DOI:10.13718/j.cnki.xdzk.2018.06.012

一类次线性分数阶 Schrödinger 方程的无穷多解①

张 维, 唐春雷

西南大学 数学与统计学院,重庆 400715

摘要: 研究了如下的分数阶 Schrödinger 方程:

$$(-\Delta)^s u + V(x)u = f(x, u) \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

其中 $N \geqslant 3$, V 是变号位势, f 是次线性的. 运用对称山路引理, 得到了该方程无穷多解的存在性.

关 键 词: 分数阶 Schrödinger 方程; 变分法; 无穷多解; 对称山路引理

中图分类号:O176.3 **文献标志码:A** **文章编号:** 1673-9868(2018)06-0078-06

考虑如下分数阶 Schrödinger 方程:

$$(-\Delta)^s u + V(x)u = f(x, u) \qquad x \in \mathbb{R}^N \tag{1}$$

其中 $N \geqslant 3$, $s \in (0, 1)$, V 是位势且 $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. 近年来, 分数阶方程被很多人研究(见文献[1-7]). 文献[3, 5]考虑了 V 是强制的且满足 $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) > 0$ 时方程(1)无穷多解的存在性. 文献[6]假设 $V \in C(\mathbb{R}^N, [0, +\infty))$ 是径向的, 得到了方程(1)存在无穷多个径向解和非径向解. 当 $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ 满足 $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) > 0$ 时, 文献[1]用喷泉定理证明了方程(1)存在无穷多解. 受上述结论的启发, 我们考虑当 V 是变号位势时, 方程(1)无穷多解的存在性.

假设 V, f 满足以下条件:

(V_0) $V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $|V^-|_{\frac{N}{2s}} < \dfrac{S}{2}$, 其中 S 是加权的分数阶 Sobolev 常数, 定义为

$$S = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y : u \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*} \mathrm{d}x = 1\right\}$$

其中 $2_s^* = \dfrac{2N}{N-2s}$;

(f_1) $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, 且存在正函数 $a \in L^{\frac{N}{2s}}(\mathbb{R}^N)$, $b \in L^2(\mathbb{R}^N)$, 使得对任意的 $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ 都有

$$|f(x, t)| \leqslant a(x)|t| + b(x)|t|^{\mu-1}$$

其中 $\mu \in (1, 2)$, $|a|_{\frac{N}{2s}} < \dfrac{S}{4}$;

---

① 收稿日期:2018-02-05

基金项目:国家自然科学基金项目(11471267).

作者简介:张 维(1993-),女,硕士研究生,主要从事非线性分析的研究.

通信作者:唐春雷,教授,博士研究生导师.

(f_2) 存在 $x_0 \in \mathbb{R}^N$ 和 $r_0 > 0$，使得：

$$\limsup_{t\to 0}\left(\inf_{|x-x_0|\leqslant r_0} t^{-2}F(x,t)\right)=+\infty$$

$$\liminf_{t\to 0}\left(\inf_{|x-x_0|\leqslant r_0} t^{-2}F(x,t)\right)>-\infty$$

其中 $F(x,t)=\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s$；

(f_3) $f(x,t)$ 关于 t 是奇的.

定理 1 假设条件(V_0)，(f_1)—(f_3) 成立，则方程(1) 存在无穷多解.

注 1 据我们所知，之前有关分数阶 Schrödinger 方程的文章都考虑非负位势，本文考虑可变号位势.

注 2 设 $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$，且满足

$$\begin{cases}-1\leqslant V(x)<0 & |x|\leqslant R_1\\ 0\leqslant V(x)<1 & R_1<|x|\leqslant R_2\\ V(x)=0 & |x|>R_2\end{cases}$$

其中

$$\text{meas } B_{R_1}(0)<\left(\frac{S}{2}\right)^{\frac{N}{2s}}$$

以及

$$f(x,t)=C_0\frac{\sin^2 x_1}{1+|x|^{2N}}|t|+\frac{\cos^2 x_2}{1+|x|^{2N}}|t|^{-\frac{1}{3}}t$$

存在 C_0，使得

$$C_0\left|\frac{\sin^2 x_1}{1+|x|^{2N}}\right|_{\frac{N}{2s}}<\frac{S}{4}$$

这样的 V 和 f 适合本文的定理 1，但不适合文献[1，3，5－6] 的定理，因为它们考虑的位势是非负的.

