DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.06.010

余纯 FP_n -平坦模①

申婧雯，　杨晓燕

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：设 R 是环. 引入了余纯 FP_n -平坦模的概念，探讨了这一模类与右 R -模的 FP_n -平坦预包络和左 R -模的 FP_n -平坦伴随预包络之间的关系.

关　键　词：余纯 FP_n -平坦模；FP_n -平坦预包络；FP_n -平坦伴随预包络

中图分类号：O153.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2018)06-0069-04

1993 年，文献[1] 利用内射模(即 FP_0 -内射模) 引入了余纯平坦模的概念，自此余纯平坦模受到许多专家、学者们的广泛关注. 1996 年，文献[2] 的定理 3.4 给出了“凝聚环上有限表示模是余纯平坦模”的等价刻画. 2016 年，文献[3]引入了模的 $\mathscr{C}$-伴随预包络和 $\mathscr{C}$-伴随预覆盖的概念，并运用这些概念给出了“凝聚环上任意模是余纯平坦模”的等价刻画. 受以上工作的启发，本文利用 FP_n -内射模引入了余纯 FP_n -平坦模的概念，探讨了这一模类与右 R -模的 FP_n -平坦预包络和左 R -模的 FP_n -平坦伴随预包络之间的关系.

1　预备知识

本文中的环 R 指有单位元的结合环，R-Mod(Mod-R) 表示左(右)R -模范畴，所有的模均指酉模，$wD(R)$ 指环 R 的弱整体维数. 对任意的左 R -模 C，$C^+ = \mathrm{Hom}_R(C, Q/Z)$ 表示 C 的示性模.

定义 1[4]　设 n 是非负整数，

(i) 如果存在正合序列 $F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中 $F_i (i=0,1,\cdots,n)$ 是有限生成自由的左 R -模，则称左 R -模 M 是有限 n -表示的；

(ii) 如果对任意的有限 n -表示右 R -模 F，都有 $\mathrm{Tor}_1^R(F, M) = 0$，则称左 R -模 M 是 FP_n -平坦模，FP_n -平坦左 R -模的类记为 $\mathscr{FP}_n$-Flat；

(iii) 如果对任意的有限 n -表示左 R -模 F，都有 $\mathrm{Ext}_R^1(F, M) = 0$，则称左 R -模 M 是 FP_n -内射模，FP_n -内射左 R -模的类记为 $\mathscr{FP}_n$-Inj.

注 1　当 $n=1$ 时，有限 1 -表示模即为有限表示模. 由文献[3] 知，左 R -模 M 是有限表示的当且仅当存在短正合序列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中 F_0 是有限生成自由的左 R -模，K 是有限生成的左 R -模.

定义 2[5]　设 $\mathscr{C}$ 是左 R -模类. 如果对于任意的 $C' \in \mathscr{C}$，序列 $\mathrm{Hom}_R(C, C') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, C') \longrightarrow 0$ 是正合的，则称左 R -模同态 $f: M \longrightarrow C$ 是 M 的 $\mathscr{C}$ -预包络，其中 $C \in \mathscr{C}$.

定义 3[3]　设 $\mathscr{C}$ 是左 R -模类，

(i) 如果对于任意的 $C' \in \mathscr{C}$，序列 $0 \longrightarrow M^+ \otimes_R C' \longrightarrow C^+ \otimes_R C'$ 是正合的，则称左 R -模同态 $\phi: C \longrightarrow M$ 是 M 的 $\mathscr{C}$ -伴随预覆盖，其中 $C \in \mathscr{C}$；

---

① 收稿日期：2017-11-20
基金项目：国家自然科学基金项目(11761060).
作者简介：申婧雯(1993-)，女，硕士研究生，主要从事同调代数的研究.

(ii) 如果对于任意的 $C' \in \mathscr{C}$，序列 $0 \longrightarrow (C')^+ \otimes_R M \longrightarrow (C')^+ \otimes_R C$ 是正合的，则称左 R-模同态 ϕ：$M \longrightarrow C$ 是 M 的 $\mathscr{C}$-伴随预包络，其中 $C \in \mathscr{C}$.

定义 4[1]　如果 $\mathrm{Tor}_1^R(M, E) = 0$，其中 E 是任意的内射左 R-模，则称右 R-模 M 是余纯平坦的.

2　余纯 FP_n-平坦模

定义 5　设 n 是非负整数. 如果 $\mathrm{Tor}_1^R(M, E) = 0$，其中 E 是任意的 FP_n-内射左 R-模，则称右 R-模 M 是余纯 FP_n-平坦的.

