第 40 卷第 3 期 西南大学学报(自然科学版) 2018 年 3 月
Vol. 40 No. 3 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Mar. 2018

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.03.017

拟-偏 b -度量空间中 α - φ -压缩映象不动点的存在性[①]

黄 链, 邓 磊

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 在拟-偏 b -度量空间中引入改进后的 α - φ -压缩映象, 并证明了该压缩映象存在不动点, 此结果推广了已有的相关结论.

关 键 词: 拟-偏 b -度量空间; α - φ -压缩; 不动点

中图分类号: O177.91 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2018)03-0115-06

2012 年文献[1]在完备的度量空间中引进了 α - φ -压缩映射, 并证明了该压缩映象不动点的存在性与唯一性. 随后文献[2]在拟-偏度量空间中研究了该压缩映象不动点的存在性. 2015 年 文献[3]定义了拟-偏 b -度量空间, 我们在此空间中引入更广泛的 α - φ -压缩映象, 并证明了该压缩映象下存在不动点.

1 预备知识

定义 1[3] 设 X 为非空集合, $q: X\times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$, 实数 $s\geqslant 1$. 若 $\forall x, y\in X$ 有

(GP1) $q(x, x)=q(x, y)=q(y, y)$, 则 $x=y$;

(GP2) $q(x, x)\leqslant q(x, y)$;

(GP3) $q(x, x)\leqslant q(y, x)$;

(GP4) $q(x, z)\leqslant s[q(x, y)+q(y, z)]-q(y, y)$.

成立, 则称 (X, q) 是拟-偏 b -度量空间. 其中 q 是 X 上的拟-偏 b -度量, s 是 (X, q) 的系数.

注 1[3] 对于拟-偏 b -度量空间 (X, q), 函数 $d_b: X\times X\longrightarrow \mathbb{R}_+$, $d_b(x, y)=q(x, y)+q(y, x)-q(x, x)-q(y, y)$, 则 $d_b(x, y)$ 是 X 上的 b -度量.

注 2[5] 对于拟-偏度量空间 (X, q), 函数 $d_q: X\times X\longrightarrow \mathbb{R}_+$, $d_q(x, y)=\dfrac{q(x, y)+q(y, x)}{2}-\min\{q(x, x), q(y, y)\}$, 则 $d_q(x, y)$ 是 X 上的度量.

引理 1[3] 设 (X, q) 是拟-偏 b -度量空间, 则有下列条件成立

(Q1) 若 $q(x, y)=0$, 则 $x=y$.

(Q2) 若 $x\neq y$, 则 $q(x, y)>0$ 且 $q(y, x)>0$.

---

① 收稿日期: 2017-08-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(11226228).

作者简介: 黄 链(1988-), 女, 四川泸州人, 硕士研究生, 主要从事非线性泛函分析研究.

通信作者: 邓 磊, 教授.

定义 2[3]　设(X, q)是拟-偏b-度量空间，$\{x_n\}$为X中的任一序列，$x \in X$.

(T1) $\{x_n\}$收敛到点$x \Leftrightarrow q(x, x) = \lim\limits_{n \to \infty} q(x, x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} q(x_n, x)$，记为$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

(T2) $\{x_n\}$为柯西列$\Leftrightarrow \lim\limits_{n, m \to \infty} q(x_m, x_n)$及$\lim\limits_{n, m \to \infty} q(x_n, x_m)$存在(且有限).

(T3) (X, q)完备，指X中每个柯西列都收敛于点x，即

$$q(x, x) = \lim_{n, m \to \infty} q(x_m, x_n) = \lim_{n, m \to \infty} q(x_n, x_m)$$

(T4) $f: X \longrightarrow X$在x_0连续，即$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$有$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0, \varepsilon))$.

引理 2[3]　设(X, q)是拟-偏b-度量空间，(X, d_b)是对应的b-度量空间. 若(X, q)完备，则(X, d_b)完备.

定义 3[2]　设映射$T: X \longrightarrow X$，函数$\alpha: X \times X \longrightarrow [0, +\infty]$，若对$x, y, z \in X$满足以下条件，

(i) $\alpha(x, y) \geqslant 1 \Rightarrow \alpha(Tx, Ty) \geqslant 1$；

(ii) $\alpha(x, y) \geqslant 1$且$\alpha(y, z) \geqslant 1 \Rightarrow \alpha(x, z) \geqslant 1$；

则称T为三角形α-轨道相容.