我们用对称山路引理证明定理 1，在此之前，给出关于它的一些基本定义.

定义 1[4] 设 E 是 Banach 空间，A 是 E 的子集. 如果 $u\in A$ 可以推出 $-u\in A$，我们就说集合 A 是对称的. 定义不包含原点的闭对称集合 A 的亏格 $\gamma(A)$ 为使得从 A 到 $\mathbb{R}^k\setminus\{0\}$ 存在一个连续奇映射的最小整数 k. 如果这样的 k 不存在，定义 $\gamma(A)=+\infty$，$\gamma(\varnothing)=0$. Γ_k 为满足 $0\notin A$ 和 $\gamma(A)\geqslant k$ 的闭对称集 A 的集族.

引理 1[4] 设 X 是一个无限维 Banach 空间，$J\in C^1(X,\mathbb{R})$，且满足：

(A_1) $J(0)=0$，J 是偶的、下有界的，且满足(PS) 条件；

(A_2) 对每个 $k\in\mathbb{N}$，存在 $E_k\in\Gamma_k$，使得 $\sup\limits_{u\in E_k}J(u)<0$，则($A_2^2$) 或者($A_2^2$) 成立：

(A_2^1) 存在临界点序列 $\{u_k\}$，使得：

$$J'(u_k)=0 \qquad J(u_k)<0 \qquad u_k\to 0$$

(A_2^2) 存在临界点序列 $\{u_k\}$ 和 $\{v_k\}$，使得：

$$J'(u_k)=0 \qquad J(u_k)=0 \qquad u_k\neq 0,\ u_k\to 0$$

$$J'(v_k)=0 \qquad J(v_k)<0 \qquad J(v_k)\to 0 \qquad v_k\nrightarrow 0$$

现在，我们介绍分数阶 Sobolev 空间[2]：

$$D^{s,2}(\mathbb{R}^N)=\left\{u\in L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N):\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty\right\}$$

其范数为

$$\|u\|=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}$$

在本文中，定义 $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ 的子空间 E 为

$$E=\left\{u\in D^{s,2}(\mathbb{R}^N):\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2\mathrm{d}x<+\infty\right\}$$

范数为

$$\|u\|_*=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

下证范数 $\|\cdot\|_*$ 是良好定义的.

引理 2　假设条件(V_0)成立，则范数 $\|\cdot\|_*$ 是良好定义的.

证　由 Hölder 不等式和分数阶 Sobolev 嵌入可得

$$\|u\|_*^2=\|u\|^2+\int_{\mathbb{R}^N}V^+(x)u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}V^-(x)u^2\mathrm{d}x\geqslant$$

$$\|u\|^2-|V^-|_{\frac{N}{2s}}|u|_{2_s^*}^2\geqslant$$

$$\left(1-\frac{|V^-|_{\frac{N}{2s}}}{S}\right)\|u\|^2$$

其中 $V^+=\max\{V,0\}$，$V^-=-\min\{V,0\}$. 由条件(V_0)可知

$$\frac{|V^-|_{\frac{N}{2s}}}{S}<1$$

引理 2 得证.

设方程(1)对应的能量泛函为 I，即

$$I(u)=\frac{1}{2}\|u\|_*^2-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u)\mathrm{d}x$$

由条件(f_1)，易得能量泛函 I 是良好定义的.

如果存在 $u\in E$，对任意的 $v\in E$ 都有

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)||v(x)-v(y)|}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)uv\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)v\mathrm{d}x$$

则称 u 为方程(1)的弱解. 形式上，泛函 I 的临界点都是方程(1)的弱解.

