第 40 卷第 4 期　　西南大学学报（自然科学版）　　2018 年 4 月
Vol. 40　No. 4　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Apr.　2018

DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.04.009

一类非局部近共振问题多重解的存在性①

王　跃，　梁金平，　索洪敏

贵州民族大学 数据科学与信息工程学院，贵阳 550025

摘要：通过变分方法在光滑有界域 Ω 上研究由常数 $a,b>0$，参数 $\lambda>0$ 及连续函数 $f(x,u)$ 共同决定的非局部问题：

$$\begin{cases} -\left(a-b\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u+b\lambda u^3=f(x,u) & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

利用 Ekeland 变分原理和山路引理得到该问题近共振情形多重解的存在性.

关　键　词：非局部问题；近共振；变分方法；Ekeland 变分原理；多重解

中图分类号：O177.91　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673－9868(2018)04－0053－06

本文考虑如下非局部问题弱解的存在性和多重性：

$$\begin{cases} -\left(a-b\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u+b\lambda u^3=f(x,u) & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N(N=1,2,3)$ 是光滑有界域，常数 $a,b>0$，参数 $\lambda>0$，$f(x,u)$ 是连续函数. 当 $b\leqslant 0$ 时关于问题(1) 的成果相当广泛，如文献[1] 及其参考文献. 自文献[2] 利用度理论和不动点定理获得两点边值问题

$$\begin{cases} -u''-\lambda u=f(x,u)+h \\ u(0)=u(\pi)=0 \end{cases}$$

当 $\lambda\to\lambda_1^-$（这里 λ_1 是问题 $-u''=\lambda u$ 的第一特征值）时至少 3 个解的存在性后，关于近共振的结果被推广到各种方程和系统中，如文献[3－4] 及其引用文献. 另外，对问题(1)，当满足

$$\lambda=0 \qquad f(x,u)=|u|^{p-2}u$$

$$\begin{cases} 2<p<2^*=\dfrac{2N}{N-2} & N\geqslant 3 \\ 2^*=\infty & N=1,2 \end{cases}$$

时，文献[5] 通过变分方法获得至少存在 1 个非平凡非正解和 1 个非平凡非负解，基于文献[5]，文献[6] 给 $f_\mu(x)$ 以适当假设，得出 $f(x,u)=f_\mu(x)|u|^{p-2}u(1<p<2,N=3)$ 时至少存在 2 个正解；文献[7] 用山路引理得出 $f(x,u)=\mu u^p(1<p<2,N\geqslant 3)$ 时 2 个解的存在性；文献[8] 通过扰动等方法获得

① 收稿日期：2017－08－09
基金项目：国家自然科学基金项目(11661021)；贵州省教育厅科研基金项目(KY[2013]405，KY[2016]163，KY[2016]029)；贵州民族大学科研基金项目.
作者简介：王　跃(1988－)，男，贵州毕节人，硕士研究生，主要从事非线性分析的研究.
通信作者：索洪敏，教授.

$f(x, u)=\mu u^{-\gamma}(0<\gamma<1, N=3)$ 时至少存在 2 个正解.

受文献[5-8]启发，并考虑到形如问题(1)的近共振问题还没有相关结果，本文将用 Ekeland 变分原理和山路引理在适当条件下证明问题(1)多重解的存在性. 记 λ_1 是问题

$$\begin{cases}-\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u=\lambda u^3 & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的第一特征值，对应的特征函数为 φ_1. 同时，设连续函数 $f(x, u)$ 满足如下条件:

(F1) $0\leqslant f(x, t)<b\lambda|t|^3+a\left(\frac{\lambda}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{2}}|t|$ 对 $\forall(x, t)\in\overline{\Omega}\times(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ 一致成立;

(F2) $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(x, t)}{bt^3}=0$ 对 $\forall(x, t)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$ 一致成立;

(F3) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(-\frac{a}{2}\sqrt{\lambda_1}t^2+\int_\Omega F(x, t\varphi_1)\mathrm{d}x\right)\to-\infty$，对 $x\in\Omega$ 一致成立，$F(x, t)=\int_0^t f(x, s)\mathrm{d}s$.