定义 4[2]　设(X, d_b)是b-度量空间，$\{x_n\}$为X中任一序列. 若$\forall n \in \mathbb{N}$，$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geqslant 1$，$\{x_n\}$收敛到点$x$，都存在子列$\{x_{n(k)}\}$使得$\alpha(x_{n(k)}, x) \geqslant 1$，则$X$为$\alpha$-正则.

定义 5[2]　用Ψ表示所有φ的集合，$\varphi: [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$且满足以下条件

(R1) φ非减；

(R2) $\forall t > 0$，$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi^n(t)$收敛；

则称φ是(C)-比较函数. 若φ是(C)-比较函数，则$\forall t > 0$有$\varphi(t) < t$.

定义 6[2]　设(X, q)是拟-偏度量空间，$T: X \longrightarrow X$. $\exists \alpha: X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$，$\varphi \in \Psi$及常数$L > 0$，$\forall x, y \in X$有

$$\alpha(x, y) q(Tx, Ty) \leqslant \varphi(M(x, y)) + L \cdot N(x, y)$$

其中

$$M(x, y) = \max\{q(x, y), q(x, Tx), q(y, Ty)\}$$

$$N(x, y) = \min\{d_q(x, Tx), d_q(y, Ty), d_q(x, Ty), d_q(y, Tx)\}$$

称T为α-φ-压缩映象.

定义 7　设(X, q)是拟-偏b-度量空间，系数为s. $T: X \longrightarrow X$. $\exists \alpha: X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$，$\varphi \in \Psi$及常数$L > 0$，$\forall x, y \in X$有

$$\alpha(x, y) q(Tx, Ty) \leqslant \varphi(M(x, y)) + L \cdot N(x, y) \tag{1}$$

其中

$$M(x, y) = \max\left\{q(x, y), q(x, Tx), q(y, Ty), \frac{q(x, Ty) + q(y, Tx)}{2s}\right\}$$

$$N(x, y) = \min\{d_b(x, Tx), d_b(y, Ty), d_b(x, Ty), d_b(y, Tx)\}$$

则称T为广义的α-φ-压缩映象.

2　主要结果

定理 1　设(X, q)是完备的拟-偏b-度量空间，$T: X \longrightarrow X$为广义的α-φ-压缩映象. $\exists x_0$使得$q(x_0, Tx_0) < \dfrac{1}{s}$，若满足以下条件

(i) T为三角形α-轨道相容；

(ii) $\exists x_0 \in X$，使得$\alpha(x_0, Tx_0) \geqslant 1$且$\alpha(Tx_0, x_0) \geqslant 1$；

(iii) T 连续或 X 是 α -正则.

则 T 存在不动点 u，且 $q(u, u)=0$.

证　对 $\forall n\in\mathbb{N}$，由 $x_{n+1}=Tx_n$ 构造序列 $\{x_n\}\in X$；

若 $\exists n_0\geqslant 0$ 有 $q(x_{n_0}, x_{n_0+1})=0$，即 $x_{n_0}=x_{n_0+1}=Tx_{n_0}$，则 x_{n_0} 为 T 的不动点. 不妨设 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有 $q(x_{n_0}, x_{n_0+1})>0$，由条件 (i) 及 (ii) 有

$$\alpha(x_0, x_1)=\alpha(x_0, Tx_0)\geqslant 1\Rightarrow\alpha(x_1, x_2)=\alpha(Tx_0, Tx_1)\geqslant 1$$

$$\alpha(x_1, x_0)=\alpha(Tx_0, x_0)\geqslant 1\Rightarrow\alpha(x_2, x_1)=\alpha(Tx_1, Tx_0)\geqslant 1$$

递推可得，$\forall n\in\mathbb{N}$ 有

$$\alpha(x_n, x_{n+1})\geqslant 1,\ \alpha(x_{n+1}, x_n)\geqslant 1$$

由(1) 式有

$$q(x_n, x_{n+1})=q(Tx_{n-1}, Tx_n)\leqslant\alpha(x_{n-1}, x_n)q(Tx_{n-1}, Tx_n)\leqslant \varphi(M(x_{n-1}, x_n))+L\cdot N(x_{n-1}, x_n) \tag{2}$$

