

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.05.016

考虑疫苗时效及潜伏期的乙肝传染病模型分析^①

乔 杰, 刘贤宁

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 建立了一个考虑疫苗时效性和乙肝潜伏期的乙肝传染病模型. 首先, 讨论了平衡点的存在性; 然后, 计算了基本再生数 R_0 , 得到系统总存在一个无病平衡点, 且当 $R_0 > 1$ 时, 存在唯一正平衡点; 最后通过构造 Lyapunov 泛函, 证明了无病平衡点的全局稳定性和正平衡点的全局稳定性.

关键词: 疫苗时效; Lyapunov 函数; 基本再生数; 稳定性

中图分类号: O175.13 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9868(2018)05-0101-06

乙肝是由乙型肝炎病毒引起的一种专门破坏肝细胞的传染病, 也是最难治愈的疾病之一. 目前, 疫苗接种是预防乙肝病毒传染的最有效措施之一, 已有学者通过建立 SVIR 数学模型研究了疫苗对疾病控制的影响^[1-6]. 正常的乙肝疫苗接种通常需要 3 次才能达到免疫效果, 免疫保护时间可以长达 12 年, 但是 3 次接种时间间隔较长, 所以存在只接种一次或者两次的情况, 并且医学研究表明乙肝疫苗注射免疫成功率为 90% 以上, 由此说明乙肝疫苗也是存在时间效果的, 漏种以及非 100% 的免疫效果都有可能使接种者在后期具有一定的感染可能. 此外, 乙肝还有 6 周至 6 个月的潜伏期, 部分注射疫苗的个体, 潜伏期甚至更长, 因此潜伏期对乙肝病毒传播有重要的影响, 已有学者通过数学建模研究了潜伏期的影响^[5-6].

为了研究疫苗时效性以及乙肝潜伏期对乙肝传播控制的影响, 我们将总人口分为: 易感者 S 、接种者 V (V 分为两类 V_1, V_2 , 其中 V_1 为刚接种者且具有完全免疫力, V_2 具有部分免疫力)、潜伏者 E (携带病毒, 但是不显现患病特征且无传染性)、感染者 I 、恢复者 R . 假设对新生儿接种疫苗^[6], 且疫苗免疫效力随着时间而逐渐减弱, 从而接种者 V_1 会随时间转变为 V_2 , V_2 能以相对较小的感染率染病. 目前为止乙肝患者大都接受治疗, 因病死亡率比较低^[8], 所以本文不考虑因病死亡. 假设总人口为常数 A , 且出生率等于死亡率 μ , 建立如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu A(1 - \eta) - \beta SI - \mu S \\ \frac{dV_1}{dt} = \mu A\eta - \epsilon V_1 - \mu V_1 \\ \frac{dV_2}{dt} = \epsilon V_1 - \theta \beta V_2 I - \mu V_2 \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI + \theta \beta V_2 I - (\mu + \sigma)E \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - (r + \mu)I \\ \frac{dR}{dt} = rI - \mu R \end{cases} \quad (1)$$

① 收稿日期: 2017-07-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(11671327).

作者简介: 乔 杰(1992-), 男, 硕士研究生, 主要从事动力系统的研究.

通信作者: 刘贤宁, 教授, 博士研究生导师.

其中: η 是我们对新生儿的疫苗接种率($0 < \eta < 1$); β 是线性感染率(有效接触率); ϵ 是接种者 V_1 转变成 V_2 的速率; θ 反映了接种者 V_2 免疫的有效性($0 < \theta < 1$); σ 是由潜伏者转为疾病患者的速率; r 是恢复率.

由于系统(1)的前 5 个方程与最后一个方程无关, 所以我们只需要研究以下模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu A(1 - \eta) - \beta SI - \mu S \\ \frac{dV_1}{dt} = \mu A\eta - \epsilon V_1 - \mu V_1 \\ \frac{dV_2}{dt} = \epsilon V_1 - \theta \beta V_2 I - \mu V_2 \\ \frac{dE}{dt} = \beta SI + \theta \beta V_2 I - (\mu + \sigma)E \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - (r + \mu)I \end{cases} \quad (2)$$

引理 1 在初始条件 $S(0) > 0, V_1(0) > 0, V_2(0) > 0, E(0) \geq 0, I(0) \geq 0$ 的情况下, 系统(2)的解始终非负, 并且最终有界.

