第 40 卷第 5 期 西南大学学报(自然科学版) 2018 年 5 月
Vol. 40 No. 5 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) May. 2018

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.05.015

一类两种群都染病的捕食—食饵模型分析[①]

范城玮， 刘贤宁

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：建立了一类两种群都染病的捕食—食饵模型，证明了解的正性和最终有界性；利用 Hurwitz 判据，得到了边界平衡点局部渐近稳定的充要条件并发现系统的正平衡点是不稳定的；通过构造适当的 Lyapunov 函数，给出了边界平衡点全局稳定的充分条件.

关 键 词：捕食—食饵模型；Hurwitz 判据；Lyapunov 函数；全局渐近稳定性

中图分类号：O175.13 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2018)05-0094-07

20 世纪 40 年代，Lotka 和 Volterra 奠定了种间竞争关系的理论基础，他们提出的种间竞争模型对现代生态学理论的发展有着重大影响. 同样的，Kermack 和 McKendrick 提出的的 SIR 模型为传染病动力学建模奠定了基础. 最近，关于疾病在种群间传播的研究成为了一个热点. 文献[1－3]研究了捕食者染病的捕食—食饵模型，文献[4－10]研究了食饵染病的捕食—食饵模型. 但是研究捕食者和食饵都染病的模型较少[11-15]：文献[11]研究了海洋生态系统中某种浮游植物和浮游动物均染病的捕食—食饵模型，其中捕食者捕食染病的食饵后不染病，但事实上捕食者捕食染病食饵后有可能染病[12]；文献[13]研究了只有染病食饵被捕食的捕食—食饵模型，但事实上易感的食饵也有可能被捕食[14]；文献[15]也考虑了捕食者与食饵均感染疾病的捕食—食饵模型，食饵染病后，捕食者有可能会因与染病食饵接触或在其邻近区域内活动而感染疾病，且捕食者之间不传播疾病. 另外，捕食者捕食染病食饵后也可能不直接染病，而在转化为自身增长的过程中染病，为了考虑这些因素的影响，我们作出以下假设：

1) 假设只有易感食饵服从 logistic 增长；染病食饵无繁殖能力但可利用资源，从而对易感食饵有抑制作用. 设环境容纳量为 1，内禀增长率为常数 r.

2) 假设疾病不会遗传，感染的种群不会恢复，也不会获得免疫.

3) 染病捕食者由于活动能力较弱，所以不能捕食食饵. 染病捕食者不能感染易感捕食者[12].

从而建立如下捕食 — 食饵模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S_x}{\mathrm{d}t}=rS_x(1-S_x-I_x)-\beta_1 S_x I_x-kS_xS_y \\ \dfrac{\mathrm{d}I_x}{\mathrm{d}t}=\beta_1 S_x I_x-kI_xS_y-d_0 I_x \\ \dfrac{\mathrm{d}S_y}{\mathrm{d}t}=\theta kS_xS_y+(\rho\theta-\beta_2)kI_xS_y-d_1 S_y \\ \dfrac{\mathrm{d}I_y}{\mathrm{d}t}=(\theta-\rho\theta+\beta_2)kI_xS_y-d_2 I_y \end{cases} \tag{1}$$

① 收稿日期：2017-08-06

基金项目：国家自然科学基金项目(11671327).

作者简介：范城玮(1992-)，男，硕士研究生，主要从事动力系统的研究.

通信作者：刘贤宁，教授，博士研究生导师.

其中：S_x, I_x, S_y, I_y 分别为易感食饵、染病食饵、易感捕食者、染病捕食者的数量；r 为易感食饵种群的内禀增长率，β_1 为易感食饵的染病率，k 为易感的捕食者捕获染病食饵的捕获率，θ 为转化系数，ρ 为捕食染病食饵后不染病的概率，β_2 为捕食者染病率，d_0 为染病食饵的死亡率，d_1 为易感捕食者的自然死亡率，d_2 为染病捕食者的因病死亡率. 假设系统(1) 的参数都为正，且 $0 < \rho < 1$.

