DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.04.006

不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=33y(y+1)(y+2)(y+3)$ 的整数解的研究①

陈　琼

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 主要运用 Pell 方程、递推序列、同余式及(非)平方剩余等一些初等的证明方法，对不定方程

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=33y(y+1)(y+2)(y+3)$$

的解进行了研究. 证明了该不定方程仅有 1 组正整数解 $(x,y)=(9,3)$. 同时给出了不定方程 $(x^2+3x+1)^2-33y^2=-32$ 的全部整数解.

关　键　词： 不定方程；整数解；递归数列；平方剩余

中图分类号： O156.2　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673-9868(2018)04-0035-06

当 $(m,n)=1$，$m,n\in\mathbb{N}_+$ 时，对于形如

$$mx(x+1)(x+2)(x+3)=ny(y+1)(y+2)(y+3)$$

的不定方程已有不少的研究工作[1-6]，尤其是当 $m=1$ 时，对不定方程

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=Dy(y+1)(y+2)(y+3)$$

的研究. 到目前为止，很多数论学者已经对 $D=2,3,5,6,7,10,11,13,14,15,19,21,23,26,30,34,35,38,39,p^{2k},4p^{2k}$（其中 p 是素数，$k\in\mathbb{N}_+$）的情形进行了讨论. 本文将运用递归数列的方法证明当 $D=33$ 时，不定方程

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=33y(y+1)(y+2)(y+3) \tag{1}$$

仅有一组正整数解 $(x,y)=(9,3)$.

先将方程(1)化为如下形式：

$$(x^2+3x+1)^2-33(y^2+3y+1)^2=-32 \tag{2}$$

易知方程 $x^2-33y^2=-32$ 的全部整数解可以由以下 4 个结合类给出：

$$X_n+Y_n\sqrt{33}=\pm(1+\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$\overline{X_n}+\overline{Y_n}\sqrt{33}=\pm(-1+\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$X_n'+Y_n'\sqrt{33}=\pm(10+2\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$\overline{X_n}'+\overline{Y_n}'\sqrt{33}=\pm(-10+2\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

其中 $1+\sqrt{33}$，$10+2\sqrt{33}$ 是不定方程 $X^2-33Y^2=-32$ 相应结合类的基本解，$23+4\sqrt{33}$ 是 Pell 方程 $u^2-38v^2=1$ 的基本解. 因为 $x^2+3x+1\equiv 1 \pmod 2$，从而舍去后面两个结合类. 另外，我们可以得到不定方

① 收稿日期：2017-08-02
基金项目：国家自然科学基金项目(11471265).
作者简介：陈　琼(1992-)，女，四川乐山人，硕士研究生，主要从事计算数论的研究.

程(2)的解应该满足：

$$(2x+3)^2 = 4X_n + 5 \tag{3}$$

$$(2x+3)^2 = 4\overline{X_n} + 5 \tag{4}$$

由于限制条件 $X_n \geqslant -1$，$\overline{X_n} \geqslant -1$，故(3)，(4)式中的 X_n，$\overline{X_n}$ 只需要满足下面 2 个式子：

$$X_n + Y_n\sqrt{33} = (1+\sqrt{33})(u_n + v_n\sqrt{33}) = (1+\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n \qquad n \geqslant 0$$

$$\overline{X_n} + \overline{Y_n}\sqrt{33} = (-1+\sqrt{33})(u_n + v_n\sqrt{33}) = (-1+\sqrt{33})(23+4\sqrt{33})^n \qquad n \geqslant 0$$

从而可以验证下面各式成立：

$$X_{n+1} = 46X_n - X_{n-1} \qquad X_0 = 1,\ X_1 = 155 \tag{5}$$

$$\overline{X_{n+1}} = 46\overline{X_n} - \overline{X_{n-1}} \qquad \overline{X_0} = -1,\ \overline{X_1} = 109 \tag{6}$$

$$u_{n+1} = 46u_n - u_{n-1} \qquad u_0 = 1,\ u_1 = 23 \tag{7}$$

$$v_{n+1} = 46v_n - v_{n-1} \qquad v_0 = 0,\ v_1 = 4 \tag{8}$$

$$u_{2n} = 2u_n{}^2 - 1 \qquad v_{2n} = 2u_n v_n \tag{9}$$

$$X_n = u_n + 33v_n \qquad \overline{X_n} = -u_n + 33v_n \tag{10}$$

$$u_{n+2h} \equiv -u_n \pmod{u_h} \qquad v_{n+2h} \equiv -v_n \pmod{u_h} \tag{11}$$

$$X_{n+2h} \equiv -X_n \pmod{u_h} \qquad \overline{X_{n+2h}} \equiv -\overline{X_n} \pmod{u_h} \tag{12}$$

下面将证明(3)式与(4)式成立当且仅当 $n=0$ 和 $n=1$，由此得到方程(1)的全部正整数解以及全部整数解.