证 反证法 若存在最小时间 $t_1 > 0$, 使得 $S(t_1) = 0$, 代入系统(2)的第一个方程得到

$$\dot{S}(t_1) = \mu A(1 - \eta) > 0$$

则存在充分小 $\epsilon > 0$ 使在区间 $(t_1 - \epsilon, t_1)$ 上有 $S(t) < 0$, 与 $S(t)$ 在区间 $(0, t_1)$ 上大于 0 矛盾, 类似可以证明对所有 $t > 0$, 有 $V_1 > 0, V_2 > 0$. 接下来证明对 $t > 0$, 有 $E(t) \geq 0, I(t) \geq 0$, 分 3 种情况:

(i) 若 $E(0) = I(0) = 0$, 显然 $t > 0$ 时, 仍然有 $E(t) = I(t) = 0$.

(ii) 若 $E(0) > 0, I(0) > 0$, 假设存在最小时间 $t_2 > 0$, 使得 $E(t_2) = 0$ 或者 $I(t_2) = 0$. 如果 $E(t_2) = I(t_2) = 0$, 则由系统(2)的第 4 个方程

$$E(t_2) = [E(0) + \int_0^{t_2} (\beta S(\tau)I(\tau) + \theta \beta V_2(\tau)I(\tau))e^{\int_0^\tau (\mu+\sigma) d\varphi} d\tau]e^{\int_0^{t_2} (-\mu-\sigma) d\varphi} > 0$$

得出矛盾, 所以 $E(t_2) = I(t_2) = 0$ 不成立. 不妨假设 $E(t_2) > 0$ 且 $I(t_2) = 0$, 此时由系统(2)第 5 个方程得到

$$\dot{I}(t_2) = \sigma E(t_2) > 0$$

所以存在 t_2 的左邻域 $(t_2 - \delta, t_2)$, 使得 $I(t) < 0, t \in (t_2 - \delta, t_2)$, 矛盾, 故假设不成立. 同理 $E(t_2) = 0, I(t_2) > 0$ 情况也不成立.

(iii) 若 $E(0), I(0)$ 中有一个大于 0, 另一个等于 0. 不妨设 $E(0) = 0, I(0) > 0$, 由系统(2)第 4 个方程得

$$\dot{E}(0) = (\beta S(0) + \theta \beta V_2(0))I(0) > 0$$

所以存在 0 的邻域 $(0, \delta_1)$ 使得 $E(t) > 0, I(t) > 0$ 在 $(0, \delta_1)$ 成立, 不妨取 $t_3 \in (0, \delta_1)$, 则 $E(t_3) > 0, I(t_3) > 0$, 沿用 (ii) 的方法可知 $E(t) > 0, I(t) > 0$ 在 $t > t_3$ 时成立. 同样方法也可以证明当 $E(0) > 0, I(0) = 0$ 时, 结论也成立. 综上所述, 系统(2)的解始终非负.

令

$$L(t) = S(t) + V_1(t) + V_2(t) + E(t) + I(t)$$

得到

$$\begin{aligned} \frac{dL(t)}{dt} &= \frac{d(S + V_1 + V_2 + E + I)}{dt} = \mu A - \mu(S + V_1 + V_2 + E + I) - rI \leq \\ &\mu A - \mu(S + V_1 + V_2 + E + I) = \\ &\mu A - \mu L(t) \end{aligned}$$

所以对任意充分小的 $\epsilon > 0$, 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (S + V_1 + V_2 + E + I) \leq A + \epsilon$$

引理得证.

