

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.05.014

具有变号位势的 Klein-Gordon-Maxwell 系统孤立波的存在性^①

廖 坤¹, 段春生², 李 麟^{3,4}, 陈尚杰^{3,4}

1. 西南大学 期刊社, 重庆 400715; 2. 中国民航飞行学院 计算机学院, 四川 广汉 618307;
3. 重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067; 4. 经济社会应用统计重庆市重点实验室, 重庆 400067

摘要: 研究了超线性的 Klein-Gordon-Maxwell 系统孤立波的存在性. 由于方程是定义在 $\mathbb{R}^3$ 上且位势是变号的, 对应的能量泛函不满足山路定理的几何条件. 利用局部环绕定理, 得到了其非平凡解的存在性, 改善和补充了已有的结果.

关 键 词: Klein-Gordon-Maxwell 系统; 变号位势; 局部环绕

中图分类号: O176.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2018)05-0089-05

研究如下的 Klein-Gordon-Maxwell 系统:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u - (2\omega + \phi)\phi u = g(x, u) & x \in \mathbb{R}^3 \\ \Delta \phi = (\omega + \phi)u^2 & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\omega > 0$ 是常数; $u, \phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 是未知函数; $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 为位势函数; $g(x, u): \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一连续函数. 这个系统有强烈的物理背景: 用以描述 Klein-Gordon 场和电磁场之间的相互作用. 本问题具有变分结构, 利用变分方法系统(1) 已经有大量的研究成果^[1-8].

为了阐述我们的主要结果, 做如下的假设:

(V) $V(x) \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ 下方有界并且存在常数 $v_0 > 0$ 满足

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \text{meas}\{x \in \mathbb{R}^3: |x - y| \leq v_0, V(x) \leq M\} = 0 \quad \forall M > 0$$

(H1) $g \in C(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, 并且存在常数 $C > 0$ 和 $p \in [4, 2^*)$ 使得 $|g(x, t)| \leq C(1 + |t|^{p-1})$.

(H2) 当 $t \rightarrow 0$ 时 $\frac{g(x, t)}{t} \rightarrow 0$ 对 $x \in \mathbb{R}^3$ 一致成立.

(H3) 当 $|t| \rightarrow +\infty$ 时 $\frac{g(x, t)}{t^3} \rightarrow +\infty$ 对 $x \in \mathbb{R}^3$ 一致成立.

(H4) 设 $\mathcal{G}(x, t) = g(x, t)t - 4G(x, t)$, 则这里存在 $C > 0$ 和 $r_0 > 0$ 满足当 $|t| \geq r_0$ 时有 $\mathcal{G}(x, t) \geq -C|t|^2$.

研究系统(1) 的一个主要困难是嵌入 $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ 不紧. 为了克服这困难, 定义带权 Sobolev 空间

$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^3) \mid \int_{\mathbb{R}^3} V(x)u^2 dx < \infty \right\}$$

由于 V 是下方有界的, 因此存在常数 $m > 0$ 满足 $\tilde{V}(x) = V(x) + m > 1$. 定义

① 收稿日期: 2017-11-21
基金项目: 国家自然科学基金项目(11601046); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(SWU1709349); 重庆市基础与前沿研究计划项目(cstc2016jcyjA0262).
作者简介: 廖 坤(1984-), 女, 编辑, 主要从事泛函分析以及编辑学的研究.
通信作者: 李 麟, 副教授.

$$X = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^3) \mid \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{V}(x) u^2 dx < \infty \right\}$$

其上的内积和范数分别为

$$(u, v) = \int (\nabla u \cdot \nabla v + \tilde{V}(x) uv) dx$$

和

$$\|u\| = (u, u)_X^{\frac{1}{2}}$$

从文献[3]可知嵌入 $X \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ 是紧的.

