

一类渐近 3-线性修正 Schrödinger 方程的正解^①

雷 霞, 唐春雷, 吴行平

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 运用山路引理和 Lions 引理, 通过变量替换, 得到了一类修正 Schrödinger 方程

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = g(x, u) \quad x \in \mathbb{R}^3$$

正解的存在性. 其中, 当 $u \rightarrow +\infty$ 时, g 是渐近 3-线性的.

关键词: 修正 Schrödinger 方程; 渐近 3-线性; 山路引理; Lions 引理

中图分类号: O176.3

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2018)04-0041-07

考虑如下修正的 Schrödinger 方程:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = g(x, u) & x \in \mathbb{R}^3 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $V \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $g \in C(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, 并且满足以下条件:(V₀) $\inf_{x \in \mathbb{R}^3} V(x) > 0$;(V₁) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} V(x) < \infty$;(g₁) 当 $t \geq 0$ 时, $g(x, t) \geq 0$; 当 $t < 0$ 时, $g(x, t) \equiv 0$;(g₂) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(x, t)}{t} = 0$ 关于 $x \in \mathbb{R}^3$ 一致成立;(g₃) 存在 $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $l > \Lambda$, 使得:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x, t) = h(t) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(x, t)}{t^3} = l$$

关于 $x \in \mathbb{R}^3$ 一致成立, 并且:

$$g(x, t) \geq h(t) \quad g(x, t) \not\equiv h(t)$$

$$\Lambda = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx : u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}, \int_{\mathbb{R}^3} u^2 dx = 1 \right\}$$

(g₄) 对任意的 $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, 有 $\frac{1}{4}g(x, t)t - G(x, t) \geq 0$, 其中 $G(x, t) = \int_0^t g(x, s) ds$.

近年来, 有很多学者对方程(1)近行了广泛的研究, 得到了方程解的存在性和多重性(文献[1-7]). 文献[1]考虑 $g(u) = |u|^{p-1}u$ ($4 < p+1 < 22^*$), 运用约束极小化方法, 获得了方程正基态解的存在性. 文献[2]通过变量替换, 将拟线性问题转化为半线性问题, 运用山路引理, 在 Orlicz 空间中证明对自治情形 $g(u) = \lambda |u|^{p-1}u$ ($4 < p+1 < 22^*$) 下正解的存在性. 文献[3-4]假设在无穷远处 $G(x, t) \sim t^4$, 并假设 V 是强制的, 运用山路引理获得了非平凡解的存在性. 受上述结论的启发, 我们将考虑在无穷远

① 收稿日期: 2017-09-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(11471267).

作者简介: 雷霞(1992-), 女, 四川仁寿人, 硕士研究生, 主要从事非线性泛函分析的研究.

通信作者: 吴行平, 教授.

处 $g(x, t) \sim t^3$, 且 V 是渐近常数的情形. 本文的主要结果是:

定理 1 假设条件 $(V_0) - (V_1)$, $(g_1) - (g_4)$ 都满足, 则方程(1) 至少有 1 个正解.

注 1 容易找到满足定理 1 条件的 V 和 g , 如:

$$V(x) = 2 - \frac{1}{1 + |x|^2}$$

$$g(x, t) = \begin{cases} \frac{(2 + |x|^4)lt^4}{1 + |x|^4 + (2 + |x|^4)t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

方程(1) 对应的能量泛函为:

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} ((1 + 2u^2) |\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx - \int_{\mathbb{R}^3} G(x, u) dx \quad (2)$$

通过方程(1) 的形式发现泛函 I 没有适当的作用空间, 所以不能直接对泛函 I 应用变分方法. 本文采用文献 [2] 的方法对泛函 I 作变量替换克服困难. 令 $v = f^{-1}(u)$, 其中 f 定义为:

$$\begin{cases} f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2f^2(t)}} & t \geq 0 \\ f(t) = -f(-t) & t \leq 0 \end{cases}$$

引理 1^[6] 泛函 f 和 f' 有如下性质:

(f₁) f 是唯一的, 可逆的, 并且 $f \in C^\infty$;