设集合 $\Omega = \{(S, V_1, V_2, E, I) \in \mathbb{R}_+^5: 0 \leq S + V_1 + V_2 + E + I \leq A, S > 0, V_1 > 0, V_2 > 0, E \geq 0, I \geq 0\}$. 为系统(2) 的一个正不变集, 本文将在 Ω 上考虑系统(2) 的动力学性质.

1 平衡点的存在性

首先, 易得系统存在唯一无病平衡点 $E_0(S_0, V_{10}, V_{20}, 0, 0)$:

$$S_0 = A(1 - \eta) \quad V_{10} = \frac{\mu A \eta}{\mu + \epsilon} \quad V_{20} = \frac{\epsilon A \eta}{\mu + \epsilon}$$

在无病平衡点 E_0 处通过下一代矩阵法^[9], 得到系统的基本再生数:

$$R_0 = \frac{\sigma(\beta S_0 + \theta \beta V_{20})}{(r + \mu)(\mu + \sigma)} = \frac{\sigma \beta A(1 - \eta)(\mu + \epsilon) + \sigma \theta \beta \epsilon A \eta}{(r + \mu)(\mu + \sigma)(\mu + \epsilon)}$$

接下来, 求解系统(2) 的正平衡点, 显然系统(2) 的正平衡点满足:

$$\begin{aligned} \mu A(1 - \eta) - \beta SI - \mu S &= 0 \\ \mu A \eta - \epsilon V_1 - \mu V_1 &= 0 \\ \epsilon V_1 - \theta \beta V_2 I - \mu V_2 &= 0 \\ \beta SI + \theta \beta V_2 I - (\mu + \sigma)E &= 0 \\ \sigma E - (r + \mu)I &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

由方程(3) 的前 4 个方程可以得到

$$\begin{aligned} S &= \frac{\mu A(1 - \eta)}{\beta I + \mu} \quad V_1 = \frac{\mu A \eta}{\mu + \epsilon} \quad V_2 = \frac{\epsilon V_1}{\theta \beta I + \mu} = \frac{\epsilon \mu A \eta}{(\theta \beta I + \mu)(\mu + \epsilon)} \\ E &= \frac{\beta SI + \theta \beta V_2 I}{\mu + \sigma} = \frac{\mu \beta I A(1 - \eta)(\theta \beta I + \mu)(\mu + \epsilon) + \epsilon \mu A \eta \theta \beta I(\beta I + \mu)}{(\theta \beta I + \mu)(\beta I + \mu)(\mu + \epsilon)(\mu + \sigma)} \end{aligned} \quad (4)$$

将(4) 式代入(3) 的第 5 个方程, 得到

$$f(I) \equiv a_1 I^2 + a_2 I + a_3$$

其中:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\theta \beta^2 (r + \mu)(\mu + \epsilon)(\mu + \sigma) < 0 \\ a_2 &= \theta \beta^2 \sigma \mu A(1 - \eta)(\mu + \epsilon) + \theta \beta^2 \sigma \epsilon \mu A \eta - (r + \mu)(\mu + \epsilon)(\mu + \sigma)(\theta \beta \mu + \beta \mu) \\ a_3 &= \sigma \mu^2 A(1 - \eta)\beta(\mu + \epsilon) + \sigma \epsilon \mu^2 A \eta \theta \beta - (r + \mu)(\mu + \epsilon)(\mu + \sigma)\mu^2 = \\ &\quad \mu^2(\mu + \sigma)(\mu + \epsilon)(r + \mu)(R_0 - 1) \end{aligned}$$