其中

$$N(x_{n-1}, x_n)=\min\{d_b(x_{n-1}, Tx_{n-1}), d_b(x_n, Tx_n), d_b(x_{n-1}, Tx_n), d_b(x_n, Tx_{n-1})\}= \min\{d_b(x_{n-1}, x_n), d_b(x_n, x_{n+1}), d_b(x_{n-1}, x_{n+1}), d_b(x_n, x_n)\}=0$$

因此整理(2) 式有

$$q(x_n, x_{n+1})\leqslant\varphi(M(x_{n-1}, x_n)) \tag{3}$$

其中

$$M(x_{n-1}, x_n)=\max\left\{q(x_{n-1}, x_n), q(x_{n-1}, Tx_{n-1}), q(x_n, Tx_n), \frac{q(x_{n-1}, Tx_n)+q(x_n, Tx_{n-1})}{2s}\right\}= \max\left\{q(x_{n-1}, x_n), q(x_{n-1}, x_n), q(x_n, x_{n+1}), \frac{q(x_{n-1}, x_{n+1})+q(x_n, x_n)}{2s}\right\}$$

又由(GP4) 有

$$q(x_{n-1}, x_{n+1})+q(x_n, x_n)\leqslant sq(x_{n-1}, x_n)+sq(x_n, x_{n+1})-q(x_n, x_n)+q(x_n, x_n)= sq(x_{n-1}, x_n)+sq(x_n, x_{n+1})$$

则

$$M(x_{n-1}, x_n)\leqslant\max\left\{q(x_{n-1}, x_n), q(x_n, x_{n+1}), \frac{q(x_{n-1}, x_n)+q(x_n, x_{n+1})}{2}\right\}$$

假设

$$q(x_n, x_{n+1})\geqslant q(x_{n-1}, x_n)$$

则

$$M(x_{n-1}, x_n)\leqslant q(x_n, x_{n+1})$$

又由 φ 非减，由此整理(3) 式有

$$q(x_n, x_{n+1})\leqslant\varphi(q(x_n, x_{n+1}))$$

这与 $\forall t>0$，$\varphi(t)<t$ 矛盾，假设不成立. 因此

$$q(x_n, x_{n+1})<q(x_{n-1}, x_n)$$

则

$$M(x_{n-1}, x_n)\leqslant q(x_{n-1}, x_n)$$

又由 φ 非减，由此整理(3) 式有

$$q(x_n, x_{n+1})\leqslant\varphi(q(x_{n-1}, x_n))$$

递推有

$$q(x_n, x_{n+1})\leqslant\varphi(q(x_{n-1}, x_n))\leqslant\varphi^2(q(x_{n-2}, x_{n-1}))\leqslant\cdots\leqslant\varphi^n(q(x_0, x_1))$$

当 $m > n$ 时，由 $\varphi(t) < t$ 及 $q(x_0, Tx_0) < \frac{1}{s}$ 有

$$
\begin{aligned}
q(x_n, x_m) \leqslant & s[q(x_n, x_{n+1}) + q(x_{n+1}, x_m)] - q(x_{n+1}, x_{n+1}) \leqslant \\
& sq(x_n, x_{n+1}) + s^2 q(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^2 q(x_{n+2}, x_m) \leqslant \\
& sq(x_n, x_{n+1}) + s^2 q(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + s^{m-n} q(x_{m-1}, x_m) = \\
& s\varphi^n(q(x_0, x_1))[1 + s\varphi(q(x_0, x_1)) + s^2\varphi^2(q(x_0, x_1)) + \cdots + s^{m-n-1}\varphi^{m-n-1}(q(x_0, x_1))] = \\
& s\varphi^n(q(x_0, x_1)) \frac{1 - [s\varphi(q(x_0, x_1))]^{m-n}}{1 - s\varphi(q(x_0, x_1))} \leqslant \\
& \frac{s}{1 - s\varphi(q(x_0, x_1))} \varphi^n(q(x_0, x_1))
\end{aligned}
$$