由嵌入 $X \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ 的紧性和自伴紧算子的谱理论, 容易得到特征值问题

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda u \quad u \in E \quad (2)$$

拥有完整的一系列特征值 $-\infty < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots, \lambda_k \rightarrow +\infty$. 每个特征值 λ_k 根据其重数已经在序列中重复出现. 我们用 φ_k 表示 λ_k 的特征函数, $\|\varphi_k\|_2 = 1$. 本文的主要结果如下:

定理 1 假设(V), (H1)–(H4)成立. 如果 0 不是特征方程(1)的特征值, 则 Klein-Gordon-Maxwell 系统(1)至少有一个非平凡解.

注 1 与前面关于系统(1)的结果(例如文献[5–8])不同, 这里我们并没有对 V 加以正定性假设.

为了证明我们的结果, 下面的结论是必须的, 证明请见文献[4].

命题 1 对任何 $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, 这里存在唯一的 $\phi = \phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 满足方程

$$-\Delta \phi + u^2 \phi = -\omega u^2$$

更进一步, 映射 $\Phi: u \in H^1(\mathbb{R}^3) \mapsto \Phi[u] = \phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 是连续可微的并且满足:

(i) 在集合 $\{x \mid u(x) \neq 0\}$ 上有 $-\omega \leq \phi_u \leq 0$;

(ii) $\|\phi_u\|_{\mathcal{D}^{1,2}} \leq C \|u\|_{E^2}$ 且 $\int |\phi_u| u^2 \leq C \|u\|_{\frac{12}{5}}^{\frac{4}{5}} \leq C \|u\|_{\frac{4}{E}}^{\frac{4}{5}}$.

由命题 1, 系统(1)有如下能量泛函

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2 - \omega \phi_u u^2) dx - \int_{\mathbb{R}^3} G(x, u) dx \quad \forall u \in E$$

并且有

$$\langle \mathcal{J}'(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv - (2\omega + \phi_u)\phi_u uv - g(x, u)v) dx \quad \forall u, v \in E$$

对任何 $q \in [2, 6]$, 显然嵌入 $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^3)$ 是连续的, 因此存在常数 $\kappa_q > 0$ 满足

$$\|u\|_q \leq \kappa_q \|u\| \quad \forall u \in E \quad (3)$$

如果 $0 < \lambda_1$, 易得泛函 $\mathcal{J}$ 满足山路几何结构, 这种情况是简单的, 我们这里不考虑. 由定理 1 的条件可知 0 不是系统(1)的特征值, 因此我们不妨认为存在整数 $l \geq 1$ 满足 $0 \in (\lambda_l, \lambda_{l+1})$. 令

$$E^- = \text{span}\{\varphi_1, \cdots, \varphi_l\} \quad E^+ = (E^-)^\perp$$

则 E^- 和 E^+ 分别是二次型

$$Q(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx$$

的负空间和正空间. 显然

$$\dim E^- = l < \infty$$

更进一步, 这里存在常数 κ 满足

$$\pm Q(u) \geq \kappa \|u\|^2 \quad u \in E^\pm \quad (4)$$

如注记提到的那样, 我们要使用局部环绕去证明定理 1, 下面重新回顾其定义. 泛函 $\mathcal{J}$ 关于直和分解 $E = E^- \oplus E^+$ 在 0 点有一个局部环绕, 如果存在常数 $\rho > 0$ 满足

$$\begin{cases} \mathcal{J}(u) \leq 0 & u \in E^-, \|u\| \leq \rho \\ \mathcal{J}(u) \geq 0 & u \in E^+, \|u\| \leq \rho \end{cases} \quad (5)$$

定义两个有限维空间序列 $E_0^\pm \subset E_1^\pm \subset \cdots \subset E^\pm$ 满足 $E^\pm = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n^\pm$. 对多重指标 $\alpha = (\alpha^-, \alpha^+) \in \mathbb{N}^2$ 定义空间

$E_\alpha = E_{\alpha^-}^- \oplus E_{\alpha^+}^+$, 用 $\mathcal{J}_\alpha$ 表示泛函 $\mathcal{J}$ 在空间 E_α 上的限制泛函.

定义多重指标有如下的序关系:对任何 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$, 称 $\alpha \leq \beta$ 如果 $\alpha^\pm \leq \beta^\pm$. 而称序列 $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{N}^2$ 是相容的, 如果对任何 $\alpha \in \mathbb{N}^2$ 存在 $m \in \mathbb{N}$ 满足对任何 $n \geq m$ 都有 $\alpha \leq \alpha_n$. 显然如果 $\{\alpha_n\}$ 是相容的, 则其任何子列也是相容的.

