DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.04.010

一类模糊数值映射二次型方程和 Drygas 型方程的 Ulam 稳定性①

金振宇，　吴健荣

苏州科技大学 数理学院，江苏 苏州 215009

摘要： 方程的 Ulam 稳定性理论侧重于研究方程近似解附近存在精确解的条件. 将 Ulam 稳定性的研究推广到了 Banach 空间中模糊数值映射方程. 通过考虑无界的函数差，利用定义在模糊数空间中的度量，证明了更一般化的模糊数值映射二次型方程和 Drygas 型方程的 Ulam 稳定性，并得到其解的一些基本性质. 所得的结论推广了已有文献中的相关结论.

关　键　词： Ulam 稳定性；模糊数值映射；二次型方程；Drygas 型方程

中图分类号： O177.91　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673－9868(2018)04－0059－08

稳定性是方程最重要的特性之一. 泛函方程的稳定性问题起源于文献[1]对于群同态的研究. 文献[2]首先证明了在 Banach 空间中近似可加映射的 Ulam 稳定性. 随后，文献[3]通过考虑无界的柯西差，将文献[2]的结论推广到了线性映射，并得到如下结论：

令 X, Y 为 Banach 空间，若 $f: X \longrightarrow Y$ 满足：对于给定的 $x, y \in X$，存在 $\varepsilon > 0$ 和 $0 < p < 1$，有

$$\| f(x+y) - f(x) - f(y) \| \leqslant \varepsilon(\| x \|^p + \| y \|^p)$$

且对于 $\forall t \in \mathbb{R}$，$f(tx)$ 在 X 上是连续的. 则存在唯一的线性映射 $T: X \longrightarrow Y$，使得

$$\| f(x) - T(x) \| \leqslant \frac{2\varepsilon}{(2-2^p)}(\| x \|^p + \| y \|^p)$$

自此，众多学者开始研究无界情形下泛函方程的 Ulam 稳定性. 文献[4－5]研究了 Jensen 方程的 Ulam 稳定性. 文献[6]研究了二次映射方程

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

的 Ulam 稳定性. 文献[7]研究了 Drygas 方程

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + f(y) + f(-y)$$

的 Ulam 稳定性.

值得注意的是，一些泛函方程 Ulam 稳定性的研究结果被推广到了集值的情形. 文献[8]用不动点方法研究了 Cauchy-Jensen 型可加集值泛函方程、Jensen 型可加二次集值泛函方程以及 Jensen 型三次集值泛函

① 收稿日期：2017－07－18
基金项目：国家自然科学基金项目(11371013)；苏州科技大学研究生科技创新计划项目(SKCX16_0541).
作者简介：金振宇(1990－)，男，江苏苏州人，硕士研究生，主要从事方程稳定性分析的研究.
通信作者：吴健荣，教授.

方程的 Ulam 稳定性. 文献[9] 讨论了 n 维三次集值泛函方程的 Ulam 稳定性. 文献[10] 定义了更一般化的可加集值泛函方程，并证明了其 Ulam 稳定性.

随着模糊分析学的发展，越来越多的学者从模糊分析学的角度去考虑Ulam稳定性. 目前，该领域大多数的研究成果都是在模糊赋范空间中得到的(文献[11－13]). 文献[14] 讨论了抽象凸空间中广义模糊博弈的结构稳定性. 而关于模糊数值映射方程的 Ulam 稳定性的研究结果还很少.

本文将在 Banach 空间中研究如下模糊数值映射二次型映射方程

$$f(sx+y)+f(sx-y)=2s^2g(x)+2h(y) \tag{1}$$

和 Drygas 型方程

$$f(sx+y)+f(sx-y)=2s^2g(x)+h(y)+l(-y) \tag{2}$$

的 Ulam 稳定性.

文献[11] 在模糊赋范空间中讨论了当 $s=1$，f,g,h 为单值奇映射时，方程(1) 的 Ulam 稳定性. 文献[15] 研究了当 $g=h=f$ 时，方程(1) 的 Ulam 稳定性，其中 f 为单值映射. 文献[7] 利用不动点定理，在 Banach 空间中着重研究了当 $s=1$，$f=g=h=l$ 时，方程(2) 的 Ulam 稳定性，其中 f 表示单值映射. 本文将在Banach中对更一般化的二次型映射方程和Drygas型方程的Ulam稳定性进行讨论，所得的结论在一定程度上推广了文献[7，11，15] 中的相关结论.