(f₂) 对任意的 $t \in \mathbb{R}$, $|f'(t)| \leq 1$;

(f₃) 对任意的 $t \in \mathbb{R}$, $|f(t)| \leq |t|$;

(f₄) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 1$;

(f₅) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} = 2^{\frac{1}{4}}$;

(f₆) 对任意的 $t \in \mathbb{R}$, $\frac{f^2(t)}{2} \leq tf'(t)f(t) \leq f^2(t)$;

(f₇) 对任意的 $t \in \mathbb{R}$, $|f(t)| \leq 2^{\frac{1}{4}} \sqrt{|t|}$;

(f₈) 存在 $r > 0$, 使得

$$|f(t)| \geq \begin{cases} r|t| & |t| \leq 1 \\ r|t|^{\frac{1}{2}} & |t| \geq 1 \end{cases}$$

(f₉) 对任意的 $t \in \mathbb{R}$, $|f(t)f'(t)| < 2^{-\frac{1}{2}}$.

因此, 泛函 I 经过变量替换获得如下形式:

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla v|^2 + V(x)f^2(v)) dx - \int_{\mathbb{R}^3} G(x, f(v)) dx$$

J 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中是 C^1 的, 且

$$\|v\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2) dx$$

对任意的 $w \in H^1(\mathbb{R}^3)$, 有

$$\langle J'(v), w \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v \nabla w dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)f(v)f'(v)w dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(x, f(v))f'(v)w dx$$

泛函 J 的临界点对应方程

$$-\Delta v = f'(v)(g(x, f(v)) - V(x)f(v))$$

的弱解. 如果 v 是泛函 J 的临界点, 那么 $u = f(v)$ 是泛函 I 的临界点, 则 $u = f(v)$ 是方程(1) 的解. 因此, 我们只需找到泛函 J 的临界点.

引理 2 存在 $\rho > 0, \alpha_0 > 0$, 使得

$$\inf_{\|v\|=\rho} J(v) \geq \alpha_0$$

证 由条件 $(g_2), (g_3)$ 可知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $C > 0, 4 \leq p \leq 6$, 使得

$$g(x, t) \leq \varepsilon t + Ct^{p-1} \quad \forall t > 0 \quad (3)$$

因此

$$G(x, t) \leq \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \frac{C}{p}t^p \quad \forall t > 0 \quad (4)$$

再由性质 (f_3) 和 Sobolev 嵌入不等式可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} G(x, f(v)) dx &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |f(v)|^2 dx + \frac{C}{p} \int_{\mathbb{R}^3} |f(v)|^p dx \leq \\ &\frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 dx + \frac{C}{p} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^p dx \leq \\ &\frac{\varepsilon}{2} \tau_2 \|v\|^2 + \frac{C}{p} \tau_p \|v\|^p \end{aligned} \quad (5)$$

其中 τ_2, τ_p 为嵌入常数. 根据性质 (f_8) 可知, 存在 $r > 0$, 使得

$$f^2(t) \geq r(t^2 - t^p)$$

令

$$V(\infty) = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} V(x)$$

由(5)式可获得

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla v|^2 + V(x)f^2(v)) dx - \int_{\mathbb{R}^3} G(x, f(v)) dx \geq \\ &\frac{1}{2} r_1 \|v\|^2 - \frac{rV(\infty)}{2} \tau_p \|v\|^p - \frac{\varepsilon}{2} \tau_2 \|v\|^2 - C \tau_p \|v\|^p = \\ &\left(\frac{1}{2} r_1 - \frac{\varepsilon}{2} \tau_2 \right) \|v\|^2 - \left(\frac{rV(\infty)}{2} \tau_p + C \tau_p \right) \|v\|^p \end{aligned}$$

其中 $r_1 = \min\{1, r\}$, 选取 $\varepsilon \leq \frac{r_1}{\tau_2}$, 当 $\|v\| = \rho$ 足够小时, 有 $J(v) \geq \alpha_0 > 0$.