定义 1 称泛函 $\Phi \in C^1(X)$ 满足 Palais-Smale 条件(简称为(PS) 条件), 如果当序列 $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{N}^2$ 是相容的, 任何序列 $\{u_n\} \subset E$ 如果满足

$$u_n \in E_{\alpha_n} \quad \sup_n \Phi(u_n) < \infty \quad \|\Phi'_{\alpha_n}(u_n)\|_{E_{\alpha_n}}^* \rightarrow 0 \quad (6)$$

则其含有一个子列收敛到 Φ 的一个临界点.

定理 2^[9] 假设泛函 $\Phi \in C^1(X)$ 在 0 点有一个局部环绕, 满足(PS) 条件, 并将有界集映为有界集, 且对每个 $m \in \mathbb{N}$ 都有

$$\Phi(u) \rightarrow -\infty \quad \|u\| \rightarrow \infty \quad u \in E^- \oplus E_m^+ \quad (7)$$

则 Φ 有一个非平凡临界点.

显然条件(H1) 和(H2) 暗示这里存在常数 $C_1 > 0$ 满足当 $|t| < r_0$ 时 $|g(x, t)| \leq C_1 |t|$ 和 $|G(x, t)| \leq \frac{C_1}{2} |t|^2$. 因此存在 $C_2 > 0$ 当 $|t| < r_0$ 时有

$$tg(x, t) - 4G(x, t) \geq -C_2 |t|^2$$

利用(H4), 我们可得

$$tg(x, t) - 4G(x, t) \geq -C_3 |t|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

令

$$f(x, t) = g(x, t) + mt$$

简单计算表明

$$F(x, t) = \int_0^t f(x, \tau) d\tau \leq \frac{t}{4} f(x, t) + \frac{\tilde{b}}{4} t^2, \quad \tilde{b} = C_3 + m > 0 \quad (8)$$

从(H3) 易得对 $x \in \mathbb{R}^3$, $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t^3} = +\infty$ 一致成立, 更进一步从(H2) 可知

$$\lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{f(x, t)t}{t^4} = \lim_{|t| \rightarrow 0} \left(\frac{t^2}{t^4} \cdot \frac{g(x, t)t + mt^2}{t^2} \right) = +\infty$$

因此存在 $\Delta > 0$ 满足对任何 $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ 有

$$f(x, t)t \geq -\Delta t^4 \quad (9)$$

借助于非线性项 f , 泛函 $\mathcal{J}: E \rightarrow \mathbb{R}$ 可改写为如下形式:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \omega \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(x, u) dx$$

引理 1 假设(V), (H1), (H3) 和(H4) 被满足, 则泛函 $\mathcal{J}$ 满足(PS) 条件.

证 设序列 $\{u_n\}$ 满足(6) 式. 其中 $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{N}^2$ 是相容的. 显然

$$\langle \mathcal{J}'_{\alpha_n}(u_n), u_n \rangle = \langle \mathcal{J}'(u_n), u_n \rangle$$

如果 $\|u_n\| \rightarrow \infty$, 则由 $u_n \in E_{\alpha_n}$, (6) 和(8) 式知, 对足够大的 n 有

$$\begin{aligned} 4 \cdot \sup_n \mathcal{J}(u_n) + \|u_n\| &\geq 4 \mathcal{J}(u_n) - \langle \mathcal{J}'_{\alpha_n}(u_n), u_n \rangle = \\ &= \|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} (f(x, u_n)u_n - 4F(x, u_n)) dx \geq \\ &= \|u_n\|^2 - \tilde{b} \int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 dx \end{aligned} \quad (10)$$

令

$$v_n = \|u_n\|^{-1} u_n$$

归于某个子列, 由紧嵌入 $X \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ 可推得 $v_n \rightarrow v$ 在 X 中, $v_n \rightarrow v$ 在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中, $v_n(x) \rightarrow v(x)$ a. e.

