第 40 卷第 4 期　西 南 大 学 学 报（自然科学版）　2018 年 4 月
Vol. 40　No. 4　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　Apr.　2018

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.04.008

一类非局部问题解的存在性与多重性[①]

唐之韵，　欧增奇

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 考虑一类非局部问题

$$\begin{cases}-\left(a-b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)\Delta u=\lambda g(x) & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

其中 $a>0$，$b>0$，$\Omega\subset\mathbb{R}^{N}$ 是有界开集，$\lambda>0$ 且 $g\in H^{-1}(\Omega)\backslash\{0\}$，这里 $H^{-1}(\Omega)$ 是 Sobolev 空间 $H_{0}^{1}(\Omega)$ 的对偶空间. 应用 Ekeland 变分原理和山路引理证明了：存在 $\lambda_{*}>0$，使得：

(i) 当 $\lambda\in(0,\lambda_{*})$ 时，该非局部问题至少有 3 个不同的解；

(ii) 当 $\lambda=\lambda_{*}$ 时，该非局部问题至少有 2 个不同的解；

(iii) 当 $\lambda>\lambda_{*}$ 时，该非局部问题至少有 1 个解.

关　键　词： 非局部问题；Ekeland 变分原理；山路引理；$(\mathrm{PS})_{c}$ 条件

中图分类号：O176.3　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673-9868(2018)04-0048-05

考虑如下的非局部问题：

$$\begin{cases}-\left(a-b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)\Delta u=g(x)|u|^{p-2}u & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{1}$$

其中 $a>0$，$b>0$，$\Omega\subset\mathbb{R}^{N}$ 是有界开集，$0<p<2^{*}$，$g\in L^{\frac{2^{*}}{2^{*}-p}}(\Omega)$. 当 $N\geqslant 1$ 时，$2^{*}=\dfrac{2N}{N-2}$；当 $N=1,2$ 时，$2^{*}=+\infty$.

近几年来，一些学者对问题(1)进行了的研究. 当 $g(x)=1$，$2<p<2^{*}$ 时，文献[1]得到了问题(1)的正解和负解. 文献[2]考虑了 $g(x)=g_{\lambda}(x)$，其中 $g_{\lambda}\in L^{\infty}(\Omega)$，$g_{\lambda}=\lambda g_{+}+g_{-}$，$\lambda>0$，$g_{\pm}=\pm\max\{\pm g,0\}\neq 0$，$1<p<2$ 的情形，当 $\lambda>0$ 很小时，得到了 2 个正解. 文献[3]考虑了 $g(x)=\lambda$，其中 $\lambda>0$，$0<p<1$ 的情形，当 $\lambda>0$ 很小时，得到了 2 个正解. 文献[4]则考虑了 $1\leqslant p<2^{*}$ 的情形，得到了正解的存在性与多重性. 当 $b<0$ 时的有关研究参见文献[5-8]及其参考文献. 受上述结论的启发，我们将考虑

$$\begin{cases}-\left(a-b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)\Delta u=\lambda g(x) & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{2}$$

---

① 收稿日期：2018-02-12

基金项目：国家自然科学基金项目(11471267).

作者简介：唐之韵(1993-)，女，重庆北碚人，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.

通信作者：欧增奇，副教授.

其中 $a>0$，$b>0$，$\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是有界开集，$\lambda>0$ 且 $g\in H^{-1}(\Omega)\backslash\{0\}$，这里 $H^{-1}(\Omega)$ 是Sobolev空间 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间. 本文的主要结果是：

定理1　假设 $a>0$，$b>0$ 且条件 $g\in H^{-1}(\Omega)\backslash\{0\}$ 成立. 则存在 $\lambda_*>0$，使得：

(i) 当 $\lambda\in(0,\lambda_*)$ 时，问题(2) 至少有3个不同的解；

(ii) 当 $\lambda=\lambda_*$ 时，问题(2) 至少有2个不同的解；

(iii) 当 $\lambda>\lambda_*$ 时，问题(2) 至少有1个解.

注1　与文献[1-4] 的结果比较，我们的参数 λ 不必很小，而且我们可以得到3个不同的解.

记 $H_0^1(\Omega)$ 是按 $C_0^1(\Omega)$ 范数

$$\|u\|=\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

的完备化，它是具有内积

$$(u,v)=\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x$$

的Hilbert空间. 众所周知，问题(2) 的解对应如下泛函 I 的临界点：

$$I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4-\lambda\int_\Omega g(x)u\mathrm{d}x$$

易知，对任意 $u,v\in H_0^1(\Omega)$，有

$$\langle I'(u),v\rangle=(a-b\|u\|^2)(u,v)-\lambda\int_\Omega g(x)v\mathrm{d}x$$

为了证明定理1，我们需要如下引理：

引理1　假设 $a>0$，$b>0$ 且条件 $g\in H^{-1}(\Omega)$ 成立. 若 $c\neq\frac{a^2}{4b}$，则泛函 I 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件.

