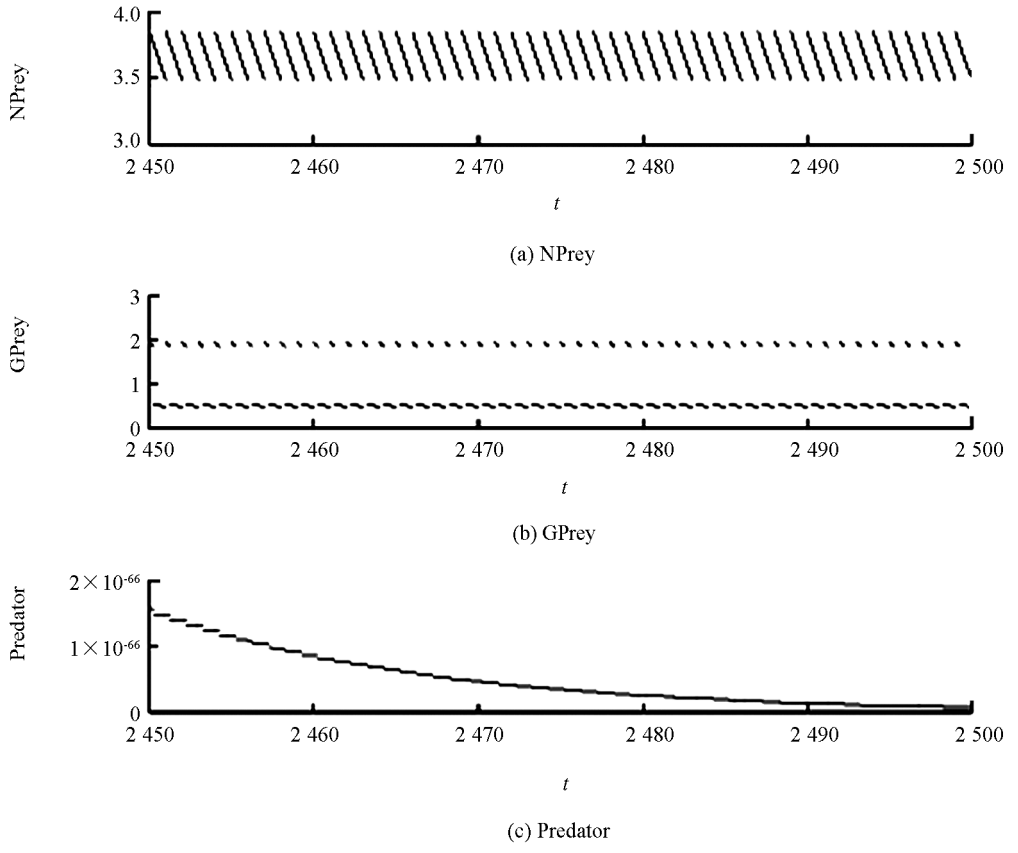


图 2 系统(1)捕食者种群灭绝周期解 $X_2(x_p(t), y_p(t), 0)$ 的稳定性, $\theta = 0.8$

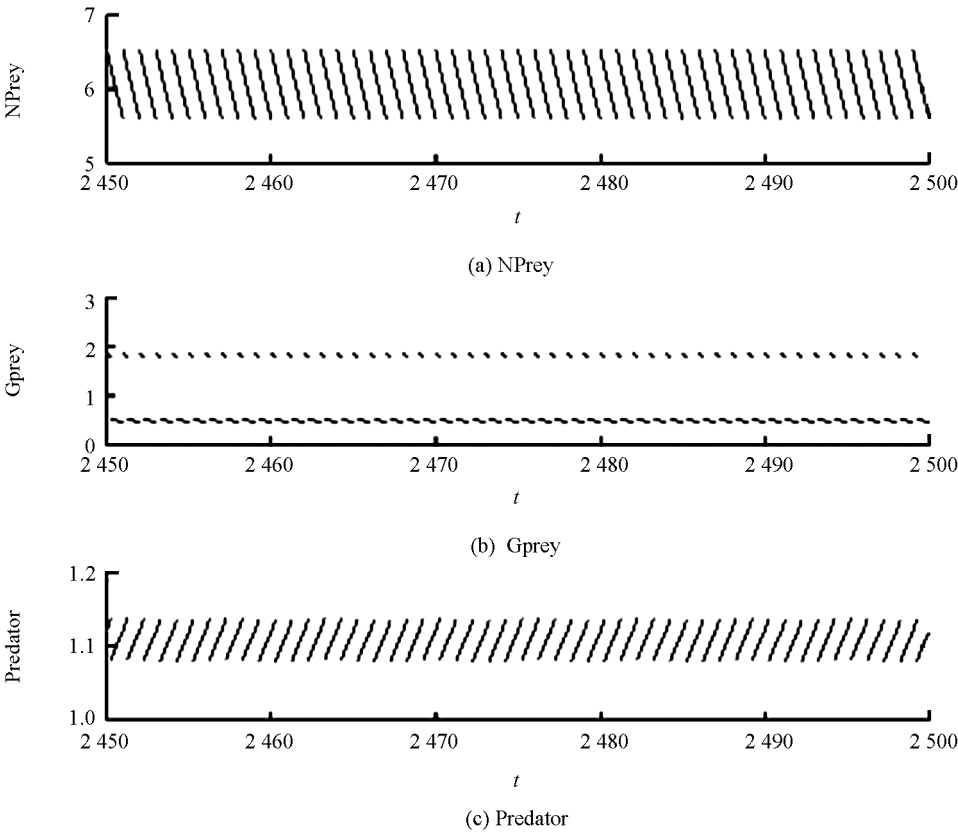


图 3 系统(1)的持续生存性, $\theta=0.6$

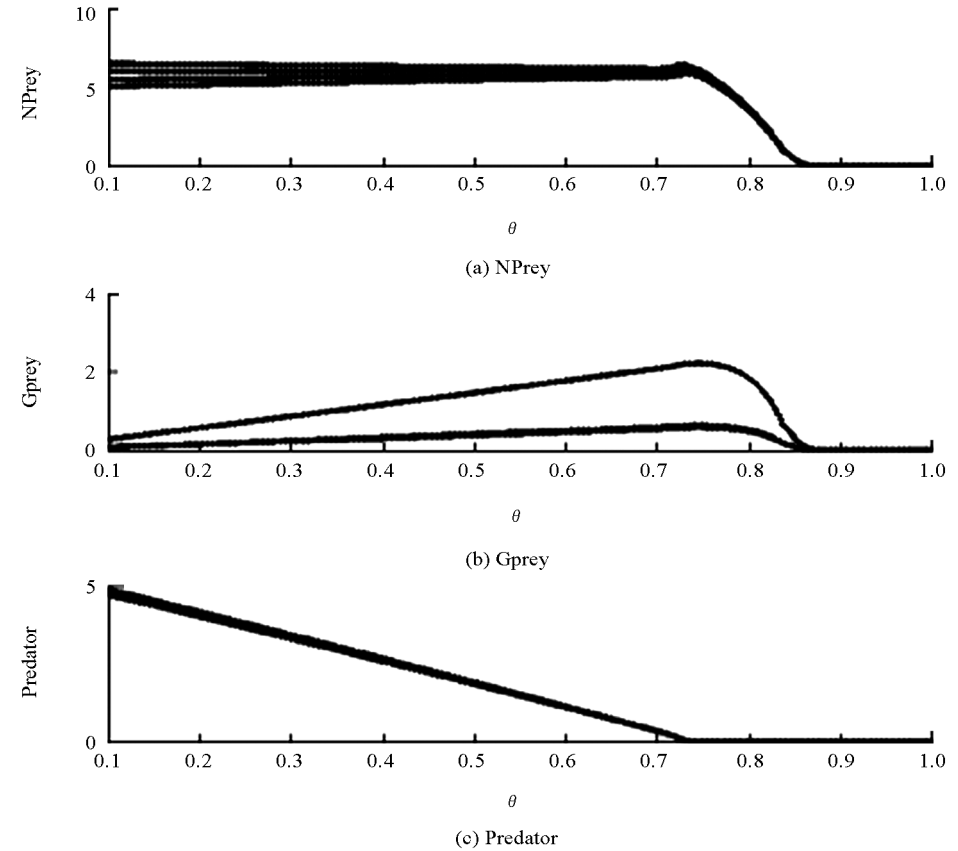


图 4 系统(1)中 3 个变量关于突变率 θ 的参数分支图

从图 4 能够清楚地看到存在两个阈值 θ_1^* 和 θ_2^* ($\theta_2^* > \theta_1^*$), 使得当 $\theta > \theta_2^*$ 时, 系统中所有的种群灭绝. 此时由于食饵突变率非常大, 导致正常食饵种群急剧减少, 进而导致捕食者减少, 并且突变食饵被脉冲捕杀, 因而整个种群会灭绝. 当 $\theta_1^* < \theta < \theta_2^*$ 时, 捕食者种群灭绝. 此时食饵突变率较大, 使得正常食饵种群量较少, 以致无法满足捕食者的生存需求, 因而捕食者种群会灭绝. 当 $\theta < \theta_1^*$ 时, 系统持续生存. 此时食饵突变率较小, 正常的食饵种群可以保证捕食者的生存, 因而所有种群持续生存. 综上, 系统(1)对食饵种群的基因突变率很敏感, 这对生物多样性有很重要的影响, 所以应该加强环境保护力度以减小种群发生基因突变的可能性, 这样才能实现生物的可持续发展.

参考文献:

[1] EPSTEIN S S. Control of Chemical Pollutants [J]. *Nature*, 1970, 228(5274): 816—819.

[2] WAXMAN D, PECK J R. Sex and Adaptation in a Changing Environment [J]. *Genetics*, 1999, 153(2): 1041—1053.

[3] BELLO Y, WAXMAN D. Near-Periodic Substitution and the Genetic Variance Induced by Environmental Change [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2006, 239(2): 152—160.