在 $\mathbb{R}^3$ 中. 在(10) 式两边同乘以 $\|u_n\|^{-2}$, 然后令 $n \rightarrow \infty$ 可得 $\tilde{b} \int_{\mathbb{R}^3} v^2 dx \geq 1$, 因此 $v \neq 0$.

由(9)和(3)式,我们有

$$\begin{aligned} \int_{v=0} \frac{f(x, u_n)u_n}{\|u_n\|^4} dx &= \int_{v=0} \frac{f(x, u_n)u_n}{u_n^4} v_n^4 dx \geq -\Lambda \int_{v=0} v_n^4 dx \geq \\ &-\Lambda \int_{\mathbb{R}^3} v_n^4 dx = -\Lambda \|v_n\|_4^4 \geq -\Lambda \kappa_4^4 > -\infty \end{aligned} \quad (11)$$

对 $x \in \{x \in \mathbb{R}^3 \mid v \neq 0\}$, 显然 $|u_n(x)| \rightarrow +\infty$, 据此可得

$$\frac{f(x, u_n(x))u_n(x)}{\|u_n\|^4} = \frac{f(x, u_n(x))u_n(x)}{u_n^4(x)} v_n^4(x) \rightarrow +\infty \quad (12)$$

因此, 由(9),(10)式和 Fatou 引理可知

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x, u_n)u_n}{\|u_n\|^4} dx \geq \int_{v \neq 0} \frac{f(x, u_n)u_n}{\|u_n\|^4} dx - \Lambda \kappa_4^4 \rightarrow +\infty \quad (13)$$

因为 $\{u_n\}$ 满足(6)式, 由(13)式, 对足够大的 n 有

$$\begin{aligned} C+1 &\geq \frac{1}{\|u_n\|^4} \left(\|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}^2 u_n^2 dx - \langle \mathcal{J}(u_n), u_n \rangle \right) = \\ &\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x, u_n)u_n}{\|u_n\|^4} dx \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

矛盾. 因此 $\{u_n\}$ 是空间 X 中的有界序列. 最后用文献[8]中的方法, 嵌入 $X \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ 的紧性, 以及 $X = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_{a_n}}$, 我们容易得到序列 $\{u_n\}$ 有一个子列收敛到 Φ 的一个临界点. 引理证毕.

引理 2 假设(V), (H1)和(H2)被满足, 则泛函 $\mathcal{J}$ 在 0 点相对于空间分解 $E = E^- \oplus E^+$ 有一个局部环绕.

证 由假设(H1)和(H2), 这里存在常数 $C > 0$ 满足

$$|G(x, u)| \leq \frac{\kappa}{2\kappa_2^2} |u|^2 + C\kappa |u|^p$$

对任何 $u \in E^-$, 由(3)式可推知

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) &= Q(u) - \int_{\mathbb{R}^3} \omega \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} G(x, u) dx \leq \\ &-\kappa \|u\|^2 + \frac{1}{4} \|u\|^4 + \frac{\kappa}{2\kappa_2^2} |u|_2^2 + C\kappa |u|_p^p \leq \\ &-\frac{\kappa}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{4} \|u\|^4 + C_1 \|u\|^p \end{aligned} \quad (14)$$

这里

$$C_1 = C\kappa\kappa_p^p$$

类似, 对任何 $u \in E^+$ 有

$$\mathcal{J}(u) \geq \frac{\kappa}{2} \|u\|^2 - C_1 \|u\|^p \quad (15)$$

因为 $p > 4$, 所需结果(5)可从(14)和(15)式得到. 引理证毕.