1 方程 $(2x+3)^2 = 4X_n + 5$

此节主要考察的是，当 n 为何值时 $4X_n + 5$ 为完全平方数.

引理 1 设 $2 \mid m$，$m > 0$，则

$$\left(\frac{\pm 132v_{2m} + 5}{u_{2m}}\right) = \pm\left(\frac{5u_m \pm 132v_m}{79}\right)$$

证 因为 $2 \mid m$，所以由(7)，(8)式知

$$u_m \equiv 1 \pmod 2 \qquad v_m \equiv 1 \pmod 4 \qquad u_{2m} \equiv 1 \pmod 8$$

所以：

$$\left(\frac{2}{u_{2m}}\right) = 1 \qquad \left(\frac{-1}{u_m}\right) = 1$$

$$5u_m \pm 132v_m \equiv 2 \pmod 3$$

$$5u_m \pm 132v_m \equiv 5 \pmod{11}$$

当 $m \equiv 0,2 \pmod 8$ 时，$5u_m + 132v_m \equiv 5 \pmod 7$；

当 $m \equiv 4,6 \pmod 8$ 时，$5u_m + 132v_m \equiv 2 \pmod 7$；

当 $m \equiv 0,6 \pmod 8$ 时，$-132v_m + 5u_m \equiv 5 \pmod 7$；

当 $m \equiv 2,4 \pmod 8$ 时，$-132v_m + 5u_m \equiv 2 \pmod 7$.

因此由(9)式可知

$$\left(\frac{\pm 132v_{2m} + 5}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{\pm 264u_m v_m + 10u_m{}^2}{u_{2m}}\right) =$$

$$\left(\frac{2}{u_{2m}}\right)\cdot\left(\frac{u_m}{u_{2m}}\right)\cdot\left(\frac{\pm 132v_m + 5u_m}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{\pm 132v_m + 5u_m}{u_{2m}}\right) =$$

$$\left(\frac{u_m{}^2 + 33v_m{}^2}{\pm 132v_m + 5u_m}\right) = \left(\frac{18\ 249}{5u_m \pm 132v_m}\right) =$$

$$\left(\frac{3}{5u_m \pm 132v_m}\right)\cdot\left(\frac{7}{5u_m \pm 132v_m}\right)\cdot\left(\frac{11}{5u_m \pm 132v_m}\right)\cdot\left(\frac{79}{5u_m \pm 132v_m}\right) =$$

$$\pm\left(\frac{5u_m \pm 132v_m}{79}\right)$$

引理 2　设 $n \equiv 0(\bmod 4 \cdot 3^3 \times 5 \times 7 \times 11)$ 且 $n > 0$，则(3)式不成立.

证　令

$$n = 2 \cdot k \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 2^t \qquad t \geqslant 1,\ 2 \nmid k$$

对 $\{5u_n \pm 132v_n\}$ 取 mod 79，可以得到两个剩余序列周期均为 80. 同时，易知序列 $\{2^t\}$ 取 mod 80，除 $t=1$，2,3 外，当 $t>3$ 时，其剩余序列的周期为 4. 下面对 k 分两种情况进行讨论：

情况 1　$k \equiv 1(\bmod 4)$ 时，令

$$m=\begin{cases} 3 \cdot 2^t & t=2,\ 3 \\ 5 \cdot 3 \cdot 2^t & t=1 \\ 3^3 \cdot 2^t & t \equiv 0(\bmod 4)(t>3) \\ 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 2^t & t \equiv 1(\bmod 4)(t>3) \\ 3^2 \cdot 7 \cdot 2^t & t \equiv 2(\bmod 4)(t>3) \\ 3^2 \cdot 11 \cdot 2^t & t \equiv 3(\bmod 4)(t>3) \end{cases}$$

当 $t=1,2,3$ 时，m 分别为 30,12,24，$m(\bmod 80)=30,12,24$，$132v_m+5u_m(\bmod 79)=45,1,57$. 此时均有 $\pm\left(\frac{5u_m+132v_m}{79}\right)=-1$. 除此之外，对表 1 中所有的 m 均有 $\left(\frac{5u_m+132v_m}{79}\right)=-1$.