证　假定$\{u_n\}$ 是 I 的$(\mathrm{PS})_c$ 序列，即当 $n\to\infty$ 时，

$$I(u_n)\to c\qquad I'(u_n)\to 0$$

假定$\{u_n\}$ 无界. 则存在$\{u_n\}$ 的子列，仍记为$\{u_n\}$，使得

$$\|u_n\|\to+\infty$$

由 $I(u_n)\to c$，得

$$0=\lim_{n\to\infty}\|u_n\|^{-4}I(u_n)=-\frac{b}{4}$$

矛盾，由此可知$\{u_n\}$ 有界. 因此存在 $u_0\in H_0^1(\Omega)$，使得当 $n\to\infty$ 时，有

$$u_n\rightharpoonup u_0\tag{3}$$

由$\{u_n\}$ 的有界性，存在$\{u_n\}$ 的子列，仍记为$\{u_n\}$，使得 $\|u_n\|^2$ 收敛，不妨设

$$k=\lim_{n\to\infty}\|u_n\|^2\tag{4}$$

根据 $I'(u_n)\to 0$ 及$\{u_n\}$ 的有界性，

$$\langle I'(u_n),u_n\rangle\to 0$$

从而

$$(a-bk)k-\lambda\int_\Omega g(x)u_0\mathrm{d}x=0\tag{5}$$

再由$\langle I'(u_n),u_0\rangle\to 0$ 知

$$(a-bk)\|u_0\|^2-\lambda\int_\Omega g(x)u_0\mathrm{d}x=0\tag{6}$$

由(5) 和(6) 式可知

$$(a-bk)(k-\|u_0\|^2)=0 \tag{7}$$

若 $k\neq\|u_0\|^2$，则 $k=\frac{a}{b}$，从而依据(5)式，得

$$\int_\Omega g(x)u_0\mathrm{d}x=0$$

进一步根据 $I(u_n)\to c$，我们有

$$c=\frac{a}{2}k-\frac{b}{4}k^2-\int_\Omega g(x)u_0\mathrm{d}x=\frac{a^2}{4b}$$

与假设条件 $c\neq\frac{a^2}{4b}$ 矛盾，因此

$$k=\|u_0\|^2$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\|^2=\|u_0\|^2$$

这样 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中强收敛于 u_0.

定理 1 的证明　令：

$$r=\left(\frac{2a}{3b}\right)^{\frac{1}{2}}\qquad\lambda_*=\frac{ar}{3\|g\|}$$

因 $g\neq 0$，故存在 $u_0\in H_0^1(\Omega)$，使得 $\langle g,u_0\rangle\neq 0$，从而不妨设 $\langle g,u_0\rangle>0$ 且 $\|u_0\|^2=\frac{2a}{b}$.

令

$$M=\sup_{u\in H_0^1(\Omega)}I(u)$$

则 $M<+\infty$，于是

$$-M=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)}-I(u)$$

对 $-I(u)$ 在全空间 $H_0^1(\Omega)$ 上用 Ekeland 变分原理，存在 $-I(u)$ 的 $(\mathrm{PS})_{-M}$ 序列，从而存在 $I(u)$ 的 $(\mathrm{PS})_M$ 序列. 易知

$$\begin{aligned}M\geqslant I\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}u_0\right)=\\&\frac{a}{2}\left\|\frac{\sqrt{2}}{2}u_0\right\|^2-\frac{b}{4}\left\|\frac{\sqrt{2}}{2}u_0\right\|^4+\lambda\left\langle g,\frac{\sqrt{2}}{2}u_0\right\rangle=\\&\frac{a^2}{4b}+\lambda\frac{\sqrt{2}}{2}\langle g,u_0\rangle>\\&\frac{a^2}{4b}\end{aligned}$$

根据引理 1，M 是泛函 I 的临界值.