注 2　(i) 类似地，可以给出余纯 FP_n-平坦左 R-模的定义；

(ii) 当 $n = 0$ 时，$E \in \mathscr{FP}_0\text{-Inj}$，即 E 是内射模，因此每个模 M 是余纯平坦的；

(iii) 因为对任意 n，$\mathscr{FP}_0\text{-Inj} \subseteq \mathscr{FP}_n\text{-Inj}$，所以余纯 FP_n-平坦模是余纯平坦模.

根据余纯 FP_n-平坦模的定义，我们可以得到如下的结论：

定理 1　设 R 是环，M 是有限表示的右 R-模. 如果 M 是余纯 FP_n-平坦的，则 M 是一个 FP_n-平坦预包络的余核.

证　因为 M 是有限表示的右 R-模，所以存在短正合序列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中 K 是有限生成的右 R-模，F_0 是有限生成自由的右 R-模. 下证 $K \longrightarrow F_0$ 是 K 的 FP_n-平坦预包络. 对任意的 FP_n-平坦右 R-模 F，由文献[4]的命题 3.5 知，F^+ 是 FP_n-内射左 R-模. 又因为 M 是余纯 FP_n-平坦的，所以 $\mathrm{Tor}_1^R(M, F^+) = 0$. 则有如下交换图：

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \otimes_R F^+ \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\delta_K"] & F_0 \otimes_R F^+ \arrow[d, "\delta_{F_0}"] \\
 & \mathrm{Hom}_R(K, F)^+ \arrow[r, "\psi"] & \mathrm{Hom}_R(F_0, F)^+
\end{tikzcd}
$$

另一方面. 又因为 K 是有限生成的右 R-模，所以存在一个有限生成投射的右 R-模 P，使得序列 $P \longrightarrow K \longrightarrow 0$ 正合. 因此可以得到如下交换图：

$$
\begin{tikzcd}
P \otimes_R F^+ \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\delta_P"] & K \otimes_R F^+ \arrow[r] \arrow[d, "\delta_K"] & 0 \\
\mathrm{Hom}_R(P, F)^+ \arrow[r, "\nu"] & \mathrm{Hom}_R(K, F)^+ \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

由文献[6]的引理 3.60 知 δ_P 是同构. 因此 δ_K 是满同态. 因为 $\delta_{F_0}\phi = \psi\delta_K$ 且 δ_{F_0} 是同构，所以 ψ 是单同态. 故序列 $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(K, F)^+ \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_0, F)^+$ 正合. 这等价于序列 $\mathrm{Hom}_R(F_0, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(K, F) \longrightarrow 0$ 正合. 又因为 F_0 是有限生成自由的右 R-模，所以 F_0 是 FP_n-平坦右 R-模. 于是 $K \longrightarrow F_0$ 是 K 的 FP_n-平坦预包络.

定理 2　设 R 是环，M 是右 R-模. 如果 M 是一个右 R-模 K 的 FP_n-平坦预包络 f：$K \longrightarrow F$ 的余核，其中 F 是平坦右 R-模，则 M 是余纯 FP_n-平坦的.

证　设 f：$K \longrightarrow F$ 是右 R-模 K 的 FP_n-平坦预包络，其中 F 是平坦右 R-模，右 R-模 M 是 f 的余核. 令 $L = \mathrm{Im}(f)$. 则 $0 \longrightarrow L \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 正合且 $L \longrightarrow F$ 是 L 的 FP_n-平坦预包络. 对任意的 FP_n-内射右 R-模 E，由文献[4]的命题 3.6 知，E^+ 是 FP_n-平坦左 R-模. 因此序列 $\mathrm{Hom}(F, E^+) \longrightarrow \mathrm{Hom}(L, E^+) \longrightarrow 0$ 正合. 考虑如下交换图：

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(F, E^+) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}(L, E^+) \arrow[d, "\cong"] \\
(F \otimes_R E)^+ \arrow[r] & (L \otimes_R E)^+
\end{tikzcd}
$$

则序列 $(F \otimes_R E)^+ \longrightarrow (L \otimes_R E)^+ \longrightarrow 0$ 正合. 这等价于序列 $0 \longrightarrow L \otimes_R E \longrightarrow F \otimes_R E$ 正合. 用 $- \otimes_R E$ 作用短正合序列 $0 \longrightarrow L \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$，有

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M, E) \longrightarrow L \otimes_R E \longrightarrow F \otimes_R E \longrightarrow M \otimes_R E \longrightarrow 0$$

正合. 于是 $\mathrm{Tor}_1^R(M, E) = 0$，即右 R-模 M 是余纯 FP_n-平坦的.

定理 3　设 R 是环，M 是有限表示的左 R -模. 如果 M 是余纯 FP_n -平坦的，则 M 是一个 FP_n -平坦伴随预包络的余核.