情况 2　$k \equiv -1(\bmod 4)$ 时，令

$$m=\begin{cases} 3 \cdot 2^t & t=2,\ t \equiv 0(\bmod 4)(t>3) \\ 5 \cdot 3 \cdot 2^t & t=3 \\ 3^3 \cdot 2^t & t=1,\ t \equiv 2(\bmod 4)(t>3) \\ 3^2 \cdot 11 \cdot 2^t & t \equiv 1(\bmod 4)(t>3) \\ 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 2^t & t \equiv 3(\bmod 4)(t>3) \end{cases}$$

当 $t=1,2,3$ 时，m 分别为 54,12,120，$m(\bmod 80)=54,12,40$，$5u_m-132v_m(\bmod 79)=59,72,74$. 此时均有 $\pm\left(\frac{5u_m-132v_m}{79}\right)=-1$. 除此之外，对表 2 中所有的 m 均有 $\left(\frac{5u_m-132v_m}{79}\right)=-1$.

表 1　$k=1(\bmod 4)$ 的情况

$t>3(\bmod 4)$	0	1	2	3
$m(\bmod 80)$	32	32	32	32
$132v_m+5u_m(\bmod 79)$	7	7	7	7

表 2　$k=-1(\bmod 4)$ 的情况

$t>3(\bmod 4)$	0	1	2	3
$m(\bmod 80)$	48	48	48	48
$5u_m-132v_m(\bmod 79)$	7	7	7	7

引理 3　当 $n \equiv 1(\bmod 4 \cdot 3^3 \times 5 \times 7 \times 11)$，且 $n>1$ 时，(3)式不成立.

证　当 $n \equiv 1(\bmod 4 \cdot 3^3 \times 5 \times 7 \times 11)$ 时，设

$$n = 1 + 2 \cdot k \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 2^t \qquad t \geqslant 1,\ 2 \nmid k$$

对 $\{u_m\}$ 取 mod 41，剩余序列周期为 40. 再对 $\{2^t\}$ 取模 40，除 $t=1,2$ 外，其余剩余序列周期为 4.

当 $t=1$，$t \equiv 1(\bmod 4)(t>2)$ 时，令 $m=2^t$；

当 $t=2$ 时，令 $m=5 \cdot 2^t$；

当 $t \equiv 0(\bmod 4)(t>2)$ 时，令 $m=3^3 \cdot 2^t$；

当 $t\equiv 2 \pmod 4$ $(t>2)$ 时，令 $m=7\cdot 2^t$；

当 $t\equiv 3 \pmod 4$ $(t>2)$ 时，令 $m=11\cdot 2^t$.

由(12)式，有

$$4X_n+5\equiv -4X_1+5\equiv -615 \pmod{u_m}$$

又因 $2\mid m$，则 $u_m\equiv 1\pmod 4$，$\left(\frac{-1}{u_m}\right)=1$. 当 $m\equiv 0,6\pmod 8$ 时，$u_m\equiv 1\pmod 5$；当 $m\equiv 2,4\pmod 8$ 时，$u_m\equiv 2\pmod 5$. 所以

$$\left(\frac{4X_n+5}{u_m}\right)=\left(\frac{-1}{u_m}\right)\cdot\left(\frac{3}{u_m}\right)\cdot\left(\frac{5}{u_m}\right)\cdot\left(\frac{41}{u_m}\right)=\pm\left(\frac{u_m}{41}\right)$$

则当 $t(\geqslant 3)\pmod 4=0,1,2,3$，$t=1,2$ 时，

$$m\pmod{40}=32,32,8,8,2,20$$

对应地有

$$u_m\pmod{41}=17,17,17,17,32,40$$

此时对所有的 m 均有 $\pm\left(\frac{u_m}{41}\right)=-1$，从而$\left(\frac{4X_n+5}{u_m}\right)=-1$，故(3)式不成立.

引理4 若(3)式成立，则 $n\equiv 0,1\pmod{4\cdot 3^3\times 5\times 7\times 11}$.

证 我们采用对序列$\{4X_n+5\}$取模的方法证明. 此过程分为4步进行：

步骤1 先证 $n\equiv 0,1\pmod{20}$. 取 mod 2 161，排除 $n\equiv 2,3\pmod 5$，此时 $4X_n+5\equiv 428$，$1\,555\pmod{2\,161}$，剩余$n\equiv 0,1,4\pmod 5$. 以上的mod 2 161是对序列$\{4X_n+5\}$取的，mod 5是因为其剩余序列周期为5，“此时”这句话是“排除”的理由，因为428,1 555均为mod 2 161的平方非剩余. 为节省篇幅，后面的证明过程都按这种方式叙述. 当 $n\equiv 0,1,4\pmod 5$ 时，即 $n\equiv 0,1,4,5,6,9,10,11,14,15,16,19\pmod{20}$，依次取 mod 19,235 099,8 599,151，可得 $n\equiv 0,1\pmod{20}$.