在本文中，$\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 分别表示自然数集和实数集，$\mathbb{R}_+=(0,+\infty)$，X 和 Y 为 Banach 空间，$P_{kc}(X)$ 表示 X 中所有非空紧凸集，$B\subseteq Y$ 为 Y 中的线性子空间.

1 预备知识

本节首先引入一些关于模糊数及度量的基本概念和性质，其中的定义和结论可参见文献[16].

定义 1 如果一个映射 $u: X\longrightarrow[0,1]$ 满足下列条件:

(i) $\forall\alpha\in(0,1]$，$[u]^\alpha=\{x\in X: u(x)\geqslant\alpha\}\in P_{kc}(X)$;

(ii) u 的支撑集$[u]^0=\mathrm{supp}(u)=cl\{x: u(x)>0\}$ 为紧集.

则称 u 为 X 上的模糊数，X 上的模糊数的集合记为 X_F.

在 X_F 上可定义线性结构如下：$\forall u,v\in X_F$，$s\in\mathbb{R}$，$x\in X$，令:

$$(u+v)(x)=\sup\{\alpha>0: x\in[u]^\alpha+[v]^\alpha\}$$

$$(su)(x)=\sup\{\alpha>0: x\in s[u]^\alpha\}$$

则:

$$[u+v]^\alpha=[u]^\alpha+[v]^\alpha \qquad [su]^\alpha=s[u]^\alpha \qquad \forall\alpha\in(0,1]$$

引理 1 定义映射 $D: X_F\times X_F\longrightarrow\mathbb{R}_+\cup\{0\}$ 为

$$D(u,v)=\sup_{\alpha\in(0,1]} d_H([u]^\alpha,[v]^\alpha)$$

其中 d_H 为 Hausdorff 度量. 则(X_F,D) 是完备的度量空间，并且对于 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$，$\forall u,v,w,e\in X_F$，度量 D 有下列性质:

(P1) $D(\lambda u,\lambda v)=|\lambda|D(u,v)$;

(P2) $D(u+w,v+w)=D(u,v)$;

(P3) $D(u+v,w+e)\leqslant D(u,w)+D(v,e)$.

引理 2 存在 Banach 空间 Z，(X_F,D) 可以等距嵌入于 Z.

由此可知：$\forall s,t\in\mathbb{R}_+$，$\forall u,v\in X_F$，有:

$$(s+t)u=su+tu \qquad s(u+v)=su+sv$$

2　主要结果

本节将在不同的条件下证明方程(1) 和(2) 的 Ulam 稳定性，其中 f, g, h, l 表示取值于 X_F 的模糊数值映射.

定理 1　设 $\varepsilon \geqslant 0$，$p \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$，模糊数值映射 $f, g, h: B \longrightarrow X_F$ 满足 $g(0) = h(0) = 0$，且 $\forall x, y \in B$，有

$$D(f(x+y)+f(x-y),\ 2g(x)+2h(y)) \leqslant \varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p) \tag{3}$$

则当 f 为偶映射时，存在唯一的模糊数值二次偶映射 $T: B \longrightarrow X_F$，满足：

$$D(T(x),\ f(x)) \leqslant \frac{4\varepsilon\|x\|^p}{|2^2-2^p|} \tag{4}$$

$$D(2T(x),\ g(x)+h(x)) \leqslant \left(\frac{8}{|2^2-2^p|}+3\right)\varepsilon\|x\|^p$$

且对于有理数 c，有 $T(cx)=c^2T(x)$.

证　由(3) 式及 $g(0)=h(0)=0$ 易知 $f(0)=0$. 分别令(3) 式中 $y=0$，$x=0$，$y=x$，可得：

$$D(2f(x),\ 2g(x)) \leqslant \varepsilon\|x\|^p \tag{5}$$

$$D(2f(y),\ 2h(y)) \leqslant \varepsilon\|y\|^p \tag{6}$$

$$D(f(2x),\ 2g(x)+2h(x)) \leqslant 2\varepsilon\|x\|^p \tag{7}$$

由(5)—(7) 式可知

$$\begin{aligned} D(f(2x),\ 4f(x)) \leqslant\ & D(f(2x),\ 2g(x)+2h(x))+D(2g(x)+2h(x),\ 4f(x)) \leqslant \\ & 2\varepsilon\|x\|^p + D(2f(x),\ 2g(x))+D(2f(x),\ 2h(x)) \leqslant 4\varepsilon\|x\|^p \end{aligned} \tag{8}$$