证　因为 M 是有限表示的左 R -模，所以存在短正合序列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中 K 是有限生成的左 R -模，F_0 是有限生成自由的左 R -模. 下证 $K \longrightarrow F_0$ 是 K 的 FP_n -平坦伴随预包络. 对任意的 FP_n -平坦左 R -模 F，由文献[4] 的命题 3.5 知，F^+ 是 FP_n -内射右 R -模. 又因为 M 是余纯 FP_n -平坦的，所以 $\mathrm{Tor}_1^R(F^+, M)=0$. 用 $F^+\otimes_R$ -作用短正合序列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$，则序列 $0=\mathrm{Tor}_1^R(F^+, M) \longrightarrow F^+\otimes_R K \longrightarrow F^+\otimes_R F^0 \longrightarrow F^+\otimes_R M \longrightarrow 0$ 正合. 又因为 F^0 是有限生成自由的左 R -模，所以 F_0 是 FP_n -平坦左 R -模. 于是 $K \longrightarrow F_0$ 是 K 的 FP_n -平坦伴随预包络.

定理 4　设 M 是左 R -模. 则以下条件等价：

(ⅰ) M 是余纯 FP_n -平坦的；

(ⅱ) 对任意的短正合序列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中 B 是平坦左 R -模，$A \longrightarrow B$ 是 A 的 FP_n -平坦伴随预包络；

当 $wD(R) \leqslant 1$ 时，以上条件等价于：

(ⅲ) M 是一个 FP_n -平坦伴随预包络 $f: A \longrightarrow B$ 的余核，其中 B 是平坦左 R -模.

证　(ⅰ)$\Longrightarrow$(ⅱ) 设 F 是任意的 FP_n -平坦左 R -模. 由文献[4] 的命题 3.5 知，F^+ 是 FP_n -内射右 R -模. 因为 M 是余纯 FP_n -平坦的，所以 $\mathrm{Tor}_1^R(F^+, M)=0$. 用 $F^+\otimes_R$ -作用短正合序列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow M \longrightarrow 0$，有正合序列 $0=\mathrm{Tor}_1^R(F^+, M) \longrightarrow F^+\otimes_R A \longrightarrow F^+\otimes_R B$. 又因为 B 是平坦左 R -模，所以 B 是 FP_n -平坦左 R -模. 于是 $A \longrightarrow B$ 是 A 的 FP_n -平坦伴随预包络.

(ⅱ)$\Longrightarrow$(ⅲ) 因为短正合序列 $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow M \longrightarrow 0$ 总是存在的，其中 B 是平坦左 R -模，所以由 (ⅱ) 知 M 是 A 的 FP_n -平坦伴随预包络 $A \longrightarrow B$ 的余核.

(ⅲ)$\Longrightarrow$(ⅰ) 设左 R -模 M 是一个 FP_n -平坦伴随预包络 $f: A \longrightarrow B$ 的余核. 则对于 $f: A \longrightarrow B$，存在满的左 R -模同态 $\pi: A \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$ 以及单的左 R -模同态 $\lambda: \mathrm{Im}(f) \longrightarrow B$，使得 $f=\lambda\pi$. 对任意的 FP_n -内射右 R -模 E，由文献[4] 的命题 3.6 知，E^+ 是 FP_n -平坦左 R -模. 因此得到如下交换图：

$$\begin{tikzcd}
E^{++}\otimes_R A \arrow[r, "1_{E^{++}}\otimes_R f"] \arrow[d, "1_{E^{++}}\otimes_R \pi"'] & E^{++}\otimes_R B \\
E^{++}\otimes_R \mathrm{Im}(f) \arrow[ur, "1_{E^{++}}\otimes_R \lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

因为 $E^{++}\otimes_R A \longrightarrow E^{++}\otimes_R B$ 是单的，$E^{++}\otimes_R A \longrightarrow E^{++}\otimes_R \mathrm{Im}(f)$ 是满的，所以 $E^{++}\otimes_R \mathrm{Im}(f) \longrightarrow E^{++}\otimes_R B$ 是单的. 考虑短正合序列 $0 \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \longrightarrow B \longrightarrow M \longrightarrow 0$，用 $E^{++}\otimes_R$ -作用，有正合序列 $0=\mathrm{Tor}_1^R(E^{++}, B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(E^{++}, M) \longrightarrow E^{++}\otimes_R \mathrm{Im}(f) \longrightarrow E^{++}\otimes_R B$. 因此 $\mathrm{Tor}_1^R(E^{++}, M)=0$. 因为 E 是 E^{++} 的纯子模，所以有纯正合序列 $0 \longrightarrow E \longrightarrow E^{++} \longrightarrow F' \longrightarrow 0$. 用 $-\otimes_R M$ 作用，有 $\mathrm{Tor}_2^R(F', M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(E, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(E^{++}, M)=0$. 又因为 $wD(R) \leqslant 1$，所以 $\mathrm{Tor}_2^R(F', M)=0$. 故 $\mathrm{Tor}_1^R(E, M)=0$，即 M 是余纯 FP_n -平坦的.