步骤2 证$n\equiv 0,1\pmod{27}$. 取mod 47，可得$n\equiv 0,1\pmod 3$，即$n\equiv 0,1,3,4,6,7\pmod 9$. 取mod 71，可得$n\equiv 0,1,7\pmod 9$，即$n\equiv 0,1,7,9,10,16,18,19,25\pmod{27}$，依次取mod 971,53,330 103,647,17,7，可得 $n\equiv 0,1\pmod{27}$.

步骤3 证 $n\equiv 0,1\pmod 7$. 依次取 mod 13，7 643，可得 $n\equiv 0,1\pmod 7$.

步骤4 证 $n\equiv 0,1\pmod{11}$. 依次取 mod 373,51 193,463,43,439,34 759,1 231,67 967，可以得到 $n\equiv 0,1\pmod{11}$.

综上所述，$n\equiv 0,1\pmod{4\cdot 3^3\times 5\times 7\times 11}$.

2 方程$(2x+3)^2=4\overline{X_n}+5$

此节我们考察 $4\overline{X_n}+5$ 为完全平方数时 n 的取值情况.

引理5 设 $n\equiv 0\pmod{4\cdot 3^3\times 5\times 7\times 11}$ 且 $n>0$，则(4)式不成立.

证 令

$$n=2\cdot k\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 2^t \qquad t\geqslant 1,\ 2\nmid k$$

运用分类讨论的数学方法，以及引理2证明过程中 m 的选取方式，根据(10)，(12)式以及引理1同样可得

$$\left(\frac{4\overline{X_n}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{\pm 132v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\pm\left(\frac{5u_m\pm 132v_m}{79}\right)=-1$$

从而(4)式不成立.

引理6 当 $n\equiv 1\pmod{4\cdot 3^3\times 5\times 7\times 11}$，且 $n>1$ 时，(4)式不成立.

证 当 $n\equiv 1\pmod{4\cdot 3^3\times 5\times 7\times 11}$ 时，设

$$n=1+2\cdot k\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 2^t \qquad t\geqslant 1,\ 2\nmid k$$

对$\{u_m\}$取 mod 431，剩余序列周期为215，再对$\{2^t\}$取 mod 215，得到剩余序列周期为28. 令

$$m=\begin{cases}2^t & t\equiv 2,3,6,10,11,15,17,18,19,20,22,24,25,26,27 \pmod{28}\\ 5\cdot 2^t & t\equiv 0,1,14 \pmod{28}\\ 3\cdot 2^t & t\equiv 4,5,7,21,23 \pmod{28}\\ 7\cdot 2^t & t\equiv 9 \pmod{28}\\ 11\cdot 2^t & t\equiv 8 \pmod{28}\\ 3^3\cdot 2^t & t\equiv 13 \pmod{28}\\ 5\cdot 3\cdot 2^t & t\equiv 12,16 \pmod{28}\end{cases}$$

由(12)式，有

$$4\overline{X_n}+5\equiv -4\overline{X_1}+5\equiv -431 \pmod{u_m}$$

又因 $2\mid m$，则 $u_m\equiv 1 \pmod 4$，$\left(\dfrac{-1}{u_m}\right)=1$，所以有

$$\left(\frac{4\overline{X_n}+5}{u_m}\right)=\left(\frac{-431}{u_m}\right)=\left(\frac{-1}{u_m}\right)\cdot\left(\frac{431}{u_m}\right)=\left(\frac{u_m}{431}\right)$$

于是对表 3 中所有的 m，均有 $\left(\dfrac{u_m}{431}\right)=-1$ 成立，从而 $\left(\dfrac{4\overline{X_n}+5}{u_m}\right)=-1$，故(4)式不成立.

表 3　$k=1 \pmod 2$ 的情况

$t \geqslant 1 \pmod{28}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$m \pmod{215}$	5	10	4	8	48	96	64	169	21	144	164	113	165	164
$u_m \pmod{431}$	362	39	193	365	28	274	172	124	367	231	206	395	21	206
$t \geqslant 1 \pmod{28}$	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$m \pmod{215}$	5	88	60	137	59	118	21	126	84	74	121	27	54	108
$u_m \pmod{431}$	362	303	56	241	222	299	367	26	7	262	284	117	224	359

引理 7　若(4)式成立，则 $n\equiv 0,1 \pmod{4\cdot 3^3\times 5\times 7\times 11}$.