引理 1 若 S_x, I_x, S_y, I_y 是系统(1) 满足初值条件 $S_x(0) > 0$，$I_x(0) > 0$，$S_y(0) > 0$，$I_y(0) > 0$ 的解，则它们具有正性且最终有界.

证 首先用反证法证明正性. 假设存在 $t_1 > 0$，使得 S_x, I_x, S_y, I_y 在区间$[0, t_1)$ 上大于零，且 $S_x(t_1), I_x(t_1), S_y(t_1), I_y(t_1)$ 至少有一个等于零.

若 $S_x(t_1) = 0$，由系统(1) 第一个方程，在$[0, t_1)$ 上有

$$S_x' \geqslant -S_x(rS_x + rI_x + \beta_1 I_x + kS_y)$$

由比较定理得，

$$0 = S_x(t_1) \geqslant S_x(0)\mathrm{e}^{-\int_0^{t_1}(rS_x(s)+rI_x(s)+\beta_1 I_x(s)+kS_y(s))\mathrm{d}s} > 0$$

与假设矛盾，所以

$$S_x(t_1) \neq 0$$

同理可得

$$I_x(t_1) \neq 0 \qquad S_y(t_1) \neq 0 \qquad I_y(t_1) \neq 0$$

所以系统(1) 满足初值条件 $S_x(0) > 0$，$I_x(0) > 0$，$S_y(0) > 0$，$I_y(0) > 0$ 的解都为正.

其次证明有界性. 令

$$U = \theta S_x + \theta I_x + S_y + I_y$$

则

$$\begin{aligned} U' = {} & \theta r S_x(1 - S_x - I_x) - \theta d_0 I_x - d_1 S_y - d_2 I_y = \\ & \theta r S_x(1 - S_x - I_x) + \theta r S_x - \theta r S_x - \theta d_0 I_x - d_1 S_y - d_2 I_y \end{aligned}$$

将系统(1) 的第一个和第二个方程相加，得到

$$S_x + I_x \leqslant rS_x(1 - S_x - I_x) \leqslant r(S_x + I_x)(1 - S_x - I_x)$$

由比较定理可得

$$\limsup_{t \to \infty}(S_x + I_x) \leqslant 1$$

所以对 $\forall \varepsilon > 0$，不妨取 $\varepsilon = 1$，$\exists t_2 > 0$，使得 $t > t_2$ 时，

$$S_x + I_x < 1 + \varepsilon = 2$$

令 $a = \min\{r, d_0, d_1, d_2\}$，则当 $t > t_2$ 时，

$$U' \leqslant 2\theta r S_x - aU \leqslant 4\theta r - aU$$

由比较定理得，

$$\limsup_{t \to \infty} U(t) \leqslant \frac{4\theta r}{a}$$

引理 1 得证.

1 平衡点分析

系统(1) 显然存在两个平衡点 $E_0 = (0, 0, 0, 0)$ 与 $E_1 = (1, 0, 0, 0)$.

当 $\beta_1 > d_0$ 时，存在边界平衡点 $E_2 = (S_{x2}, I_{x2}, 0, 0)$，其中 $S_{x2} = \dfrac{d_0}{\beta_1}$，$I_{x2} = \dfrac{r(\beta_1 - d_0)}{\beta_1(\beta_1 + r)}$.

当 $\theta k > d_1$ 时，存在边界平衡点 $E_3 = (S_{x3}, 0, S_{y3}, 0)$，其中 $S_{x3} = \dfrac{d_1}{\theta k}$，$S_{y3} = \dfrac{r(\theta k - d_1)}{\theta k^2}$.