情形 1　$p<2$. 由(8) 式知 $D(2^{-2}f(2x),\ f(x)) \leqslant \varepsilon\|x\|^p$，由归纳法得

$$D(2^{-2n}f(2^nx),\ f(x)) \leqslant \varepsilon\|x\|^p\sum_{i=1}^{n}2^{(i-1)(p-2)} < \frac{4\varepsilon\|x\|^p}{2^2-2^p} \tag{9}$$

取

$$f_n(x)=2^{-2n}f(2^nx) \qquad n \in \mathbb{N}$$

不失一般性，取 $m \in \mathbb{N}$ 且 $n \geqslant m$，则由(9) 式可得

$$\begin{aligned} D(f_n(x),\ f_m(x)) = & D(2^{-2n}f(2^nx),\ 2^{-2m}f(2^mx)) = \\ & 2^{-2m}D(2^{-2(n-m)}f(2^{n-m}2^mx),\ f(2^mx)) < \\ & \frac{2^{m(p-2)+2}\varepsilon\|x\|^p}{2^2-2^p} \to 0 \qquad m\to\infty \end{aligned} \tag{10}$$

由(10) 式可知$\{f_n(x)\}$为完备度量空间 X_F 中的柯西列. 由此可定义模糊数值映射 $T: B \longrightarrow X_F$，满足

$$T(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x) \qquad \forall x \in B$$

显然 T 为偶映射. 再由(9) 式和度量 D 的连续性可知

$$D(T(x),\ f(x)) = \lim_{n\to\infty}D(2^{-2n}f(2^nx),\ f(x)) \leqslant \frac{4\varepsilon\|x\|^p}{2^2-2^p} \tag{11}$$

以及

$$\begin{aligned} & D(T(x+y)+T(x-y),\ 2T(x)+2T(y)) = \\ & \lim_{n\to\infty}2^{-2n}D(f(2^n(x+y))+f(2^n(x-y)),\ 2f(2^nx)+2f(2^ny)) \leqslant \\ & \lim_{n\to\infty}2^{-2n}D(f(2^n(x+y))+f(2^n(x-y)),\ 2g(2^nx)+2h(2^ny)) + \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-2n} D(2g(2^n x)+2h(2^n y), 2f(2^n x)+2f(2^n y)) \leqslant$$
$$\lim_{n\to\infty} 2^{n(p-2)+1}\varepsilon(\|x\|^p+\|y\|^p)=0$$

于是

$$T(x+y)+T(x-y)=2T(x)+2T(y) \qquad \forall x,y\in B \tag{12}$$

即 T 为二次映射.

在(12)式中，令 $x=y$ 得

$$T(2x)=4T(x)$$

利用归纳法及(12)式可证：$\forall n\in\mathbb{N}$，$T(nx)=n^2T(x)$. 由 x 的任意性知 $T(x)=n^2T\left(\frac{x}{n}\right)$. 于是，$\forall m$，$n\in\mathbb{N}$，有 $T\left(\frac{n}{m}x\right)=n^2T\left(\frac{x}{m}\right)=\left(\frac{n}{m}\right)^2T(x)$. 由于 T 为偶映射，所以 $T(cx)=c^2T(x)$ 对于任意的有理数 c 都成立.

再由(11),(8),(7)式可得

$$D(2T(x), g(x)+h(x))\leqslant$$
$$D(2T(x), 2f(x))+D(2f(x), 2^{-1}f(2x))+D(2^{-1}f(2x), g(x)+h(x))\leqslant$$
$$\left(\frac{8}{2^2-2^p}+3\right)\varepsilon\|x\|^p$$

情形2 $p>2$. 由(8)式知

$$D(4f(2^{-1}x), f(x))\leqslant 2^{2-p}\varepsilon\|x\|^p$$

由归纳法知

$$D(2^{2n}f(2^{-n}x), f(x))\leqslant 2^{2-p}\varepsilon\|x\|^p\sum_{i=1}^{n}2^{(1-i)(p-2)}<\frac{4\varepsilon\|x\|^p}{2^p-2^2}$$

取

$$f_n(x)=2^{2n}f(2^{-n}x) \qquad n\in\mathbb{N}$$

与情形1类似，可得二次偶映射 $T: B\longrightarrow X_F$ 满足：

$$D(T(x), f(x))\leqslant\frac{4\varepsilon\|x\|^p}{2^p-2^2}$$

$$D(2T(x), g(x)+h(x))\leqslant\left(\frac{8}{2^p-2^2}+3\right)\varepsilon\|x\|^p$$

且对任意有理数 c，满足 $T(cx)=c^2T(x)$.