本文的主要结论是:

定理 1 若条件(F1)成立，则 $0<\lambda<\lambda_1$ 时，问题(1)至少存在 1 个非平凡弱解.

定理 2 若满足条件(F2)和(F3)，则 $0<\lambda<\lambda_1$ 且 λ 接近 λ_1 时，问题(1)至少有 3 个弱解.

1 预备知识

用 H 表示 $H_0^1(\Omega)$，对 $\forall u, v\in H$，定义:

$$\langle u, v\rangle=\int_\Omega\nabla u\nabla v\mathrm{d}x$$

$$\|u\|=\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|u\|_{L^p}=\left(\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

由文献[9]知，$\lambda_1>0$ 是单重的，且对应可取 $\varphi_1>0$ 满足 $\|\varphi_1\|_{L^4}=1$. 特别地，λ_1 可描述为

$$\lambda_1=\inf\left\{\|u\|^4: u\in H, \int_\Omega|u|^4\mathrm{d}x=1\right\} \tag{2}$$

令

$$V=\left\{v\in H: \int_\Omega\varphi_1^3 v\mathrm{d}x=0\right\}$$

由 λ_1 的单重性，有

$$\|\varphi_1\|^2\int_\Omega\nabla\varphi_1\nabla v\mathrm{d}x=\lambda_1\int_\Omega\varphi_1^3 v\mathrm{d}x=0$$

从而

$$\int_\Omega\nabla\varphi_1\nabla v\mathrm{d}x=0$$

因此

$$H=\operatorname{span}\{\varphi_1\}\oplus V$$

记

$$\lambda_V=\inf\left\{\|u\|^4: u\in V, \int_\Omega|u|^4\mathrm{d}x=1\right\}$$

则可证明: 对 $\forall u\in V$，都有 $\|u\|^4\geqslant\lambda_V\|u\|_{L^4}^4$ 且 $\lambda_V>\lambda_1$. 若存在 $u\in H_0^1(\Omega)$，使得对任取的 $v\in H$，都有

$$(a-b\|u\|^2)\int_\Omega\nabla u\nabla v\mathrm{d}x+b\lambda\int_\Omega|u|^2 uv\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x, u)v\mathrm{d}x$$

则称 u 为问题(1) 的弱解. 问题(1) 具有变分结构，其泛函可描述为

$$I_\lambda(u)=-\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4+\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x-\frac{b\lambda}{4}\int_\Omega u^4\mathrm{d}x \tag{3}$$

可证 $I_\lambda\in C^1(H,\mathbb{R})$，并且其临界点恰好是问题(1) 的弱解. 实际上，对任意的 $v\in H_0^1(\Omega)$，有

$$\langle I'_\lambda(u),v\rangle=-\left[(a-b\|u\|^2)\int_\Omega\nabla u\nabla v\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u)v\mathrm{d}x+b\lambda\int_\Omega|u|^2uv\mathrm{d}x\right]$$

由于 H 对 $1<p<2^*$ 可以紧嵌入到 $L^p(\Omega)$，因此对任意的 $p\in(1,2^*)$，都存在相应的常数 $C_p>0$，使得对任意的 $u\in H$ 都满足 Sobolev 嵌入不等式

$$\|u\|_{L^p}\leqslant C_p\|u\| \tag{4}$$

引理 1　如果条件(F1) 或(F2) 成立，那么 I_λ 的任意(PS) 序列 $\{u_n\}$ 都是 H 中的列紧集.