假设$(S_x^*, I_x^*, S_y^*, I_y^*)$ 为系统(1) 的正平衡点，则有

$$\begin{cases} r(1-S_x^*-I_x^*)-\beta_1 I_x^*-kS_y^*=0 \\ \beta_1 S_x^*-kS_y^*-d_0=0 \\ \theta kS_x^*+(\rho\theta-\beta_2)kI_x^*-d_1=0 \\ (\theta-\rho\theta+\beta_2)kI_x^*S_y^*-d_2I_y^*=0 \end{cases}$$

解得

$$S_x^*=\frac{d_1(r+\beta_1)-k(r+d_0)(\rho\theta-\beta_2)}{k(r+\beta_1)(\theta-\rho\theta+\beta_2)} \qquad I_x^*=\frac{d_1-\theta kS_x^*}{k(\rho\theta-\beta_2)}$$

$$S_y^*=\frac{\beta_1 S_x^*-d_0}{k} \qquad I_y^*=\frac{(\theta-\rho\theta+\beta_2)kI_x^*S_y^*}{d_2}$$

所以当 $d_1(r+\beta_1)>k(r+d_0)(\rho\theta-\beta_2)$，$(d_1-\theta kS_x^*)(\rho\theta-\beta_2)>0$，$\beta_1 S_x^*>d_0$ 时，存在正平衡点 $E_4=(S_x^*,I_x^*,S_y^*,I_y^*)$.

2　局部稳定性分析

在这一节中，我们将讨论各个平衡点的局部稳定性. 易得系统(1)在平衡点(S_x,I_x,S_y,I_y)处线性化后所对应的的 Jacobian 矩阵为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} r-2rS_x-(r+\beta_1)I_x-kS_y & -(r+\beta_1)S_x & -kS_x & 0 \\ \beta_1 I_x & \beta_1 S_x-kS_y-d_0 & -kI_x & 0 \\ \theta kS_y & (\rho\theta-\beta_2)kS_y & \theta kS_x+(\rho\theta-\beta_2)kI_x-d_1 & 0 \\ 0 & (\theta-\rho\theta+\beta_2)kS_y & (\theta-\rho\theta+\beta_2)kI_x & -d_2 \end{pmatrix}$$

定理 1　平衡点 E_0 是鞍点.

证　系统(1) 在 E_0 处的 Jacobian 矩阵为

$$\boldsymbol{J}_{E_0}=\begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_2 \end{pmatrix}$$

显然 E_0 是鞍点. 证毕.

定理 2　若 $\beta_1<d_0$ 且 $\theta k<d_1$，则平衡点 E_1 局部渐近稳定，若 $\beta_1>d_0$ 或 $\theta k>d_1$，则平衡点 E_1 不稳定.

证　系统(1) 在 E_1 处的 Jacobian 矩阵为

$$\boldsymbol{J}_{E_1}=\begin{pmatrix} -r & -r-\beta_1 & -k & 0 \\ 0 & \beta_1-d_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta k-d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_2 \end{pmatrix}$$

其所对应的特征值为 $\lambda_1=-r$，$\lambda_2=\beta_1-d_0$，$\lambda_3=\theta k-d_1$，$\lambda_4=-d_2$，所以当 $\beta_1<d_0$ 且 $\theta k<d_1$ 时，平衡点 E_1 局部渐近稳定；当 $\beta_1>d_0$ 或 $\theta k>d_1$ 时，E_1 不稳定. 证毕.

定理 3　假设 $\beta_1>d_0$，若

$$\frac{\theta kd_0}{\beta_1}+\frac{kr(\beta_1-d_0)(\rho\theta-\beta_2)}{\beta_1(\beta_1+r)}<d_1$$

则平衡点 E_2 局部渐近稳定；若

$$\frac{\theta kd_0}{\beta_1}+\frac{kr(\beta_1-d_0)(\rho\theta-\beta_2)}{\beta_1(\beta_1+r)}>d_1$$

则平衡点 E_2 不稳定.