关于 $f(I)$, 我们有

$$\begin{aligned} f(0) &= a_3 = \mu^2(\mu + \sigma)(\mu + \epsilon)(r + \mu)(R_0 - 1) \\ f(A) &= a_1 A^2 + a_2 A + a_3 = \\ &\quad -\theta \beta^2 (r + \mu)(\mu + \epsilon)(\mu + \sigma)A^2 + \\ &\quad \theta \beta^2 \sigma \mu (1 - \eta)(\mu + \epsilon)A^2 + \theta \beta^2 \sigma \epsilon \mu \eta A^2 - \\ &\quad (r + \mu)(\mu + \epsilon)(\mu + \sigma)(\theta \beta \mu + \beta \mu)A + \sigma \mu^2 (1 - \eta)\beta(\mu + \epsilon)A + \sigma \epsilon \mu^2 \eta \theta \beta A - \\ &\quad (r + \mu)(\mu + \epsilon)(\mu + \sigma)\mu^2 \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} -\theta \beta^2 (r + \mu)(\mu + \epsilon)(\mu + \sigma)A^2 + \theta \beta^2 \sigma \mu (1 - \eta)(\mu + \epsilon)A^2 + \theta \beta^2 \sigma \epsilon \mu \eta A^2 &< 0 \\ -(r + \mu)(\mu + \epsilon)(\mu + \sigma)(\theta \beta \mu + \beta \mu)A + \sigma \mu^2 (1 - \eta)\beta(\mu + \epsilon)A + \sigma \epsilon \mu^2 \eta \theta \beta A &< 0 \end{aligned}$$

所以 $f(A) < 0$. 因为当 $R_0 > 1$ 时 $f(0) > 0$, 此时 $f(I) = 0$ 在区间 $(0, A)$ 上必然存在唯一正根 I^* .

定理 1 系统(2) 总存在一个无病平衡点 $E_0(S_0, V_{10}, V_{20}, 0, 0)$; 当 $R_0 > 1$ 时, 系统还存在唯一正平衡点 $E_*(S^*, V_1^*, V_2^*, E^*, I^*)$, 其中:

$$S^* = \frac{\mu A(1 - \eta)}{\beta I^* + \mu} \quad V_1^* = \frac{\mu A \eta}{\mu + \epsilon} \quad V_2^* = \frac{\epsilon \mu A \eta}{(\theta \beta I^* + \mu)(\mu + \epsilon)}$$

$$E^* = \frac{\mu\beta I^* A(1-\eta)(\theta\beta I^* + \mu)(\mu + \epsilon) + \epsilon\mu A\eta\theta\beta I^*(\beta I^* + \mu)}{(\theta\beta I^* + \mu)(\beta I^* + \mu)(\mu + \epsilon)(\mu + \sigma)}$$

I^* 是方程 $f(I) = 0$ 在区间 $(0, A)$ 上的唯一正根.

2 平衡点的稳定性

定理 2 当 $R_0 < 1$ 时, 系统(2) 的无病平衡点 $E_0(S_0, V_{10}, V_{20}, 0, 0)$ 局部渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(2) 的无病平衡点 E_0 不稳定, 但是系统的正平衡点 $E^*(S^*, V_1^*, V_2^*, E^*, I^*)$ 局部渐近稳定.

证 使用 Jacobian 矩阵以及 Hurwitz 判据^[10] 可证.

定理 3 当 $R_0 < 1$ 时, 系统(2) 的无病平衡点 $E_0(S_0, V_{10}, V_{20}, 0, 0)$ 全局渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(2) 的正平衡点 $E^*(S^*, V_1^*, V_2^*, E^*, I^*)$ 全局渐近稳定.

证 当 $R_0 < 1$ 时, 定义 Lyapunov 函数

$$L_0 = \left(S - S_0 - S_0 \ln \frac{S}{S_0} \right) + \frac{\epsilon}{\mu + \epsilon} \left(V_1 - V_{10} - V_{10} \ln \frac{V_1}{V_{10}} \right) + \left(V_2 - V_{20} - V_{20} \ln \frac{V_2}{V_{20}} \right) + E + \frac{\mu + \sigma}{\sigma} I$$