证　根据已知，存在常数 c，使得：

$$\|u_n\|\leqslant c\qquad |I_\lambda(u_n)|\leqslant c\qquad I'_\lambda(u_n)\to 0 \tag{5}$$

因此存在 $\{u_n\}$ 的子列(下面仍记为 $\{u_n\}$) 和 $u\in H$，满足

$$\begin{gathered}u_n\rightharpoonup u\qquad u_n\in H\\ u_n\to u\qquad u_n\in L^p(\Omega),\ 1<p<2^*\\ u_n(x)\to u(x)\qquad \text{a. e. } x\in\Omega\end{gathered} \tag{6}$$

一方面，由条件(F1) 及(4),(5),(6) 式可知，当 $n\to\infty$ 时有

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega f(x,u_n)(u-u_n)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_\Omega|f(x,u_n)||u-u_n|\mathrm{d}x\leqslant\\&\qquad\left(b\lambda C_4^3c^3+aC_1c\left(\frac{\lambda}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{2}}\right)(\|u-u_n\|_{L^4}+\|u-u_n\|_{L^2})\to 0\end{aligned} \tag{7}$$

另一方面，由条件(F2)，并考虑到 $f(x,t)$ 的连续性，可以得出：对任给的 $\varepsilon>0$，存在常数 $a_\varepsilon>0$，使得

$$f(x,t)\leqslant b\varepsilon|t|^3+a_\varepsilon\qquad\forall(x,t)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$$

再由(4),(5),(6) 式，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega f(x,u_n)(u-u_n)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_\Omega(b\varepsilon|u_n|^3+a_\varepsilon)|u-u_n|\mathrm{d}x\leqslant\\&\qquad(b\varepsilon C_4^3c^3+a_\varepsilon|\Omega|^{\frac{1}{2}})(\|u-u_n\|_{L^4}+\|u-u_n\|_{L^2})\to 0\end{aligned} \tag{8}$$

类似地，根据常数 c 的选取可知 $\|u\|\leqslant c$，因此当 $n\to\infty$ 时，还有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(|u_n|^2u_n(u-u_n)-|u|^2u(u-u_n))\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega(|u_n|^3+|u|^3)|u-u_n|\mathrm{d}x\leqslant\\&\qquad 2C_4^3c^3\|u-u_n\|_{L^4}\to 0\end{aligned} \tag{9}$$

由(5),(6) 式可得

$$\langle I'_\lambda(u)-I'_\lambda(u_n),u_n-u\rangle\to 0\qquad n\to\infty$$

再根据(7) 式(或(8) 式) 和(9) 式得

$$\|u_n\|\to\|u\|\qquad n\to\infty$$

因此从(6) 式可得出在 H 中有 $\|u_n-u\|\to 0$，即序列 $\{u_n\}$ 在 H 中存在强收敛子列，从而在条件(F1) 或(F2) 之下，I_λ 的任意(PS) 序列 $\{u_n\}$ 都是 H 中的列紧集.

引理 2　设 $0<\lambda<\lambda_1$，则当条件(F1) 成立时，存在 $r>0$，$\rho<0$，使得 $\|u\|=r$ 时 $I_\lambda(u)>0$，$\|u\|<r$ 时 $\inf I_\lambda(u)\leqslant\rho<0$.

证　一方面，任给 $u\in H$ 使得 $\|u\|>0$，由(3) 式，并注意到 $0<\lambda<\lambda_1$，有

$$\begin{aligned}I_\lambda(u)&\geqslant-\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{b\lambda}{4}\int_\Omega|u|^4\mathrm{d}x\geqslant\\&-\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b(\lambda_1-\lambda)}{4\lambda_1}\|u\|^4=g(\|u\|)\end{aligned}$$

只要 $\|u\| > \left[\frac{2a\lambda_1}{b(\lambda_1-\lambda)}\right]^{\frac{1}{2}}$ 就有 $I_\lambda(u) > 0$. 因此存在 $r > \left[\frac{2a\lambda_1}{b(\lambda_1-\lambda)}\right]^{\frac{1}{2}} > 0$，当 $\|u\| = r$ 时 $I_\lambda(u) > 0$.