证　系统(1) 在 E_2 处的 Jacobian 矩阵为

$$\boldsymbol{J}_{E_2}=\begin{pmatrix} -rS_{x2} & -(r+\beta_1)S_{x2} & -kS_{x2} & 0 \\ \beta_1 I_{x2} & 0 & -kI_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & \theta kS_{x2}+(\rho\theta-\beta_2)kI_{x2}-d_1 & 0 \\ 0 & 0 & (\theta-\rho\theta+\beta_2)kI_{x2} & -d_2 \end{pmatrix}$$

其对应的特征方程为

$$(\lambda+d_2)[\lambda-\theta kS_{x2}-(\rho\theta-\beta_2)kI_{x2}+d_1][\lambda^2+rS_{x2}\lambda+\beta_1(r+\beta_1)S_{x2}I_{x2}]=0$$

显然

$$\lambda_1=-d_2$$

$$\lambda_2=\theta kS_{x2}+(\rho\theta-\beta_2)kI_{x2}-d_1=\frac{\theta kd_0}{\beta_1}+\frac{kr(\beta_1-d_0)(\rho\theta-\beta_2)}{\beta_1(\beta_1+r)}-d_1$$

为其特征值，且另外两个特征值λ_3,λ_4为方程$\lambda^2+rS_{x2}\lambda+\beta_1(r+\beta_1)S_{x2}I_{x2}=0$的两个根，易得$\lambda_3$,$\lambda_4$的实部小于0. 所以当

$$\frac{\theta kd_0}{\beta_1}+\frac{kr(\beta_1-d_0)(\rho\theta-\beta_2)}{\beta_1(\beta_1+r)}<d_1$$

时，平衡点E_2局部渐近稳定；当

$$\frac{\theta kd_0}{\beta_1}+\frac{kr(\beta_1-d_0)(\rho\theta-\beta_2)}{\beta_1(\beta_1+r)}>d_1 \text{ 时}$$

平衡点E_2不稳定.

定理 4 假设$\theta k>d_1$，若$\beta_1 d_1<\theta k\, d_0+r(\theta k-d_1)$，则平衡点$E_3$局部渐近稳定，若$\beta_1 d_1>\theta k\, d_0+r(\theta k-d_1)$，则平衡点$E_3$不稳定.

证 系统(1)在E_3处的Jacobian矩阵为

$$\boldsymbol{J}_{E_3}=\begin{pmatrix} -rS_{x3} & -(r+\beta_1)S_{x3} & -kS_{x3} & 0 \\ 0 & \beta_1 S_{x3}-kS_{y3}-d_0 & 0 & 0 \\ \theta kS_{y3} & (\rho\theta-\beta_2)kS_{y3} & 0 & 0 \\ 0 & (\theta-\rho\theta+\beta_2)kS_{y3} & 0 & -d_2 \end{pmatrix}$$

其对应的特征方程为

$$(\lambda+d_2)[\lambda-(\beta_1 S_{x3}-kS_{y3}-d_0)][\lambda^2+rS_{x3}\lambda+\theta k^2 S_{x3}S_{y3}]=0$$

显然有特征根

$$\lambda_1=-d_2$$

$$\lambda_2=\beta_1 S_{x3}-kS_{y3}-d_0=\frac{\beta_1 d_1-\theta k\, d_0-r(\theta k-d_1)}{\theta k}$$

另外两个特征值λ_3，λ_4为方程$\lambda^2+rS_{x3}\lambda+\theta k^2 S_{x3}S_{y3}=0$的两个根，显然$\lambda_3$，$\lambda_4$的实部小于0. 所以当$\beta_1 d_1<\theta k\, d_0+r(\theta k-d_1)$时，平衡点$E_3$局部渐近稳定；当$\beta_1 d_1>\theta k\, d_0+r(\theta k-d_1)$时，平衡点$E_3$不稳定. 证毕.

定理 5 平衡点E_4不稳定.