沿着系统(2) 的轨线求导, 得:

$$\begin{aligned} \dot{L}_0 = & \mu A(1-\eta) - \beta S(t)I(t) - \mu S(t) - \frac{S_0}{S(t)} [\mu A(1-\eta) - \beta S(t)I(t) - \mu S(t)] + \\ & \frac{\epsilon}{\mu + \epsilon} [\mu A\eta - \mu V_1(t) - \epsilon V_1(t)] - \frac{\epsilon}{\mu + \epsilon} \frac{V_{10}}{V_1(t)} [\mu A\eta - \mu V_1(t) - \epsilon V_1(t)] + \\ & \epsilon V_1(t) - \theta\beta V_2(t)I(t) - \mu V_2(t) - \frac{V_{20}}{V_2(t)} [\epsilon V_1(t) - \theta\beta V_2(t)I(t) - \mu V_2(t)] + \\ & \beta S(t)I(t) + \theta\beta V_2(t)I(t) - \frac{(r+\mu)(\mu+\sigma)}{\sigma} I(t) \end{aligned}$$

将 $\mu A(1-\eta) = \mu S_0$, $\mu A\eta = (\mu + \epsilon)V_{10}$, $\epsilon V_{10} = \mu V_{20}$ 代入整理得:

$$\begin{aligned} \dot{L}_0 = & \mu S_0 - \mu S(t) - \mu S_0 \frac{S_0}{S(t)} + \mu S_0 + \epsilon V_{10} - \epsilon V_1(t) - \epsilon V_{10} \frac{V_{10}}{V_1(t)} + \epsilon V_{10} + \epsilon V_1(t) - \\ & \mu V_2(t) - \epsilon V_1(t) \frac{V_{20}}{V_2(t)} + \mu V_{20} + \beta S_0 I(t) + \theta\beta V_{20} I(t) - \frac{(r+\mu)(\mu+\sigma)}{\sigma} I(t) = \\ & \mu S_0 \left(2 - \frac{S(t)}{S_0} - \frac{S_0}{S(t)} \right) + \mu V_{20} \left(3 - \frac{V_{10}}{V_1(t)} - \frac{V_2(t)}{V_{20}} - \frac{\epsilon V_1(t)}{\mu V_2(t)} \right) + \frac{(r+\mu)(\mu+\sigma)}{\sigma} I(t) (R_0 - 1) \end{aligned}$$

从而当 $R_0 < 1$ 时, $\dot{L}_0 \leq 0$. 设 $D_0 = \{(S, V_1, V_2, E, I) \mid \dot{L}_0 = 0\}$, 易得 D_0 的最大不变集为 $\{(S_0, V_{10}, V_{20}, 0, 0)\}$. 由 Lyapunov-LaSalle 不变原理^[11] 知: 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E_0 全局渐近稳定.

现在证明系统(2) 的正平衡点 E^* 的全局渐近稳定性, 当 $R_0 > 1$ 时, 定义 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned} L_1 = & \left(S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} \right) + \frac{\epsilon}{\mu + \epsilon} \left(V_1 - V_1^* - V_1^* \ln \frac{V_1}{V_1^*} \right) + \left(V_2 - V_2^* - V_2^* \ln \frac{V_2}{V_2^*} \right) + \\ & \left(E - E^* - E^* \ln \frac{E}{E^*} \right) + \frac{\mu + \sigma}{\sigma} \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right) \end{aligned}$$

沿着系统(2) 轨线求导, 得:

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 = & \mu A(1-\eta) - \mu S(t) - \frac{S^*}{S(t)} [\mu A(1-\eta) - \beta S(t)I(t) - \mu S(t)] + \frac{\epsilon}{\mu + \epsilon} [\mu A\eta - (\mu + \epsilon)V_1(t)] - \\ & \frac{\epsilon}{\mu + \epsilon} \frac{V_1^*}{V_1(t)} [\mu A\eta - (\mu + \epsilon)V_1(t)] + \epsilon V_1(t) - \mu V_2(t) - \\ & \frac{V_2^*}{V_2(t)} [\epsilon V_1(t) - \theta\beta V_2(t)I(t) - \mu V_2(t)] - \\ & \frac{E^*}{E(t)} [\beta S(t)I(t) + \theta\beta V_2(t)I(t) - (\mu + \sigma)E] - \frac{(r+\mu)(\mu+\sigma)}{\sigma} I(t) - \end{aligned}$$

$$\frac{\mu + \sigma}{\sigma} \frac{I^*}{I(t)} [\sigma E(t) - (r + \mu) I(t)]$$

因为

$$\begin{aligned} \mu A(1 - \eta) &= \beta S^* I^* + \mu S^* & \mu A \eta &= (\mu + \epsilon) V_1^* \\ \epsilon V_1^* &= \theta \beta V_2^* I^* + \mu V_2^* & \beta S^* I^* + \theta \beta V_2^* I^* &= (\mu + \sigma) E^* & \sigma E^* &= (r + \mu) I^* \end{aligned}$$