最后证明 T 的唯一性. 假设存在两个模糊数值映射 $T_1,T_2: B\longrightarrow X_F$ 均满足(4)式，则当 $p<2$ 时，有

$$D(T_1(x), T_2(x))=2^{-2n}D(T_1(2^nx), T_2(2^nx))\leqslant$$
$$2^{-2n}D(T_1(2^nx), f(2^nx))+2^{-2n}D(f(2^nx), T_2(2^nx))\leqslant$$
$$2^{n(p-2)+3}\frac{\varepsilon\|x\|^p}{|2^p-2^2|}\to 0 \qquad n\to\infty$$

当 $p>2$ 时，有

$$D(T_1(x), T_2(x))=2^{2n}D(T_1(2^{-n}x), T_2(2^{-n}x))\leqslant$$
$$2^{2n}D(T_1(2^{-n}x), f(2^{-n}x))+2^{2n}D(f(2^{-n}x), T_2(2^{-n}x))\leqslant$$
$$2^{n(2-p)+3}\frac{\varepsilon\|x\|^p}{|2^p-2^2|}\to 0 \qquad n\to\infty$$

由此可见，对于 $\forall x \in B$，$T_1(x)=T_2(x)$.

定理 2　设 $\varepsilon \geqslant 0$，$s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$，$p \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$，模糊数值映射 $f,g,h:B \longrightarrow X_F$ 满足 $g(0)=h(0)=0$，$\forall x,y \in B$，

$$D(f(sx+y)+f(sx-y),\ 2s^2g(x)+2h(y)) \leqslant \varepsilon(\|x\|^p+\|y\|^p) \tag{13}$$

则当 f 为偶映射时，存在唯一的二次偶映射 $T:B \longrightarrow X_F$ 满足：

$$D(T(x),\ f(x)) \leqslant \frac{4\theta\|x\|^p}{|2^2-2^p|}$$

$$D(2T(x),\ g(x)+h(x)) \leqslant \varepsilon\|x\|^p\left(\frac{4|s|^{p-2}+4}{|2^2-2^p|}\theta+\frac{s^{-2}+1}{2}\right)$$

其中

$$\theta=\begin{cases}|s|^{-p} & |s|<1\\ 1 & |s|\geqslant 1\end{cases}$$

且对任意的有理数 c，有

$$T(cx)=c^2T(x)$$

证　将(13)式中 sx 用 x 代替，可得

$$D(f(x+y)+f(x-y),\ 2s^2g(s^{-1}x)+2h(y)) \leqslant \varepsilon(|s|^{-p}\|x\|^p+\|y\|^p) \tag{14}$$

在(13)式中，分别令 $y=0$，$x=0$，可得：

$$D(2f(sx),\ 2s^2g(x)) \leqslant \varepsilon\|x\|^p \tag{15}$$

$$D(2f(y),\ 2h(y)) \leqslant \varepsilon\|y\|^p \tag{16}$$

令

$$g_1(x)=s^2g(s^{-1}x)$$

则由(14)式可得

$$\begin{aligned}&D(f(x+y)+f(x-y),\ 2g_1(x)+2h(y)) \leqslant\\ &\varepsilon(|s|^{-p}\|x\|^p+\|y\|^p) \leqslant\\ &\theta(\|x\|^p+\|y\|^p)\end{aligned}$$

由定理 1 可知，当 f 为偶映射时，存在唯一的二次偶映射 $T:B \longrightarrow X_F$ 满足

$$D(T(x),\ f(x)) \leqslant \frac{4\varepsilon\theta\|x\|^p}{|2^2-2^p|}$$

并且对于任意的有理数 c，有

$$T(cx)=c^2T(x)$$

下面证明 T 与 g,h 的关系. 由(15)式和(16)式可知

$$\begin{aligned}&D(2T(x),\ g(x)+h(x)) \leqslant D(T(x),\ g(x))+D(T(x),\ h(x)) \leqslant\\ &s^{-2}D(T(sx),\ f(sx))+s^{-2}D(f(sx),\ s^2g(x))+D(T(x),\ f(x))+D(f(x),\ h(x)) \leqslant\\ &\varepsilon\|x\|^p\left(\frac{4|s|^{p-2}+4}{|2^2-2^p|}\theta+\frac{s^{-2}+1}{2}\right)\end{aligned}$$