证 系统(1)在E_4处的Jacobian矩阵为

$$\boldsymbol{J}_{E_4}=\begin{pmatrix} -rS_x^* & -(r+\beta_1)S_x^* & -kS_x^* & 0 \\ \beta_1 I_x^* & 0 & -kI_x^* & 0 \\ \theta kS_y^* & (\rho\theta-\beta_2)kS_y^* & 0 & 0 \\ 0 & (\theta-\rho\theta+\beta_2)kS_y^* & (\theta-\rho\theta+\beta_2)kI_x^* & -d_2 \end{pmatrix}$$

其对应的特征方程为

$$(\lambda+d_2)\{\lambda^3+rS_x^*\lambda^2+[(\rho\theta-\beta_2)k^2S_y^*I_x^*+\beta_1(\beta_1+r)S_x^*I_x^*+\theta k^2S_x^*S_y^*]\lambda-$$
$$(r+\beta_1)[(1-\rho)\theta+\beta_2]k^2S_x^*I_x^*S_y^*\}=0$$

显然有特征根$\lambda_1=-d_2$. 另外3个根λ_2,λ_3,λ_4满足方程

$$\lambda^3 + rS_x^*\lambda^2 + [(\rho\theta-\beta_2)k^2S_y^*I_x^* + \beta_1(\beta_1+r)S_x^*I_x^* + \theta k^2S_x^*S_y^*]\lambda - (r+\beta_1)[(1-\rho)\theta+\beta_2]k^2S_x^*I_x^*S_y^* = 0$$

其常数项

$$-(r+\beta_1)[(1-\rho)\theta+\beta_2]k^2S_x^*I_x^*S_y^* < 0$$

从而根据 Hurwitz 判据[16] 可得，$\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 中至少有一个根的实部为正，所以平衡点 E_4 不稳定. 证毕.

3　全局稳定性分析

定理 6　若 $\beta_1 < d_0$ 且 $\theta k < d_1$，则平衡点 $E_1=(1,0,0,0)$ 全局渐近稳定.

证　构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = S_x - 1 - \ln S_x + \frac{r+\beta_1}{\beta_1}I_x + \frac{1}{\theta}S_y + \frac{\beta_1\theta(1-\rho)+\theta r+\beta_1\beta_2}{\beta_1\theta(\theta-\rho\theta+\beta_2)}I_y$$

将 $V(t)$ 沿着系统(1) 的轨线求导得

$$\dot V(t) = -r(S_x-1)^2 + (r+\beta_1)\left(1-\frac{d_0}{\beta_1}\right)I_x + k\left(1-\frac{d_1}{\theta k}\right)S_y - \frac{\beta_1\theta(1-\rho)+\theta r+\beta_1\beta_2}{\beta_1\theta(\theta-\rho\theta+\beta_2)}d_2I_y \leqslant 0$$

设

$$D_1 = \{(S_x, I_x, S_y, I_y) \mid \dot V(t)=0\}$$

易得 $\dot V(t)=0$ 当且仅当 $S_x=1$，$I_x=0$，$S_y=0$，$I_y=0$. 因此 D_1 的最大不变集为 $\{E_1\}$. 从而由 Lyapunov-LaSalle 不变原理[17] 可以得到：当 $\beta_1 < d_0$ 且 $\theta k < d_1$ 时，平衡点 E_1 全局渐近稳定. 证毕.

定理 7　假设 $\beta_1 > d_0$，当 $S_{x2} + \dfrac{(r+\beta_1)I_{x2}}{\beta_1} < \dfrac{d_1}{\theta k}$ 时，平衡点 $E_2=(S_{x2}, I_{x2}, 0, 0)$ 全局渐近稳定.