将其代入整理

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= \beta S^* I^* + 2\mu S^* - \mu S(t) - \beta S^* I^* \frac{S^*}{S(t)} - \mu S^* \frac{S^*}{S(t)} + \beta S^* I(t) + 2\epsilon V_1^* - \epsilon V_1^* \frac{V_1^*}{V_1(t)} - \mu V_2(t) - \\ &\epsilon V_1(t) \frac{V_2^*}{V_2(t)} + \theta \beta V_2^* I(t) + \mu V_2^* + \frac{V_1(t)V_2^*}{V_1^* V_2(t)} (\epsilon V_1^* - \theta \beta V_2^* I^* - \mu V_2^*) - \beta S(t) I(t) \frac{E^*}{E(t)} - \\ &\theta \beta V_2(t) I(t) \frac{E^*}{E(t)} + (\mu + \sigma) E^* - \frac{(r + \mu)(\mu + \sigma)}{\sigma} I(t) - (\mu + \sigma) E(t) \frac{I^*}{I(t)} + \frac{(r + \mu)(\mu + \sigma)}{\sigma} I^* = \\ &\mu S^* \left(2 - \frac{S^*}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^*} \right) + \beta S^* I^* - \beta S^* I^* \frac{S^*}{S(t)} + \\ &\beta S^* I(t) + 2(\theta \beta V_2^* I^* + \mu V_2^*) - \frac{V_1^*}{V_1(t)} (\theta \beta V_2^* I^* + \mu V_2^*) - \\ &\mu V_2(t) - \epsilon V_1(t) \frac{V_2^*}{V_2(t)} + \theta \beta V_2^* I(t) + \mu V_2^* + \\ &\frac{V_1(t)V_2^*}{V_1^* V_2(t)} (\epsilon V_1^* - \theta \beta V_2^* I^* - \mu V_2^*) - \beta S(t) I(t) \frac{E^*}{E(t)} - \\ &\theta \beta V_2(t) I(t) \frac{E^*}{E(t)} + 2(\mu + \sigma) E^* - (\mu + \sigma) \frac{E^*}{I^*} I(t) - \frac{E(t)I^*}{E^* I(t)} (\beta S^* I^* + \theta \beta V_2^* I^*) = \\ &\mu S^* \left(2 - \frac{S^*}{S(t)} - \frac{S(t)}{S^*} \right) + \mu V_2^* \left(3 - \frac{V_1^*}{V_1(t)} - \frac{V_2(t)}{V_2^*} - \frac{V_1(t)V_2^*}{V_1^* V_2(t)} \right) + \\ &\beta S^* I^* \left(3 - \frac{S^*}{S(t)} - \frac{S(t)I(t)E^*}{S^* I^* E(t)} - \frac{E(t)I^*}{E^* I(t)} \right) + \\ &\theta \beta V_2^* I^* \left(4 - \frac{V_1^*}{V_1(t)} - \frac{V_1(t)V_2^*}{V_1^* V_2(t)} - \frac{V_2(t)I(t)E^*}{V_2^* I^* E(t)} - \frac{E(t)I^*}{E^* I(t)} \right) \end{aligned}$$

所以 $\dot{L}_1 \leq 0$, 且 $\dot{L}_1 = 0$ 当且仅当 $S(t) = S^*$, $V_1(t) = V_1^*$, $V_2(t) = V_2^*$, $E(t) = E^*$, $I(t) = I^*$. 从而由 Lyapunov-LaSalle 不变原理^[11] 知: 当 $R_0 > 1$ 时, 正平衡点全局渐近稳定.