定理 3　设 $\varepsilon \geqslant 0$，$p \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$，模糊数值映射 $f,g,h,l:B \longrightarrow X_F$ 满足：

$$g(0)=h(0)=l(0)=0 \qquad \forall x,y \in B$$

$$D(f(x+y)+f(x-y),\ 2g(x)+h(y)+l(-y)) \leqslant \varepsilon(\|x\|^p+\|y\|^p) \tag{17}$$

则当 f 为偶映射时，存在唯一的二次偶映射 $T:B \longrightarrow X_F$ 满足：$\forall x \in B$，有：

$$D(T(x),\ f(x)) \leqslant \frac{4\varepsilon\|x\|^p}{|2^2-2^p|}$$

$$D(3T(x),\ g(x)+h(x)+l(-x))\leqslant\left(\frac{12}{|2^2-2^p|}+\frac{3}{2}\right)\varepsilon\|x\|^p$$

且对任意的有理数 c，有

$$T(cx)=c^2T(x)$$

证 令

$$h_1(x)=\frac{1}{2}h(x)+\frac{1}{2}l(-x)\qquad\forall x\in B$$

则

$$2h_1(x)=h(x)+l(-x)$$

由(17)式得

$$D(f(x+y)+f(x-y),\ 2g(x)+2h_1(y))\leqslant\varepsilon(\|x\|^p+\|y\|^p)\qquad\forall x,y\in B$$

由定理1可知，当 f 为偶映射时，存在唯一的二次偶映射 $T:B\longrightarrow X_F$，满足

$$D(T(x),\ f(x))\leqslant\frac{4\varepsilon\|x\|^p}{|2^2-2^p|}\qquad\forall x\in B$$

且对任意的有理数 c，有

$$T(cx)=c^2T(x)$$

在(17)式中，分别令 $y=0$，$x=0$，$y=x$，可得：

$$D(2f(x),\ 2g(x))\leqslant\varepsilon\|x\|^p\tag{18}$$

$$D(2f(y),\ h(y)+l(-y))\leqslant\varepsilon\|y\|^p\tag{19}$$

由(18)式和(19)式可知

$$\begin{aligned}&D(3T(x),\ g(x)+h(x)+l(-x))\leqslant\\&D(3T(x),\ 3f(x))+D(3f(x),\ g(x)+h(x)+l(-x))\leqslant\\&3D(T(x),\ f(x))+D(f(x),\ g(x))+D(2f(x),\ h(x)+l(-x))\leqslant\\&\left(\frac{12}{|2^2-2^p|}+\frac{3}{2}\right)\varepsilon\|x\|^p\end{aligned}$$

定理4 设 $\varepsilon\geqslant 0$，$s\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$，$p\in\mathbb{R}\backslash\{2\}$，模糊数值映射 $f,g,h,l:B\longrightarrow X_F$ 满足：

$$g(0)=h(0)=l(0)=0\qquad\forall x,y\in B$$

$$D(f(sx+y)+f(sx-y),\ 2s^2g(x)+h(y)+l(-y))\leqslant\varepsilon(\|x\|^p+\|y\|^p)\tag{20}$$

则当 f 为偶映射时，存在唯一的二次偶映射 $T:B\longrightarrow X_F$ 满足：

$$D(T(x),\ f(x))\leqslant\frac{4\varepsilon\theta\|x\|^p}{|2^2-2^p|}\tag{21}$$

$$D(3T(x),\ g(x)+h(x)+l(-y))\leqslant\varepsilon\|x\|^p\left(\frac{4|s|^{p-2}+8}{|2^2-2^p|}\cdot\theta+\frac{1+2s^2}{2s^2}\right)\tag{22}$$