证　构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = S_x - S_{x2} - S_{x2}\ln\frac{S_x}{S_{x2}} + \frac{r+\beta_1}{\beta_1}\left(I_x - I_{x2} - I_{x2}\ln\frac{I_x}{I_{x2}}\right) + \frac{1}{\theta}S_y + \frac{\beta_1\theta(1-\rho)+\theta r+\beta_1\beta_2}{\beta_1\theta(\theta-\rho\theta+\beta_2)}I_y$$

将 $V(t)$ 沿着系统(1) 的轨线求导得

$$\begin{aligned}\dot V(t) = {}& \dot S_x + \frac{r+\beta_1}{\beta_1}\dot I_x + \frac{1}{\theta}\dot S_y + \frac{\beta_1\theta(1-\rho)+\theta r+\beta_1\beta_2}{\beta_1\theta(\theta-\rho\theta+\beta_2)}I_y - \frac{S_{x2}}{S_x}\dot S_x - \frac{r+\beta_1}{\beta_1}\frac{I_{x2}}{I_x}\dot I_x = \\ & rS_x - rS_x{}^2 - \frac{r+\beta_1}{\beta_1}d_0I_x - \frac{d_1}{\theta}S_y - \frac{\beta_1\theta(1-\rho)+\theta r+\beta_1\beta_2}{\beta_1\theta(\theta-\rho\theta+\beta_2)}d_2I_y - rS_{x2} + \\ & rS_{x2}S_x + (r+\beta_1)S_{x2}I_x + \\ & kS_{x2}S_y - (r+\beta_1)I_{x2}S_x + \frac{r+\beta_1}{\beta_1}kI_{x2}S_y + \frac{r+\beta_1}{\beta_1}d_0I_{x2}\end{aligned}$$

将 $r=rS_{x2}+(r+\beta_1)I_{x2}$，$d_0=\beta_1S_{x2}$ 代入整理得

$$\dot V(t) = -r(S_x-S_{x2})^2 + \left(S_{x2}+\frac{r+\beta_1}{\beta_1}I_{x2}-\frac{d_1}{\theta k}\right)kS_y - \frac{\beta_1\theta(1-\rho)+\theta r+\beta_1\beta_2}{\beta_1\theta(\theta-\rho\theta+\beta_2)}d_2I_y \leqslant 0$$

设

$$D_2 = \{(S_x, I_x, S_y, I_y) \mid \dot V(t)=0\}$$

易得 $\dot V(t)=0$ 当且仅当 $S_x=S_{x2}$，$S_y=0$，$I_y=0$. 因此 D_2 的最大不变集为$\{(S_x, I_x, S_y, I_y) \mid S_x=S_{x2}$，$I_x=I_{x2}$，$S_y=0$，$I_y=0\}$ 显然当 $S_{x2}+\dfrac{(r+\beta_1)I_{x2}}{\beta_1} < \dfrac{d_1}{\theta k}$ 时，有$\dfrac{\theta k d_0}{\beta_1} + \dfrac{kr(\beta_1-d_0)(\rho\theta-\beta_2)}{(\beta_1(\beta_1+r))} < d_1$，所以平衡点 E_2 局部渐近稳定. 从而由 Lyapunov-LaSalle 不变原理[17] 可以得到：当 $S_{x2}+\dfrac{(r+\beta_1)I_{x2}}{\beta_1} < \dfrac{d_1}{\theta k}$ 时，平衡点 E_2 全局渐近稳定. 证毕.

定理 8　假设 $\theta k > d_1$，当 $S_{x3} + \dfrac{(\beta_2-\rho\theta)kS_{y3}}{\theta(r+\beta_1)} < \dfrac{d_0}{\beta_1}$ 时，平衡点 $E_3=(S_{x3}, 0, S_{y3}, 0)$ 全局渐

近稳定.

证 构造 Lyapunov 函数 $V(t)$

$$V(t)=S_x-S_{x3}-S_{x3}\ln\frac{S_x}{S_{x3}}+\frac{r+\beta_1}{\beta_1}I_x+\frac{1}{\theta}\left(S_y-S_{y3}-S_{y3}\ln\frac{S_y}{S_{y3}}\right)+\frac{\beta_1\theta(1-\rho)+\theta r+\beta_1\beta_2}{\beta_1\theta(\theta-\rho\theta+\beta_2)}I_y$$