另一方面，由条件(F1)可知

$$0 \leqslant F(x,t) \leqslant \frac{b\lambda}{4}t^4 + \frac{a}{2}\left(\frac{\lambda}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{2}} t^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

因此

$$0 \leqslant \int_\Omega F(x,t)\mathrm{d}x \leqslant \frac{b\lambda}{4}\int_\Omega |u|^4 \mathrm{d}x + \frac{a}{2}\left(\frac{\lambda}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{2}}\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x \tag{10}$$

对 $\forall u \in H$ 都成立. 从而根据(3),(10)式并结合 Hölder 不等式可得出

$$I_\lambda(u) \leqslant -\frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 + \frac{a}{2}\left(\frac{\lambda}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega 1^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |u|^4 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$-\frac{a}{2}\left(1-\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda_1}}\right)\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 = h(\|u\|)$$

不难看出，只需 $0 < \|u\| < \left[\frac{2a(\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda})}{b\sqrt{\lambda_1}}\right]^{\frac{1}{2}}$ 就有 $I_\lambda(u) < 0$. 显然此时仍满足 $\|u\| < r$. 因此

$$-\frac{a^2\lambda_1}{2b(\lambda_1-\lambda)} = \inf_{\|u\|<r} g(\|u\|) \leqslant \inf_{\|u\|\leqslant r} I_\lambda(u) \leqslant \inf_{\|u\|<r} h(\|u\|) = -\frac{a^2}{2b}\left(1-\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda_1}}\right) = \rho$$

2 主要结果的证明

定理1的证明 令 $B_r(0) = \{u: u \in H, \|u\| \leqslant r\}$，则 $B_r(0)$ 是有界闭凸集. 从引理2知，I_λ 下方有界且下半连续. 由 Ekeland 变分原理[10]，对任意 $u \in \overline{B_r(0)}$，都存在极小化序列 $\{u_n\} \subset \overline{B_r(0)}$，使得：

$$I_\lambda(u_n) \leqslant \inf_{u\in\overline{B_r(0)}} I_\lambda(u) + \frac{1}{n}$$

$$I_\lambda(u) \geqslant I_\lambda(u_n) - \frac{1}{n}\|u-u_n\|$$

因此当 $n \to \infty$ 时，有：

$$I'_\lambda(u_n) \to 0 \qquad I_\lambda(u_n) \to c = \inf_{u\in\overline{B_r(0)}} I_\lambda(u)$$

再根据引理1知 $\{u_n\}$ 存在收敛子列 $\{u_{nk}\}$，记

$$u_* = \lim_{n\to\infty} u_{nk}$$

则 $u_* \in B_r(0)$，$I_\lambda(u_*) = \inf_{u_{n_k}\in B_r(0)} I_\lambda(u_{nk}) < \rho$ 且 $I'_\lambda(u_*) = 0$，即 u_* 是 I_λ 的局部极小点. 再根据 $I_\lambda(0) = 0$ 得出 $u_* \neq 0$. 从而问题(1)至少有1个非平凡弱解.

定理2的证明

步骤1 问题(1)对应的泛函 I_λ 在 H 中下方有界且在 H 和 V 中强制. 更一般地，存在仅依赖于参数 λ 的常数 α，使得 $\inf_V I_\lambda \geqslant \alpha$. 由引理1的证明过程知，在条件(F2)之下有

$$|F(x,t)| \leqslant \frac{b\varepsilon}{4}t^4 + a_\varepsilon|t| \tag{11}$$

对 $\forall u \in H$，根据 Hölder 不等式，并结合(4)式和(11)式可得

$$I_\lambda(u) \geqslant -\frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^4 - \int_\Omega\left(\frac{b\varepsilon}{4}u^4 + a_\varepsilon|u|\right)\mathrm{d}x \geqslant$$

$$-\frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b(\lambda_1-\lambda-\varepsilon)}{4\lambda_1}\|u\|^4 - a_\varepsilon|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2}$$