证　仿引理 4 的证明，将其分为 4 步进行，先证明 $n\equiv 0,1 \pmod{20}$，再证明 $n\equiv 0,1 \pmod{27}$，$n\equiv 0,1 \pmod 7$，最后证明 $n\equiv 0,1 \pmod{11}$.

步骤 1　取 mod 2 161，可以得到 $n\equiv 0,1 \pmod 5$，即有 $n\equiv 0,1,5,6,10,11,15,16 \pmod{20}$. 依次取 mod 19,235 099,8 599,151，可得 $n\equiv 0$，(mod 20).

步骤 2　取 mod 47，可得 $n\equiv 0,1 \pmod 3$，即 $n\equiv 0,1,3,4,6,7 \pmod 9$. 取 mod 71，可得 $n\equiv 0,1,4 \pmod 9$，即有 $n\equiv 0,1,4,9,10,13,18,19,22 \pmod{27}$. 依次取 mod 971,53,330 103,647,611 279,59 833，可以得到 $n\equiv 0,1 \pmod{27}$.

步骤 3　依次取 mod 13,7 643，可得 $n\equiv 0,1 \pmod 7$.

步骤 4　依次取 mod 373,51 193,463，可得 $n\equiv 0,1 \pmod{11}$.

综上所述，$n\equiv 0,1 \pmod{4\cdot 3^3\times 5\times 7\times 11}$.

3　主要结论

定理 1　不定方程

$$(x^2+3x+1)^2-33Y^2=-32 \tag{13}$$

的全部整数解是

$$(x,\pm Y)=(0,1),(-3,1),(11,27),(-14,27),(-1,1),(-2,1),(9,19),(-12,19)$$

证　由引理 2、引理 3 和引理 4 知，如果(4)式成立，则 $n=0,1$，则有 $x=0,-3,11,-14$. 此时给出方程(13)的前 4 组解为

$$(x,\pm Y)=(0,1),(-3,1),(11,27),(-14,27)$$

由引理5、引理6和引理7知，如果(5)式成立，则 $n=0,1$，则有 $x=-1,-2,9,-12$. 此时给出方程(13)的后4组解为

$$(x,\pm Y)=(-1,1),(-2,1),(9,19),(-12,19)$$

定理2　不定方程

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=33y(y+1)(y+2)(y+3) \tag{14}$$

仅有正整数解(9，3).

证　由(2)式及定理1知，$y^2+3y+1=\pm 27,\pm 19$. 其中只有 $y^2+3y+1=19$ 时有正整数解，此时 $y=3$，故方程(14)的正整数解为 $(x,y)=(9,3)$.

参考文献：

[1] COHN J H E. The Diophantine Equation $y(y+1)(y+2)(y+3)=2x(x+1)(x+2)(x+3)$ [J]. Pacific J Math, 1971, 37(2): 331-335.

[2] 郭凤明，罗　明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(10)：13-16.

[3] DUAN H M, ZHENG J M. On Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=14y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. Journal of Southwest Jiaotong University(English Edition), 2009, 17(1): 90-93.

[4] 段辉明，杨春德. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=19y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2009，32(1)：60-63.

[5] 张　洪，罗　明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=Dy(y+1)(y+2)(y+3)$(其中 $D=21,23$) [J]. 重庆工商大学学报(自然科学版)，2015，32(7)：56-61.

[6] 徐学文. 关于不定方程 $y(y+1)(y+2)(y+3)=p^{2k}x(x+1)(x+2)(x+3)$ [J]. 华中师范大学学报(自然科学版)，1997，31(3)：257-259.

A Research of the Integer Solution of the Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=33y(y+1)(y+2)(y+3)$

CHEN Qiong

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, with such elementary methods as Pell equation, recurrence sequence, congruent form and quadratic (non-)residue, the author studies the diophantine equation

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=33y(y+1)(y+2)(y+3)$$

and shows that its only solution in positive integers is $(x,y)=(9,3)$. She also obtains all the integer solutions of the diophantine equation $(x^2+3x+1)^2-33y^2=-32$.

Key words: diophantine equation; integer solution; recurrence sequence; quadratic remainder

责任编辑　廖　坤
崔玉洁