将 $V(t)$ 沿着系统(1) 的轨线求导得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)=&\dot{S}_x+\frac{r+\beta_1}{\beta_1}\dot{I}_x+\frac{1}{\theta}\dot{S}_y+\frac{\beta_1\theta(1-\rho)+\theta r+\beta_1\beta_2}{\beta_1\theta(\theta-\rho\theta+\beta_2)}\dot{I}_y-\frac{S_{x3}}{S_x}\dot{S}_x-\frac{1}{\theta}\frac{S_{y3}}{S_y}\dot{S}_y=\\&rS_x-rS_x{}^2-rS_{x3}+rS_{x3}S_x+(r+\beta_1)S_{x3}I_x+kS_{x3}S_y-kS_{y3}S_x-\frac{\rho\theta-\beta_2}{\theta}kS_{y3}I_x+\frac{d_1}{\theta}S_{y3}-\\&\frac{r+\beta_1}{\beta_1}d_0I_x-\frac{d_1}{\theta}S_y-\frac{\beta_1\theta(1-\rho)+\theta r+\beta_1\beta_2}{\beta_1\theta(\theta-\rho\theta+\beta_2)}d_2I_y\end{aligned}$$

将 $r=rS_{x3}+kS_{y3}$, $d_1=\theta kS_{x3}$ 代入整理得

$$\dot{V}(t)=-r(S_x-S_{x3})^2+(r+\beta_1)\left[S_{x3}+\frac{\beta_2-\rho\theta}{\theta(r+\beta_1)}kS_{y3}-\frac{d_0}{\beta_1}\right]I_x-\frac{\beta_1\theta(1-\rho)+\theta r+\beta_1\beta_2}{\beta_1\theta(\theta-\rho\theta+\beta_2)}d_2I_y$$

$$D_3=\{(S_x,I_x,S_y,I_y)\mid\dot{V}(t)=0\}$$

易得 $\dot{V}(t)=0$ 当且仅当 $S_x=S_{x3}$, $I_x=0$, $I_y=0$. 因此 D_3 的最大不变集为$\{(S_x,I_x,S_y,I_y)\mid S_x=S_{x3}, I_x=0, S_y=S_{y3}, I_y=0\}$. 显然当 $S_{x3}+\frac{(\beta_2-\rho\theta)kS_{y3}}{\theta(r+\beta_1)}<\frac{d_0}{\beta_1}$ 时,有 $\beta_1d_1<\theta k\,d_0+r(\theta k-d_1)$,所以平衡点 E_3 局部渐近稳定. 从而由 Lyapunov-LaSalle 不变原理[17] 可以得到:当 $S_{x3}+\frac{(\beta_2-\rho\theta)kS_{y3}}{\theta(r+\beta_1)}<\frac{d_0}{\beta_1}$ 时,平衡点 E_3 全局渐近稳定. 证毕.

4 结 论

本文建立了一类捕食者与食饵都染病的捕食—食饵模型. 通过对模型(1) 的分析,我们得到当$\beta_1>d_0$ 且 $S_{x2}+\frac{(r+\beta_1)I_{x2}}{\beta_1}<\frac{d_1}{\theta k}$ 时,平衡点 E_2 全局渐近稳定,即捕食者全部灭绝;当 $\theta k>d_1$ 且 $S_{x3}+\frac{(\beta_2-\rho\theta)kS_{y3}}{\theta(r+\beta_1)}<\frac{d_0}{\beta_1}$ 时,平衡点 E_3 全局渐近稳定,即染病食饵和染病捕食者全部灭绝. 在分析中,我们发现正平衡点 E_4 一直是不稳定的. 且平衡点 E_2,E_3 稳定的条件也不一定是互斥的,从而 E_2,E_3 都稳定的双稳定情形有可能发生. 当$\beta_1>d_0$,$\theta k>d_1$ 且 $\theta kd_0+\frac{kr(\beta_1-d_0)(\rho\theta-\beta_2)}{\beta_1+r}<\beta_1d_1<\theta kd_0+r(\theta k-d_1)$ 时,平衡点E_2,E_3 双稳定. 另外,当E_2,E_3 都不稳定时,系统的行为可能比较复杂,周期解或极限环情形有可能发生,这些值得我们进一步的研究. 本文也只找到了平衡点 E_2,E_3 全局渐近稳定的充分条件,今后我们还可以进一步寻求平衡点 E_2,E_3 全局渐近稳定的充要条件.