又由 $\forall t > 0$，$\sum_{i=0}^{+\infty} \varphi^i(t)$ 收敛有

$$\lim_{n, m \to \infty} q(x_n, x_m) \leqslant 0$$

则

$$\lim_{n, m \to \infty} q(x_n, x_m) = 0$$

类似可证

$$\lim_{n, m \to \infty} q(x_m, x_n) = 0$$

因此 $\{x_n\}$ 是 (X, q) 上的柯西列. 又由 (X, q) 完备，设 $\{x_n\}$ 收敛到点 u，则有

$$
\begin{aligned}
q(u, u) = \lim_{n \to \infty} q(x_n, u) = \lim_{n \to \infty} q(u, x_n) = \\
\lim_{n, m \to \infty} q(x_n, x_m) = \lim_{n, m \to \infty} q(x_m, x_n) = 0
\end{aligned} \tag{4}
$$

下证 u 为 T 的不动点. 若 T 连续则有

$$Tu = \lim_{n \to \infty} Tx_n = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = u$$

即 u 为 T 的不动点. 若 X 是 α -正则，即存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n(k)}\}$，使得

$$\alpha(x_{n(k)}, u) \geqslant 1$$

假设 $q(u, Tu) > 0$，

$$
\begin{aligned}
q(x_{n(k)+1}, Tu) = q(Tx_{n(k)}, Tu) \leqslant \alpha(x_{n(k)}, u) q(Tx_{n(k)}, Tu) \leqslant \\
\varphi(M(x_{n(k)}, u)) + L \cdot N(x_{n(k)}, u)
\end{aligned} \tag{5}
$$

其中

$$M(x_{n(k)}, u) = \max\left\{q(x_{n(k)}, u), q(x_{n(k)}, Tx_{n(k)}), q(u, Tu), \frac{q(x_{n(k)}, Tu) + q(u, Tx_{n(k)})}{2s}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
N(x_{n(k)}, u) = & \min\{d_b(x_{n(k)}, Tx_{n(k)}), d_b(u, Tu), d_b(x_{n(k)}, Tu), d_b(u, Tx_{n(k)})\} = \\
& \min\{d_b(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}), d_b(u, Tu), d_b(x_{n(k)}, Tu), d_b(u, x_{n(k)+1})\}
\end{aligned}
$$

令上式两边 $k \to \infty$ 取极限有

$$\lim_{k \to \infty} M(x_{n(k)}, u) = \max\left\{q(u, Tu), \frac{q(u, Tu)}{2s}\right\} = q(u, Tu)$$

$$\lim_{k \to \infty} N(x_{n(k)}, u) = 0$$

由此令(5)式两边 $k \to \infty$ 取极限有

$$q(u, Tu) \leqslant \varphi(q(u, Tu))$$

这与 $\forall t > 0$，$\varphi(t) < t$ 矛盾. 因此假设不成立，即

$$q(u, Tu) = 0$$

综上证得：u 为 T 的不动点且 $q(u, u) = 0$.

推论 1　设(X, q)是完备的拟-偏度量空间，$T: X \longrightarrow X$. 若 $\exists \alpha: X\times X \longrightarrow [0, +\infty)$，$\varphi \in \Psi$ 及常数 $L>0$，$\forall x, y \in X$ 有

$$\alpha(x, y)q(Tx, Ty) \leqslant \varphi(M(x, y)) + L \cdot N(x, y)$$

其中

$$M(x, y) = \max\left\{q(x, y), q(x, Tx), q(y, Ty), \frac{q(x, Ty)+q(y, Tx)}{2}\right\}$$

$$N(x, y) = \min\{d_q(x, Tx), d_q(y, Ty), d_q(x, Ty), d_q(y, Tx)\}$$

若满足以下条件

(i) T 是三角形 α-轨道相容；

(ii) $\exists x_0 \in X$，使得 $\alpha(x_0, Tx_0) \geqslant 1$ 且 $\alpha(Tx_0, x_0) \geqslant 1$；

(iii) T 连续或 X 是 α-正则；

则 T 有不动点 u，且 $q(u, u)=0$.

注 3　该推论是对文献[2]中定理 2.2 的推广.