其中

$$\theta=\begin{cases}|s|^{-p} & |s|<1\\ 1 & |s|\geqslant 1\end{cases}$$

且对于任意有理数 c，有

$$T(cx)=c^2T(x)$$

证 令

$$h_1(x)=\frac{1}{2}h(x)+\frac{1}{2}l(-x)\qquad\forall x\in B$$

则

$$2h_1(x)=h(x)+l(-x)$$

由(20)式得：$\forall x, y \in B$，有

$$D(f(sx+y)+f(sx-y), 2s^2g(x)+2h_1(y)) \leqslant \varepsilon(\|x\|^p+\|y\|^p)$$

由定理 2 得：存在唯一的二次偶映射 $T: B \longrightarrow X_F$ 满足(21)式，且对任意的有理数 c，有

$$T(cx)=c^2T(x)$$

在(20)式中，分别令 $y=0$，$x=0$，可得：

$$D(2f(sx), 2s^2g(x)) \leqslant \varepsilon\|x\|^p \tag{23}$$

$$D(2f(y), h(y)+l(-y)) \leqslant \varepsilon\|y\|^p \tag{24}$$

于是，由(21)，(23)和(24)式得

$$\begin{aligned}
&D(3T(x), g(x)+h(x)+l(-y)) \leqslant \\
&D(T(x), g(x))+D(2T(x), h(x)+l(-y)) \leqslant \\
&s^{-2}D(T(sx), f(sx))+s^{-2}D(f(sx), s^2g(x))+ \\
&D(2T(x), 2f(x))+D(2f(x), h(x)+l(-x)) \leqslant \\
&\varepsilon\|x\|^p\left(\frac{4s^{p-2}+8}{|2^2-2^p|}\cdot\theta+\frac{1+2s^2}{2s^2}\right)
\end{aligned}$$

参考文献：

[1] ULAM S M. Problems in Modern Mathematics [M]. New York: Wiley, 1960.

[2] HYERS D H. On the Stability of the Linear Functional Equation [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1941, 27(4): 222-224.

[3] RASSIAS T M. On the Stability of the Linear Mapping in Banach Spaces [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1978, 72(2): 297-300.

[4] JUNG S M. Hyers-Ulam-Rassias Stability of Jensen's Equation and Its Application [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1998, 126(11): 3137-3143.

[5] LEE Y H, JUN K W. A Generalization of the Hyers-Ulam-Rassias Stability of Jensen's Equation [J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 1999, 246(2): 627-638.

[6] FECHNER W. On the Hyers-Ulam Stability of Functional Equations Connected with Additive and Quadratic Mappings [J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2006, 322(2): 774-786.

[7] PISZCZEK M, SZCZAWIЙSKA J. Stability of the Drygas Functional Equation on Restricted Domain [J]. Results in Mathematics, 2015, 68(1): 1-24.

[8] KENARY H A, REZAEI H, GHEISARI Y, et al. On the Stability of Set-Valued Functional Equations with the Fixed Point Alternative [J]. Fixed Point Theory and Applications, 2012, 2012(1): 81-97.

[9] CHU H Y, KIM A, YOO S K. On the Stability of the Generalized Cubic Set-Valued Functional Equation [J]. Applied Mathematics Letters, 2014, 37(6): 7-14.

[10] SUN Y J, PARK C, CHO Y. Hyers-Ulam Stability of a Generalized Additive Set-Valued Functional Equation [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2013, 2013(1): 101-106.

[11] MOHIUDDINEA S A, SEVLI H. Stability of Pexiderized Quadratic Functional Equation in Intuitionistic Fuzzy Normed Space [J]. Journal of Computational & Applied Mathematics, 2011, 235(8): 2137-2146.

[12] GORDJI M E, KHODAEI H, KAMYAR M. Stability of Cauchy-Jensen Type Functional Lquation in Generalized Fuzzy Normed Spaces [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2011, 62(8): 2950-2960.

[13] MIRMOSTAFAEE A K, MIRZAVAZIRI M, MOSLEHIAN M S. Fuzzy Stability of the Jensen Functional Equation [J]. Fuzzy Sets & Systems, 2008, 159(6): 730-738.
[14] 夏顺友，胥德平，王常春. 抽象凸空间中广义模糊博弈的结构稳定性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2013，35(2)：81-84.
[15] SAADATI R, PARK C. Non-Archimedean L-Fuzzy Normed Spaces and Stability of Functional Equations [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 60: 2488-2496.
[16] BAN J. Ergodic Theorems for Random Compact Sets and Fuzzy Variables in Banach Spaces [J]. Fuzzy Sets & Systems, 1991, 44(1): 71-82.

Ulam Stability of Some Fuzzy Number-Valued Functional Equations and Drygas Type Functional Equation

JIN Zhen-yu, WU Jian-rong
School of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu 215009, China

Abstract: The theory of the Ulam stability of equations focuses on conditions under which there exists an exact solution near approximate solutions for a given equation. The present paper investigates the Ulam stability of fuzzy number-valued functional equations in Banach spaces. By considering the unbounded differences between functions and by using the metric defined on a fuzzy number space, the Ulam stability of more general fuzzy number-valued quadratic type and Drygas type functional equations are proved. Moreover, some fundamental properties of the solutions are obtained. The obtained conclusions extend the relevant results in some existing papers.

Key words: Ulam stability; fuzzy number-valued mapping; quadratic type functional equation; Drygas type functional equation

责任编辑 廖 坤
崔玉洁