参考文献:

[1] PAL P J, HAQUE M, MANDAL P K. Dynamics of a Predator-Prey Model with Disease in the Predator [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2015, 37(16): 2429-2450.

[2] HAQUE M. A Predator-Prey Model with Disease in the Predator Species Only [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2010, 11(4): 2224-2236.

[3] 杨秀香. 具有双线性传染率的捕食-食饵种群传染病模型分析 [J]. 渭南师范学院学报, 2017, 32(4): 5-10.

[4] XIAO Y N, CHEN L S. Modeling and Analysis of a Predator-Prey Model with Disease in the Prey [J]. Mathematical Biosciences, 2001, 171(1): 59-82.

[5] GREENHALGH D, HAQUE M. A Predator-Prey Model with Disease in the Prey Species Only [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2010, 30(8): 911-929.

[6] RAHMAN M S，CHAKRAVARTY S. A Predator-Prey Model with Disease in Prey [J]. Nonlinear Analysis Modelling and Control，2013，2(2)：191－209.

[7] JI C Y，JIANG D Q. Analysis of a Predator-Prey Model with Disease in the Prey [J]. International Journal of Biomathematics，2013，06(03)：1－21.

[8] MAJEED A A，SHAWKA I I. The Dynamics of an Eco-Epidemiological Model with (SI)，(SIS) Epidemic Disease in Prey [J]. General Mathematics Notes，2016，34(2)：52－74.

[9] 刘俊利，贾　滢，张太雷. 仅食饵有病的生态传染病模型的全局性态分析 [J]. 合肥工业大学学报(自然科学版)，2017，40(6)：860－864.

[10] 傅金波，陈兰荪. 食饵有病的生态-流行病模型的稳定性分析 [J]. 华侨大学学报(自然科学版)，2017，38(2)：266－270.

[11] DAS K P，KUNDU K，CHATTOPADHYAY J. A Predator-Prey Mathematical Model with both the Populations Affected by Diseases [J]. Ecological Complexity，2011，8(1)：68－80.

[12] HADELER K P，FREEDMAN H I. Predator-Prey Populations with Parasitic Infection [J]. Journal of Mathematical Biology，1989，27(6)：609－631.

[13] 李　庆，李有文. 捕食者与食饵都染病的捕食-被捕食模型分析 [J]. 数学的实践与认识，2009，39(9)：150－155.

[14] 李　爽，王小攀. 食饵和捕食者均染病的捕食-被捕食模型的分析 [J]. 河南师范大学学报(自然科学版)，2016(2)：1－8.

[15] HSIEH Y H，HSIAO C K. Predator-Prey Model with Disease Infection in both Populations [J]. Mathematical Medicine & Biology A Journal of the Ima，2008，25(3)：247.

[16] 马知恩，周义仓，王稳地，等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京：科学出版社，2004.

[17] HALE J K，VERDUYN LUNEL S M. Introduction to Functional Differential Equations [M]. Berlin：Springer Science & Business Media，2013.

A Predator-Prey Mathematical Model with Both the Populations Affected by Diseases

FAN Cheng-wei，　LIU Xian-ning

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，a predator-prey mathematical model with both the populations affected by diseases is proposed. The positivity and ultimate boundedness of the solution is proved. The necessary and sufficient conditions for the locally asymptotic stability of the boundary equilibrium are established by using Hurwitz criterion. And the positive equilibrium point is proved to be always unstable. The sufficient conditions for the globally asymptotic stability of the boundary equilibrium are given by constructing some reasonable Lyapunov functions.

Key words：prey-predator model；Hurwitz criterion；Lyapunov function；globally asymptotic stability

责任编辑　张　枸