令

$$m=\inf_{\|u\|<r}I(u)$$

则 $m>-\infty$. 事实上，当 $0<\lambda\leqslant\lambda_*$，$\|u\|<r$ 时，有

$$I(u)\geqslant\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4-\lambda\|g\|\|u\|>$$

$$-\frac{b}{4}r^4-\lambda\|g\|r>-\infty$$

而当 $0<\lambda\leqslant\lambda_*$，$\|u\|=r$ 时，有

$$I(u)\geqslant\frac{a}{2}\|u\|^2-\frac{b}{4}\|u\|^4-\lambda\|g\|\|u\|=$$

$$\frac{a}{2}r^2-\frac{b}{4}r^4-\lambda\|g\|r\geqslant$$

$$\frac{a}{2}r^2-\frac{b}{4}r^4-\frac{a}{3}r^2=0$$

易知

$$\lim_{t\to 0^+}t^{-1}I(tu_0)=-\lambda\langle g,u_0\rangle<0$$

因此

$$m<0$$

而

$$\inf_{\|u\|=r}I(u)\geqslant 0$$

在 $H_0^1(\Omega)$ 的闭球 $\overline{B}_r(0)$ 中用Ekeland变分原理，存在 $(\mathrm{PS})_m$ 序列，由于 $m<0$，根据引理1，m 是泛函 I 的临界值.

易知

$$I(u_0)=-\lambda\langle g,u_0\rangle<0$$

因此泛函 I 有山路结构. 令：

$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}I(\gamma(t))$$

$$\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],H_0^1(\Omega)):\gamma(0)=0,\gamma(1)=u_0\}$$

则

$$c\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}I(tu_0)=I(t_0u_0)\leqslant$$

$$\max_{t>0}\left\{\frac{at^2}{2}\|u_0\|^2-\frac{bt^4}{4}\|u_0\|^4\right\}-\lambda t_0\langle g,u_0\rangle=$$

$$\frac{a^2}{4b}-\lambda t_0\langle g,u_0\rangle<\frac{a^2}{4b}$$

由引理1，泛函 I 满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件. 根据山路引理[9]，c 是泛函 I 的临界值.

注意到 $m<0\leqslant c<\frac{a^2}{4b}<M$，则当 $\lambda\in(0,\lambda_*)$ 时，泛函 I 至少有3个不同的临界值 m,c,M；当 $\lambda=\lambda_*$ 时，泛函 I 至少有2个不同的临界值 m,M；当 $\lambda>\lambda_*$ 时，泛函 I 至少有1个临界值 M.

参考文献：

[1] YIN G S, LIU J S. Existence and Multiplicity of Nontrivial Solutions for a Nonlocal Problem [J]. Bound Value Probl, 2015(1): 1-7.

[2] LEI C Y, LIAO J F, SUO H M. Multiple Positive Solutions for Nonlocal Problems Involving a Sign-Changing Potential [J]. Electron J Differential Equations, 2017(9): 1-8.

[3] LEI C Y, CHU C M, SUO H M. Positive Solutions for a Nonlocal Problem with Singularity [J]. Electron J Differential Equations, 2017, 85: 1-9.

[4] DUAN Y, SUN X, LI H Y. Existence and Multiplicity of Positive Solutions for a Nonlocal Problem [J]. J Nonlinear Sci Appl, 2017(10): 6056-6061.

[5] MA T F. Remarks on an Elliptic Equation of Kirchhoff Type [J]. Nonlinear Anal, 2005, 63(5): 1967-1977.

[6] SUN J J，TANG C L. Resonance Problems for Kirchhoff Type Equations [J]. Discrete Contin Dyn Syst，2017，33(5)：2139－2154.

[7] 赵荣胜，唐春雷. 一类 Kirchhoff 型方程解的多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(2)：60－63.

[8] 刘选状，吴行平，唐春雷. 一类带有临界指数增长项的 Kirchhoff 型方程正的基态解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(6)：54－59.

[9] AMBROSETTI A，RABINOWITZ P H. Dual Variational Methods in Critical Points Theory and Applications [J]. J Funct Anal，1973(14)：349－381.

[10] WILLEM M. Minimax Theorems [M]. Boston：Birkhäuser，1996.

Existence and Multiplicity of Solutions for a Class of Nonlocal Problems

TANG Zhi-yun，　OU Zeng-qi

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：Consider a class of nonlocal problems

$$\begin{cases} -\left(a-b\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=\lambda g(x) & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

where $a>0$，$b>0$，$\Omega\subset\mathbb{R}^N$ is a bounded open set，$\lambda>0$ and $g\in H^{-1}(\Omega)\setminus\{0\}$. The Ekeland's variational principle and the mountain pass lemma are applied to proved that there exists $\lambda_*>0$ such that

(ⅰ) The problem has at least three solutions if $\lambda\in(0,\lambda_*)$;

(ⅱ) The problem has at least two solutions if $\lambda=\lambda_*$;

(ⅲ) The problem has at least one solution if $\lambda>\lambda_*$.

Key words：nonlocal problems；Ekeland's variational principle；Mountain pass lemma；the $(PS)_c$ condition

责任编辑　廖　坤