[4] WEINHOLD B. Environmental Factors in Birth Defects [J]. *Environmental Health Perspectives*, 2009, 117(10): A440—A447.

[5] FREEDMAN H I. Deterministic Mathematical Models in Population Ecology [M]. New York: Marcel Dekker, 1980.

[6] MAY R M. Theoretical Ecology: Principles and Applications [J]. *Journal of Applied Ecology*, 1977, 14(3): 999—1001.

[7] KUANG Y. Delay Differential Equation with Application in Population Dynamics [M]. Boston: Academic Press, 1993.

[8] 杨洪举, 张化永, 黄头生. 一类时间离散捕食者-食饵系统中的分岔研究 [J]. *西南大学学报(自然科学版)*, 2017, 39(7): 115—123.

[9] 黄家琳, 牟天伟. 离散时滞脉冲微分动力系统的指数稳定性判据 [J]. *西南大学学报(自然科学版)*, 2017, 39(6): 87—91.

[10] 赖 菊, 张国洪. 一个考虑 Beddington-DeAngelis 型功能反应的集团内捕食系统的灭绝与持久性 [J]. *西南大学学报(自然科学版)*, 2017, 39(3): 95—101.

[11] JIAO J J, CHEN L S. The Genic Mutation on Dynamics of a Predator-Prey System with Impulsive Effect [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 70(1): 141—153.

[12] JURY E I. *Inners and Stability of Dynamics Systems* [M]. London: Wiley, 1974.

Dynamic Behavior of a Periodic Impulsive Predator-Prey System with a Genetic Mutational Effect

LI Ya-zhi, XIONG Mei
School of Mathematics and Statistics, Qiannan Normal College for Nationalities, Duyun Guizhou 558000, China

Abstract: This paper deals with a periodic impulsive predator-prey system. Firstly, an invariant region for the system is obtained. Secondly, the existence of the trivial periodic solution and the predator-eradication periodic solution are obtained. Finally, the influence of mutation rate of prey on the dynamics of the system is discussed through numerical simulation. The results show that there exist two critical values, i. e. θ_1^* and θ_2^* , which results in three different situations in the system according to the different ranges of mutation rate θ , namely, all the population dies out, the predator population becomes extinct and all the population survives persistently. In other words, genetic mutation rate has a great influence on the dynamics behavior of the system.

Key words: periodic predator-prey system; gene mutation; impulse; extinction; permanence