引理 3 设 Y 是 E 的一个有限维子空间, 则泛函 $\mathcal{J}$ 在空间 Y 上反强制, 即

$$\mathcal{J}(u) \rightarrow -\infty \quad \|u\| \rightarrow \infty, u \in E$$

证 如果结论不成立, 我们能选出序列 $\{u_n\} \subset Y$ 和常数 $\beta \in \mathbb{R}$ 满足

$$\|u_n\| \rightarrow \infty \quad \mathcal{J}(u_n) \geq \beta$$

令

$$v_n = \|u_n\|^{-1} u_n$$

由于 $\dim Y < \infty$, 归于某个子列, 对某个 $v \in Y$, $\|v\| = 1$ 有 $\|v_n - v\| \rightarrow 0$, $v_n(x) \rightarrow v(x)$ a. e. $\mathbb{R}^3$. 因为 $v \neq 0$, 类似于(13)式, 有

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^4} dx \rightarrow +\infty$$

由此可推知

$$\mathcal{J}(u_n) = \|u_n\|^4 \left(\frac{1}{2\|u_n\|^2} - \frac{1}{4\|u_n\|^4} \int_{\mathbb{R}^3} \omega \phi_u u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{F(u_n)}{\|u_n\|^4} dx \right) \rightarrow -\infty$$

矛盾. 引理证毕.

定理 1 的证明 我们将运用定理 2 证明泛函 $\mathcal{J}$ 有一个非平凡的临界点. 易得泛函 $\mathcal{J}$ 将有界集映射为有界集. 引理 1 和引理 2 可得泛函 $\mathcal{J}$ 满足 (PS) 条件并且在 0 点有一个局部环绕. 因此我们只需要验证 (7) 式成立, 而 $\dim(E^- \oplus E_m^+) < \infty$, 这只是引理 3 的一个推论而已. 证毕

参考文献:

[1] AZZOLLINI A, PISANI L, POMPONIO A. Improved Estimates and a Limit Case for the Electrostatic Klein-Gordon-Maxwell System [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect, 2011, 141(3): 449–463.

[2] AZZOLLINI A, POMPONIO A. Ground State Solutions for the Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell Equations [J]. Topol Methods Nonlinear Anal, 2012, 35(1): 33–42.

[3] BARTSCH T, WANG Z Q, WILLEM M. The Dirichlet Problem for Superlinear Elliptic Equations [J]. Stationary Partial Differential Equations, 2005(II): 1–55.

[4] BENCI V, FORTUNATO D. Solitary Waves of the Nonlinear Klein-Gordon Equation Coupled with the Maxwell Equations [J]. Rev Math Phys, 2002, 14(4): 409–420.

[5] CHEN S J, SONG S Z. Multiple Solutions for Nonhomogeneous Klein-Gordon-Maxwell Equations on $\mathbb{R}^3$ [J]. Nonlinear Anal Real World Appl, 2015, 22: 259–271.

[6] APRILE T D, MUGNAI D. Solitary Waves for Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell and Schrödinger-Maxwell Equations [J]. Proc Roy Soc Edinburgh, 2004, 134(5): 893–906.

[7] HE X. Multiplicity of Solutions for a Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell System [J]. Acta Appl Math, 2014, 130(1): 237–250.

[8] LI L, TANG C L. Infinitely Many Solutions for a Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell System [J]. Nonlinear Anal Theory Methods and Applications, 2014, 110(3): 157–169.

[9] LI S J, WILLEM M. Applications of Local linking to Critical Point Theory [J]. J Math Anal Appl, 1995, 189(1): 6–32.

The Existence of the Solitary Waves for the Superlinear Klein-Gordon-Maxwell System with the Sign-Changing Potential

LIAO Kun¹, DUAN Chun-sheng², LI Lin^{3,4}, CHEN Shang-jie^{3,4}

1. Journal Press of Southwest University, Chongqing 400715, China;
2. College of Computer Science, Civil Aviation Flight College of China, Guanghan Sichuan 618307, China;
3. School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;
4. Key Laboratory of Economic Society and Applied Statistics, Chongqing 400067, China

Abstract: The existence of the solitary waves for the superlinear Klein-Gordon-Maxwell system is considered in this paper. Because the equation is defined on $\mathbb{R}^3$ with a potential indefinite in sign, the variation energy functional does not satisfy the requirements of the mountain pass geometry. Using the local linking theorem, we obtain the existence of a nontrivial solution of it, thus improving and supplementing the existing results.

Key words: Klein-Gordon-Maxwell system; Sign-Changing Potential; local linking