引理 3 存在 $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, 满足 $\|v_0\| > \rho$ 和 $J(v_0) < 0$.

证 根据条件 (g_3) , 可以找到 $\phi^* \in H^1(\mathbb{R}^3)$, 满足 $\|\phi^*\|_2 = 1, \|\phi^*\|^2 < l$. 因此由性质 $(f_3), (f_5)$ 和条件 (g_3) 以及 Fatou 引理可得

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{J(t\phi^*)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla(t\phi^*)|^2 + V(x)f^2(t\phi^*)) dx - \int_{\mathbb{R}^3} G(x, f(t\phi^*)) dx}{t^2} \leq \\ &\frac{1}{2} \|\phi^*\|^2 - \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{G(x, f(t\phi^*))}{t^2} dx \leq \\ &\frac{1}{2} \|\phi^*\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} (\phi^*)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{G(x, f(t\phi^*))}{t^2} dx = \\ &\frac{1}{2} \|\phi^*\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} (\phi^*)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{G(x, f(t\phi^*))}{f^4(t\phi^*)} \left(\frac{f(t\phi^*)}{\sqrt{t\phi^*}} \right)^4 (\phi^*)^2 dx = \\ &\frac{1}{2} \|\phi^*\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} (\phi^*)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{l}{2} (\phi^*)^2 dx = \\ &\frac{1}{2} (\|\phi^*\|^2 - l) \int_{\mathbb{R}^3} (\phi^*)^2 dx < 0 \end{aligned}$$

令 $v_0 = t\phi^*$, 当 t 足够大时, 有 $J(v_0) < 0$.

引理 4 泛函 J 的每一个 $(C_\varepsilon)_\varepsilon (\varepsilon > 0)$ 序列 $\{v_n\}$ 是有界的.

证 设 $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ 是 J 的 $(C_\epsilon)_c$ ($c > 0$) 序列, 即满足:

$$J(v_n) \rightarrow c > 0 \quad (1 + \|v_n\|) \|J'(v_n)\| \rightarrow 0 \quad (6)$$

为了证明 $\{v_n\}$ 有界, 我们首先证明序列 $\{v_n\}$ 满足不等式

$$\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla v_n|^2 + V(x)f^2(v_n))dx \leq M \quad (7)$$

令

$$\varphi_n = \frac{f(v_n)}{f'(v_n)}$$

由(6)式我们有

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle J'(v_n), \varphi_n \rangle = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 + \frac{2f^2(v_n)}{1 + 2f^2(v_n)} |\nabla v_n|^2\right) dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)f^2(v_n)dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(x, f(v_n))f(v_n)dx \end{aligned} \quad (8)$$

以及

$$o(1) + c = J(v_n) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla v_n|^2 + V(x)f^2(v_n))dx - \int_{\mathbb{R}^3} G(x, f(v_n))dx \quad (9)$$

结合(8)和(9)式, 并根据条件(g₄)可得

$$\begin{aligned} c + o(1) &\geq J(v_n) - \frac{1}{4} \langle J'(v_n), \varphi_n \rangle = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2f^2(v_n)}{1 + 2f^2(v_n)}\right)\right) |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} V(x)f^2(v_n)dx - \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(G(x, f(v_n)) - \frac{1}{4} g(x, f(v_n))f(v_n)\right) dx \geq \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{f^2(v_n)}{1 + 2f^2(v_n)}\right)\right) |\nabla v_n|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} V(x)f^2(v_n)dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\nabla v_n|^2}{1 + 2f^2(v_n)} dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} V(x)f^2(v_n)dx = \\ &= \frac{1}{4} \|f(v_n)\|^2 \end{aligned}$$

因此 $\{f(v_n)\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中是有界的. 再根据(4)式和 Sobolev 嵌入不等式, 存在 $c_1 > 0$, 满足

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} G(x, f(v_n))dx &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |f(v)|^2 dx + \frac{C}{p} \int_{\mathbb{R}^3} |f(v)|^p dx \leq \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \|f(v_n)\|^2 + C_0 \|f(v_n)\|^p \leq c_1 \end{aligned} \quad (10)$$