推论 2　设(X, q)是完备的拟-偏 b-度量空间，$T: X \longrightarrow X$. 若存在 $\varphi \in \Psi$ 及 $q(x_0, Tx_0) < \frac{1}{s}$ 使得 $\forall x, y \in X$ 有

$$q(Tx, Ty) \leqslant \varphi(M(x, y))$$

其中

$$M(x, y) = \max\left\{q(x, y), q(x, Tx), q(y, Ty), \frac{q(x, Ty)+q(y, Tx)}{2s}\right\}$$

则 T 有不动点 u，且 $q(u, u)=0$.

证　令定理 1 中 $L=0$，$\alpha(x, y)=1$ 即可证得.

推论 3　设(X, p)是完备的偏 b-度量空间，$T: X \longrightarrow X$. 若 $\exists \alpha: X\times X \longrightarrow [0, +\infty)$，$\varphi \in \Psi$ 及 $p(x_0, Tx_0) < \frac{1}{s}$，使得 $\forall x, y \in X$ 有

$$\alpha(x, y)p(Tx, Ty) \leqslant \varphi(M(x, y))$$

其中

$$M(x, y) = \max\left\{p(x, y), p(x, Tx), p(y, Ty), \frac{p(x, Ty)+p(y, Tx)}{2s}\right\}$$

若满足以下条件

(i) T 是三角形 α-轨道相容；

(ii) $\exists x_0 \in X$，使得 $\alpha(x_0, Tx_0) \geqslant 1$；

(iii) T 连续或 X 是 α-正则；

(iv) $\forall x, y \in F(T)$，有 $\alpha(x, y) \geqslant 1$，其中 $F(T)$ 是由 T 的不动点构成的集合；

则 T 有唯一不动点.

证　不动点的存在性类似定理 1 可证，下证唯一性. 设 $\exists u, v \in F(T)$，假设 $u \neq v$ 且由 (iv) 有

$$p(u, v) = p(Tu, Tv) \leqslant \alpha(u, v)p(Tu, Tv) \leqslant \varphi(M(u, v)) \tag{6}$$

其中

$$M(u, v) = \max\left\{p(u, v), p(u, Tu), p(v, Tv), \frac{p(u, Tv)+p(v, Tu)}{2s}\right\} =$$

$$\max\left\{p(u, v), \frac{p(u, v)+p(v, u)}{2s}\right\} =$$

$$\max\left\{p(u, v), \frac{p(u, v)}{s}\right\} = p(u, v)$$

又由 $\forall t > 0$，$\varphi(t) < t$，整理(6)式有

$$p(u, v) < p(u, v)$$

显然不成立，故 $u = v$，即唯一性得证.

综上可得 T 有唯一不动点.

注 4 该推论是对文献[4]中定理 2.17 的推广.

参考文献:

[1] SAMET B, VETRO C, VETRO P. Fixed Point Theorems for α-φ-Contractive Type Mappings [J]. Nonlinear Analysis, 2012, 75(4): 2154-2165.

[2] KARAPINAR E, GHOLIZADEH L, HALSULAMI H, et al. α-(φ, ϕ) Contractive Mappings on Quasi-Partial Metric Spaces [J]. Fixed Point Theory and Applications, 2015, 2015(1): 1-20.

[3] GUPTA A, GAUTAM P. Quasi-Partial b-Metric Spaces and Some Related Fixd Point Theorems [J]. Fixed Point Theory and Applications, 2015, 2015(18): 1-17.

[4] LATIF A, ROSHAN J R, PARVANEH V, et al. Fixed Point Results Via α-Admissible Mappings and Cyclic Contractive Mappings in Partial b-Metric Spaces [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2014(345): 1-26.

[5] BILGILI N, KARAPINAR E, SAMET B. Generalized α-ψ Contractive Mappings in Quasi-Metric Spaces and Related Fixed Point Theorems [J]. Journal of Inequalities & Applications, 2014, 2014(1): 1-15.

[6] 姚 婷, 邓 磊, 杨明歌. 弱(ψ, ϕ)压缩映象在偏矩度量空间中的公共不动点定理 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(2): 65-71.

α-φ-Contractive Mappings on Quasi-Partial b-Metric Spaces

HUANG Lian, DENG Lei

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we consider generalized α-φ-contractive mappings in the setting of quasi-partial b-metric spaces and verify the existence of a fixed point on such spaces. The derived result generalizes and extends some related results.

Key words: quasi-partial b-metric space; α-φ-contractive mapping; fixed point

责任编辑 张 枸