只需取 ε 满足 $0<\varepsilon<\lambda_1-\lambda$，就有：$I_\lambda$ 在 H 中下方有界并且强制. 同理，对 $\forall v\in V$，有

$$I_{\lambda_1}(v)\geqslant-\frac{a}{2}\|v\|^2+\frac{b(\lambda_V-\lambda_1-\varepsilon)}{4\lambda_V}\|v\|^4-a_\varepsilon|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2}$$

由于 $\lambda_1<\lambda_V$，取 ε 使得 $0<\varepsilon<\lambda_V-\lambda_1$，则 I_{λ_1} 在 V 中下方有界并且强制. 当 $\lambda<\lambda_1$ 时，有

$$I_\lambda(v)-I_{\lambda_1}(v)=\frac{b\lambda_1}{4}\int_\Omega v^4\mathrm{d}x-\frac{b\lambda}{4}\int_\Omega v^4\mathrm{d}x=\frac{b(\lambda_1-\lambda)}{4}\|v\|_{L^4}^4\geqslant 0\qquad\forall v\in V$$

因此对 $\forall v\in V$ 都有

$$I_\lambda(v)\geqslant I_{\lambda_1}(v)$$

从而 I_λ 在 V 上也强制，并且 $\inf_V I_\lambda\geqslant\alpha=\inf_V I_{\lambda_1}$.

步骤 2　若 $0<\lambda<\lambda_1$，且 λ 接近 λ_1，则存在 t^-，t^+ 满足 $t^-<0<t^+$，使得

$$I_\lambda(t^\pm\varphi_1)\leqslant\alpha$$

注意到：

$$\|\varphi_1\|_{L^4}=1\qquad\|\varphi_1\|^4=\lambda_1$$

对任意的 $t\in\mathbb{R}$，有

$$I_\lambda(t\varphi_1)=-\frac{a}{2}\|t\varphi_1\|^2+\frac{b}{4}\|t\varphi_1\|^4+\int_\Omega F(x,t\varphi_1)\mathrm{d}x-\frac{b\lambda}{4}\int_\Omega(t\varphi_1)^4\mathrm{d}x=$$
$$\frac{b(\lambda_1-\lambda)}{4}t^4-\left(\frac{a}{2}\sqrt{\lambda_1}t^2-\int_\Omega F(x,t\varphi_1)\mathrm{d}x\right)\tag{12}$$

由条件(F3)，并结合(12)式可知，给定常数 $M>0$，存在 $t^-<0$，只要 $t<t^-$，就有：

$$\frac{a}{2}\sqrt{\lambda_1}(t^-)^2-\int_\Omega F(x,t^-\varphi_1)\mathrm{d}x>-\alpha+M$$

$$I_\lambda(t^-\varphi_1)=\frac{b(\lambda_1-\lambda)}{4}(t^-)^4-\left(\frac{a}{2}\sqrt{\lambda_1}(t^-)^2-\int_\Omega F(x,t^-\varphi_1)\mathrm{d}x\right)\leqslant\frac{b(\lambda_1-\lambda)}{4}(t^-)^4+\alpha-M$$

取 $\lambda_1-\lambda<\dfrac{4M}{b(t^-)^4}$ 时，有 $I_\lambda(t^-\varphi_1)<\alpha$. 类似地，也存在 $t^+>0$，当取 $\lambda_1-\lambda<\dfrac{4M}{b(t^+)^4}$ 时，有 $I_\lambda(t^+\varphi_1)<\alpha$.