因此由(9)和(10)式可得 $\{v_n\}$ 满足不等式(7). 其次证明 $\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^2 dx$ 是有界的. 事实上,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^2 dx = \int_{\{x: |v_n(x)| \leq 1\}} v_n^2 dx + \int_{\{x: |v_n(x)| > 1\}} v_n^2 dx$$

一方面, 根据 Sobolev 嵌入不等式得

$$\int_{\{x: |v_n(x)| > 1\}} v_n^2 dx \leq \int_{\{x: |v_n(x)| > 1\}} v_n^{2^*} dx \leq c_2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_n|^2 dx \right)^{\frac{2^*}{2}} dx \leq c_3$$

另一方面, 由性质(f₈)可知, 对任意 $|t| \leq 1$, 存在 $k > 0$, 使得

$$f^2(t) \geq k^2 t^2$$

所以

$$\int_{\{x: |v_n(x)| \leq 1\}} v_n^2 dx \leq \frac{1}{k^2} \int_{\{x: |v_n(x)| \leq 1\}} f^2(v_n) dx \leq \frac{1}{k^2} \int_{\mathbb{R}^3} f^2(v_n) dx \leq c_4$$

从而 $\{v_n\}$ 有界.

定理1的证明 由引理2和引理3可知, J 具有山路结构. 所以存在序列 $\{v_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有:

$$J(v_n) \rightarrow c > 0 \quad (1 + \|v_n\|) \|J'(v_n)\| \rightarrow 0$$

其中:

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H^1(\mathbb{R}^3)): \gamma(0) = 0, J(\gamma(1)) < 0\}$$

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} J(\gamma(t))$$

再由引理4知, $\{v_n\}$ 是有界的 $(C_c)_c$ 序列. 因此存在子列(不妨记为 $\{v_n\}$) 和 $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$, 使得在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中 $v_n \rightharpoonup v$. 根据定理1的假设条件易知泛函 J' 是弱连续的, 因此 $J'(v) = 0$. 若 $v \neq 0$, 则证明完成. 若 $v = 0$, 令

$$\tilde{J}(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla v|^2 + V(\infty)f^2(v)) dx - \int_{\mathbb{R}^3} H(f(v_n)) dx$$

其中

$$H(t) = \int_0^t h(s) ds$$

由于当 $|x| \rightarrow \infty$ 时, 有 $V(x) \rightarrow V(\infty)$, $g(x, t) \rightarrow h(t)$, 且在 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ 中, 有 $f(v_n) \rightarrow 0$, 因此当 $n \rightarrow \infty$ 时, 可得

$$\tilde{J}(v_n) - J(v_n) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (V(\infty) - V(x)) f^2(v_n) dx + \int_{\mathbb{R}^3} (H(f(v_n)) - G(x, f(v_n))) dx \rightarrow 0$$

以及

$$\begin{aligned} \sup_{\|u\| \leq 1} |\langle \tilde{J}'(v_n) - J'(v_n), u \rangle| &\leq \sup_{\|u\| \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (V(\infty) - V(x)) f'(v_n) f(v_n) u dx \right| + \\ &\quad \sup_{\|u\| \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (h(f(v_n)) - g(x, f(v_n))) f'(v_n) u dx \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

因此 $\{v_n\}$ 也是泛函 $\tilde{J}$ 的 $(C_c)_c$ 序列. 根据 $\{v_n\}$ 有界, 可得

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{B_1(y)} v_n^2 dx \geq 0$$

若 $\delta = 0$, 应用 Lions 引理^[7]得: 在 $L^q(\mathbb{R}^3)$ ($2 < q < 2^*$) 中 $v_n \rightarrow 0$. 由性质(f₃)和(3)式, 可得

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} g(x, f(v_n)) f'(v_n) v_n dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} g(x, f(v_n)) f(v_n) dx \leq \\ &\quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\epsilon \int_{\mathbb{R}^3} v_n^2 dx + C \int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^p dx \right) \leq \\ &\quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\epsilon C_1 + C \int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^p dx \right) = \\ &\quad \epsilon C_1 \end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性, 我们获得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} g(x, f(v_n)) f'(v_n) v_n dx = 0$$