3 讨 论

本文建立了一个考虑疫苗时效性和潜伏期的传染病模型, 通过分析计算得到了疾病的基本再生数 R_0 . 易得 R_0 关于疫苗接种率 η 的导数为

$$\frac{\partial R_0}{\partial \eta} = \frac{-\sigma \beta A(\mu + \epsilon) + \sigma \theta \beta A \epsilon}{(r + \mu)(\mu + \sigma)(\mu + \epsilon)} < 0 \quad 0 < \theta < 1$$

因此, 基本再生数 R_0 为疫苗接种率 η 的单调减函数. 所以在疾病预防中, 提高疫苗接种比例是控制乙肝传播的有效手段之一. 同时模型(2)中我们考虑了乙肝潜伏期的影响. 如果忽略疾病潜伏期, 得到模型的基本再生数为

$$R_1 = \frac{\beta A(1 - \eta)(\mu + \epsilon) + \theta \beta \epsilon A \eta}{(r + \mu)(\mu + \epsilon)}$$

显然 $R_0 < R_1$, 由此可以看出不考虑乙肝传染的潜伏期会高估疾病传播的基本再生数, 所以乙肝潜伏期对乙肝传播具有很大的影响, 具有研究的必要性.

参考文献:

- [1] LIU X N, TAKEUCHI Y, IWAMI S. SVIR Epidemic Models with Vaccination Strategies [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2008, 253(1): 1–11.
- [2] ALEXANDER M E, BOWMAN C, MOGHADAS S M, et al. A Vaccination Model for Transmission Dynamics of Influenza [J]. *Siam Journal on Applied Dynamical Systems*, 2004, 3(4): 503–524.
- [3] DUAN X C, YUAN S L, LI X Z. Global Stability of an SVIR Model with Age of Vaccination [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 226: 528–540.
- [4] PANG J, CUI J A, ZHOU X. Dynamical Behavior of a Hepatitis B Virus Transmission Model with Vaccination [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2010, 265(4): 572–578.
- [5] LI X Z, ZHOU L L. Global Stability of an SEIR Epidemic Model with Vertical Transmission and Saturating Contact Rate [J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2009, 40(2): 874–884.
- [6] ARINO J, MCCLUSKEY C C, VAN DEN DRIESSCHE P. Global Results for an Epidemic Model with Vaccination That Exhibits Backward Bifurcation [J]. *Siam Journal on Applied Mathematics*, 2003, 64(1): 260–276.
- [7] MONEIM I A, KHALIL H A. Modelling and Simulation of the Spread of HBV Disease with Infectious Latent [J]. *Applied Mathematics*, 2015, 6(5): 745–753.
- [8] LIANG X F, BI S L, YANG W Z, et al. Epidemiological Serosurvey of Hepatitis B in China-Declining HBV Prevalence due to Hepatitis B Vaccination [J]. *Vaccine*, 2013, 31(47): 6550–6557.
- [9] VAN DEN DRIESSCHE P, WATMOUGH J. Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission [J]. *Mathematical Biosciences*, 2002, 180(1): 29–48.
- [10] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程定性与稳定性方法 [M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2015.
- [11] HALE J K, VERDUYN L S M. Introduction to Functional Differential Equations [M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013.

Analysis of an HBV Transmission Model with Vaccinal Effectiveness and Latency

QIAO Jie, LIU Xian-ning

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, an epidemic model of HBV considering the effects of vaccinal effectiveness and latency is established. First, the existence of equilibria is discussed. Then, the basic reproduction number R_0 is computed, and we obtain that in the system still exists a virus-free equilibrium, and there is a unique endemic equilibrium when $R_0 > 1$. Finally, we prove the global stabilities of the virus-free equilibrium and the endemic equilibrium by constructing Lyapunov functions.

Key words: vaccinal effectiveness; Lyapunov function; basic reproduction number; stability

责任编辑 张 枸