步骤 3　先用 Ekeland 变分原理得：I_λ 有两个临界点. 再由山路引理得到第三个临界点. 对任给的 $v\in V$，$t>0$，设

$$H^\pm=\{u\in H:u=v\pm t\varphi_1,\ v\in V\}$$

当 $\lambda<\lambda_1$ 且 λ 接近 λ_1 时，有

$$-\infty<c^\pm=\inf_{H^\pm}I_\lambda<\alpha=\inf_V I_{\lambda_1}\leqslant\inf_V I_\lambda\tag{13}$$

在 $H^\pm$ 中对 I_λ 使用 Ekeland 变分原理，则存在序列 $\{u_n^\pm\}\subset H^\pm$，使得当 $n\to\infty$ 时 $I_\lambda(u_n^\pm)\to c^\pm$ 且 $I'_\lambda(u_n^\pm)\to 0$，而 I_λ 在 H 中强制，因此 $\{u_n^\pm\}$ 有界，从而可得 $\{u_n^\pm\}$ 满足(13)式. 再由引理 1 知 $\{u_n^\pm\}$ 有收敛子列 $\{u_{n_k}^\pm\}$，根据(13)式和 $V=\partial H^\pm$，可得 $\{u_{n_k}^\pm\}$ 收敛到 $H^\pm$ 的内点 $u_{**}^\pm$，也就是说 I_λ 在 $H^\pm$ 的内部达到极大值，因此 I_λ 有局部极小点 $u_{**}^+\in H^+$ 和局部极小点 $u_{**}^-\in H^-$. 由于 $H^+\cap H^-=\varnothing$，因此 $u_{**}^+\neq u_{**}^-$，也即 I_λ 有 2 个不同的局部极小点. 再由山路引理[11] 知 I_λ 存在不同于 u_{**}^+ 和 u_{**}^- 的临界点. 因此问题(1) 至少有 3 个弱解.

参考文献：

[1] 赵荣胜，唐春雷. 一类 Kirchhoff 型方程解的多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(2)：60－63.

[2] MAWHIN J，SCHMITT K. Nonlinear Eigenvalue Problems with the Parameter Near Resonance [J]. Annales Polonici Mathematici，1990，51(1)：172－189.

[3] AN Y C，LU X，SUO H M. Existence and Multiplicity Results for a Degenerate Quasi-Linear Elliptic System Near Resonance [J]. Boundary Value Problems，2014，184(1)：1－10.

[4] AN Y C, SUO H M. The Neumann Problem for a Degenerate Elliptic System Near Resonance [J]. Advances in Mathematical Physics, 2017, 2017(4): 1-10.

[5] YIN G S, LIU J S. Existence and Multiplicity of Nontrivial Solutions for a Nonlocal Problem [J]. Boundary Value Problems, 2015, 2015(1): 1-7.

[6] LEI C Y, LIAO J F, SUO H M. Multiple Positive Solutions for a Class of Nonlocal Problems Involving a Sign-Changing Potential [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2017, 2017(9): 1-8.

[7] 李红英. 一类非局部问题的多解性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2017, 42(6): 24-27.

[8] LEI C Y, CHU C M, SUO H M. Positive Solutions for a Nonlocal Problem with Singularity [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2017, 2017(85): 1-9.

[9] PERERA K, ZHANG Z T. Nontrivial Solutions of Kirchhoff-Type Problems via the Yang Index [J]. Journal of Differential Equations, 2006, 221(1): 246-255.

[10] 钟承奎, 范先令, 陈文嫄. 非线性泛函分析引论 [M]. 兰州: 兰州大学出版社, 189-193.

[11] PUCCI P, SERRIN J. A Mountain Pass Theorem [J]. Journal of Differential Equations, 1985, 60(1): 142-149.

Existence of Multiple Solutions for a Class of Nonlocal Near Resonance Problems

WANG Yue, LIANG Jin-ping, SUO Hong-min

School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China

Abstract: In this paper, we use the variational method to study the following nonlocal problems in the smooth bounded domain Ω, which are determined by the constant $a, b > 0$, the parameter $\lambda > 0$ and the continuous function $f(x, u)$:

$$\begin{cases} -\left(a - b\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u + b\lambda u^3 = f(x, u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

The existence and multiple solutions are obtained for this class of problems with near resonance by the Ekeland variational principle and a mountain pass lemma.

Key words: nonlocal problem; near resonance; variational method; Ekeland's variational principle; multiple solution

责任编辑 廖 坤
崔玉洁