再根据

$$\langle J'(v_n), v_n \rangle = o(1)$$

以及性质(f₆)得

$$o(1) = \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla v_n|^2 + V(x) f'(v_n) f(v_n) v_n) dx \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n)) dx$$

因此

$$c + o(1) = J(v_n) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n)) dx - \int_{\mathbb{R}^3} G(x, f(v_n)) dx \leq 0$$

这与 $c > 0$ 矛盾, 从而 $\delta > 0$. 所以存在 $N_1 > 0$, 使得当 $n > N_1$ 时, 有

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{B_1(y)} v_n^2 dx \geq \frac{\delta}{2} > 0 \quad (11)$$

并由(11)式知, 存在序列 $\{y_n\} \subset \mathbb{Z}^N$, 使得

$$\int_{B_1(y_n)} |v_n|^2 dx > \frac{\delta}{4} > 0 \quad (12)$$

令

$$\tilde{v}_n = v_n(x + y_n)$$

由 $\tilde{J}$ 自治可知 $\{\tilde{v}_n\}$ 也是 $\tilde{J}$ 的 $(C_\epsilon)_c$ 序列, 并由 $\{v_n\}$ 有界易得 $\{\tilde{v}_n\}$ 也是有界的, 则存在 $\tilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^3)$, 使得 $\tilde{v}_n \rightharpoonup \tilde{v}$, $\tilde{J}'(\tilde{v}) = 0$. 再由(12)式, 我们有

$$\int_{B_1(0)} |\tilde{v}_n|^2 dx > \frac{\delta}{4} > 0$$

又因为在有界区域里 $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}$, 所以

$$\int_{B_1(0)} |\tilde{v}|^2 dx \geq \frac{\delta}{4} > 0$$

因此 $\tilde{v} \neq 0$, 即 $\tilde{v}$ 是 $\tilde{J}$ 的非平凡临界点. 由性质 (f_6) 和 Fatou 引理可得

$$\begin{aligned} c &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\tilde{J}(\tilde{v}_n) - \frac{1}{2} \langle \tilde{J}'(\tilde{v}_n), \tilde{v}_n \rangle \right) \geq \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} V(\infty) [f^2(\tilde{v}) - f'(\tilde{v})f(\tilde{v})\tilde{v}] dx + \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{1}{2} h(f(\tilde{v}))f'(\tilde{v})\tilde{v} - H(f(\tilde{v})) \right] dx = \\ &= \tilde{J}(\tilde{v}) - \frac{1}{2} \langle \tilde{J}'(\tilde{v}), \tilde{v} \rangle = \\ &= \tilde{J}(\tilde{v}) \end{aligned}$$

所以 $\tilde{v}$ 满足 $\tilde{J}(\tilde{v}) \leq c$. 由文献[8]可知 $\tilde{v}$ 满足 Pohozaev-type 恒等式

$$\frac{1}{6} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \tilde{v}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} H(f(\tilde{v})) dx - \frac{1}{2} V(\infty) \int_{\mathbb{R}^3} f^2(\tilde{v}) dx \quad (13)$$

利用文献[9]的办法, 对任意的 $t > 0$, 令 $w_t(x) = \tilde{v}\left(\frac{x}{t}\right)$. 根据(3)式, 得

$$\begin{aligned} \tilde{J}(w_t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla w_t|^2 + V(\infty)f^2(w_t)) dx - \int_{\mathbb{R}^3} H(f(w_t)) dx = \\ &= \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{6}t^3 \right) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \tilde{v}|^2 dx \end{aligned}$$