对偶地，我们可以定义余纯 FP_n -内射模.

定义 6　设 n 是非负整数. 如果 $\mathrm{Ext}_R^1(E, N)=0$，其中 E 是任意的 FP_n -内射左 R -模，则称左 R -模 N 是余纯 FP_n -内射的.

定理 5　设 R 是凝聚环，M 是左 R -模. 如果 M 是一个左 R -模 K 的 FP_n -内射伴随预覆盖 $h: E \longrightarrow K$ 的核，其中 E 是内射左 R -模，则 M^{++} 是余纯 FP_n -内射的.

证　设 $h: E \longrightarrow K$ 是 K 的 FP_n -内射伴随预覆盖，其中 E 是内射左 R -模. 令 $L=\mathrm{Im}(h)$. 对于 h，有如下交换图：

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] & K \\
L \arrow[ur, "\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 π 是满的，λ 是单的. 因此可以得到如下交换图：

$$\begin{tikzcd} K^{+} \arrow[r, "h^{*}"] \arrow[d, "\lambda^{*}"'] & E^{+} \\ L^{+} \arrow[ur, "\pi^{*}"'] & \end{tikzcd}$$

对任意的 FP_n -内射左 R -模 E'，有如下交换图：

$$\begin{tikzcd} K^{+} \otimes_R E' \arrow[r, "h^{*} \otimes_R \mathbf{1}_{E'}"] \arrow[d, "\lambda^{*} \otimes_R \mathbf{1}_{E'}"'] & E^{+} \otimes_R E' \\ L^{+} \otimes_R E' \arrow[ur, "\pi^{*} \otimes_R \mathbf{1}_{E'}"'] & \end{tikzcd}$$

因为 $K^{+}\otimes_R E' \longrightarrow E^{+}\otimes_R E'$ 是单的，$K^{+}\otimes_R E' \longrightarrow L^{+}\otimes_R E'$ 是满的，所以 $0 \longrightarrow L^{+}\otimes_R E' \longrightarrow E^{+}\otimes_R E'$ 正合. 考虑短正合序列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow 0$，则有短正合序列 $0 \longrightarrow L^{+} \longrightarrow E^{+} \longrightarrow M^{+} \longrightarrow 0$，用 $-\otimes_R E'$ 作用，有正合序列 $\mathrm{Tor}_1^R(E^{+}, E') \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M^{+}, E') \longrightarrow L^{+}\otimes_R E' \longrightarrow E^{+}\otimes_R E'$. 又因为 E 是内射左 R -模，所以 E^{+} 是平坦右 R -模. 因此 $\mathrm{Tor}_1^R(E^{+}, E') = 0$. 于是 $\mathrm{Tor}_1^R(M^{+}, E') = 0$. 又因为 $\mathrm{Tor}_1^R(M^{+}, E')^{+} \cong \mathrm{Ext}_R^1(E', M^{++})$，所以 $\mathrm{Ext}_R^1(E', M^{++}) = 0$，即 M^{++} 是余纯 FP_n -内射的.

参考文献：

[1] ENOCHS E E, JENDA O M G. Copure Injective Resolutions, Flat Resolevents and Dimensions [J]. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 1993, 34(2): 203－211.

[2] DING N Q, CEHN J L. On Copure Flat Modules and Flat Resolvents [J]. Commanications in Algebra, 1996, 24(3): 243－262.

[3] MAO L X. Adjoint Preenvelope and Precover of Modules [J]. Publicationes Mathematicae Debrecen, 2016, 88(1－2): 139－161.

[4] BRAVO D, PÉREZ M A. Finiteness Conditions and Cotorsion Pairs [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2017, 221(6): 1249－1267.

[5] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative Homological Algebra [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2000.

[6] ROTMAN J J. An Introduction to Homological Algera [M]. New York: Academic Press, 1979.

Copure FP_n-Flat Modules

SHEN Jing-wen， YANG Xiao-yan

School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: Let R be a ring. The conception of Copure FP_n-flat module is introduced, and the relationships of this kind of modules with the FP_n-flat preenvelope of the right R-modules and the FP_n-flat adjoint preenvelope of the left R-modules are given.

Key words: copure FP_n-flat modules; FP_n-flat preenvelope; FP_n-flat adjoint preenvelope

责任编辑 廖 坤
崔玉洁