因此, 存在 $t_0 > 0$, 当 $t \geq t_0$ 时, 有 $\tilde{J}(w_t) < 0$, 并且

$$\sup_{t \geq 0} \tilde{J}(w_t) = \tilde{J}(w_1) = \tilde{J}(\tilde{v})$$

对任意的 $0 < t \leq 1$, 令

$$\gamma(t)(x) = \tilde{v}\left(\frac{x}{tt_0}\right)$$

当 $t=0$ 时, 令 $\gamma(t)(x) \equiv 0$. 那么 $\gamma(t) \in C([0, 1], H^1(\mathbb{R}^3))$, $\tilde{J}(\gamma(1)) < 0$. 根据条件 (V_1) , (g_3) 以及 J 的连续性可知, 存在 $\hat{t} \in (0, 1]$, 使得

$$c \leq \max_{t \in [0, 1]} J(\gamma(t)) = J(\gamma(\hat{t})) < \tilde{J}(\gamma(\hat{t})) \leq \sup_{t \geq 0} \tilde{J}(w_t) = \tilde{J}(\tilde{v}) \leq c$$

矛盾. 因此 $v \neq 0$, 由 (g_1) 易得 $v \geq 0$. 我们断言 $v > 0$. 事实上, 若 $v \geq 0$, 则存在 $r' > 0$, $y \in \mathbb{R}^3$, $B_{r'}(y) \subset \mathbb{R}^3$, 满足

$$\sup_{x \in B_{r'}(y)} |v(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |v(x)| = 0$$

由假设条件知

$$g(x, f(v))f'(v) \geq 0$$

因此

$$-\Delta v + V(x)f(v)f'(v) \geq 0$$

再由性质 $(f_2), (f_3)$ 以及条件 (V_1) , 可得

$$-\Delta v + V(\infty)v \geq 0$$

根据强极大值原理得 $v > 0$.

参考文献:

[1] POPPENBERG M, SCHMIT K, WANG Z Q. On the Existence of Soliton Solutions to Quasilinear Schrödinger Equations [J]. Calc Var Partial Differential Equatuins, 2002, 14(3): 329–344.

[2] LIU J Q, WANG Y Q, WANG Z Q. Soliton Solutions for Quasilinear Schrödinger Equations II [J]. J Differential Equations, 2003, 187(2): 473–493.

[3] FURTADO M F, SILVA E D, SILVA M L. Quasilinear Elliptic Problems Under Asymptotically Linear Conditions at Infinity and at The Origin [J]. Z Angew Math Phys, 2015, 66(2): 277–291.

[4] FURTADO M F, SILVA E D, SILVA M L. Quasilinear Schrödinger Equation with Asymptotically Linear Nonlinearities [J]. Adv Nonlinear Stud, 2014, 14(3): 671–686.

[5] 刘西洋, 商彦英, 唐春雷. 一类拟线性 Schrödinger 方程非平凡解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(2): 77–81.

[6] SILVA E A B, VIEIRA G F. Quasilinear Asymptotically Periodic Schrödinger Equations with Critical Growth [J]. Calc Var Partial Differential Equatuins, 2010, 39(1–2): 1–33.

[7] LIONS P L. The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations: The Locally Compact Case [J]. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 1984, 1(2): 109–145.

[8] BERESTYCKI H, LIONS P L. Nonlinear Scalar Field Equations, I, Existence of A Ground State [J]. Arch Ration Mech Anal, 1983, 82(4): 313–345.

[9] JENAJENA L, TANAKA K A. Positive Solutions for an Asymptotically Linear Elliptic Problem on $\mathbb{R}^N$ Autonomous at Infinity [J]. Esaim Control Optim Calc Var, 2002, 17(7): 597–614.

Positive Solutions for a Class of Modified Schrödinger Equations with an Asymptotically 3-Linear Term

LEI Xia, TANG Chun-lei, WU Xing-ping

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Using the method of variable substitution, and based on the mountain pass lemma and Lions lemma, the existence of a positive solution is established for a modified Schrödinger equation

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = g(x, u) \quad x \in \mathbb{R}^3$$

and the nonlinear term g is asymptotically 3-linear as $u \rightarrow +\infty$.

Key words: modified Schrödinger equation; asymptotically 3-linear; mountain pass lemma; Lions lemma

责任编辑 廖 坤
崔玉洁