引理 3　假设条件(f_1)成立，则泛函

$$\chi:E\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$u\longmapsto\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|u|^\mu\mathrm{d}x$$

是弱连续的.

证　泛函 χ 是良好定义的. 设在 E 中 $u_n\rightharpoonup u$，可知在 $L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R}^N)$ 中 $u_n\to u$，在 $\mathbb{R}^N$ 中 $u_n(x)\to u(x)$ 几乎处处成立. 由$\{u_n\}$在空间 $L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$ 中有界，可知$\{|u_n|^\mu\}$在空间 $L^{\frac{2_s^*}{\mu}}(\mathbb{R}^N)$ 中有界，由此可得在空间 $L^{\frac{2_s^*}{\mu}}(\mathbb{R}^N)$ 中有 $|u_n|^\mu\rightharpoonup|u|^\mu$，即得

$$\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|u_n|^\mu\mathrm{d}x\to\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|u|^\mu\mathrm{d}x$$

即证 χ 是弱连续的.

同理,可证得 $\tau: E \longrightarrow \mathbb{R}: u \longmapsto \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2 \mathrm{d}x$ 是弱连续的. 易得 $I \in C^1(E, \mathbb{R})$.

引理 4 假设条件(V_0)和(f_1)成立,则 I 是下有界的且满足(PS)条件.

证 对任意的 $u \in E$,我们有

$$I(u) \geqslant \frac{1}{2}\|u\|_*^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |a(x)||u|^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} |b(x)||u|^\mu \mathrm{d}x \geqslant$$

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}|u|_{2_s^*}^2 (|V^-|_{\frac{N}{2s}} + 2|a^+|_{\frac{N}{2s}}) - C_1 |b|_{\frac{2_s^*}{2_s^*-\mu}} \|u\|^\mu \geqslant C_2 \tag{2}$$

由条件(V_0)和(f_1)可知 C_2 与 u 无关. 对任意的(PS)序列$\{u_n\}$,若 $\|u_n\|_* \to +\infty$,由(2)式可知 $I(u_n) \to +\infty$,这与(PS)序列的定义矛盾. 因此,(PS)序列在 E 中有界,故存在 $u \in E$,当 $n \to +\infty$ 时,有 $u_n \rightharpoonup u$,事实上,

$$o(1) = \langle I'(u_n) - I'(u), u_n - u \rangle =$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f(x, u_n) - f(x, u))(u_n - u)\mathrm{d}x + \|u_n - u\|_*^2 \tag{3}$$

由引理 3,可知$\int_{\mathbb{R}^N} f(x, t)\mathrm{d}x$ 是弱连续的. 故当 $n \to +\infty$ 时,有

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f(x, u_n) - f(x, u))(u_n - u)\mathrm{d}x \to 0 \tag{4}$$

由(3)式和(4)式,当 $n \to +\infty$ 时,有

$$\|u_n - u\|_*^2 \to 0$$

故 I 满足(PS)条件.

引理 5 假设条件(V_0),(f_1)和(f_2)成立,则对任意的 $k \in \mathbb{N}$,都存在 $W_k \in \Gamma_k$,使得

$$\sup_{u \in W_k} I(u) < 0$$

证 不失一般性,我们可以假设条件(f_2)中的 $x_0 = 0$,设立方体

$$\mathscr{D} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N : |x_i| \leqslant r_0, i = 1,2,\cdots,N\}$$

显然,$\mathscr{D} \subseteq B_{r_0}$. 由条件$(\mathrm{f}_2)$可得,存在序列$\{\delta_m\}$,$\{M_m\}$和常数 $\delta, C > 0$,满足 $\delta_m, M_m > 0$,且当 $m \to +\infty$ 时,$\delta_m \to 0$,$M_m \to +\infty$,使得对任意的 $x \in \mathscr{D}$ 和 $|u| \leqslant \delta$,有

$$F(x, u) \geqslant -Cu^2 \tag{5}$$

以及对任意的 $x \in \mathscr{D}$ 和 $m \in \mathbb{N}$,有

$$\frac{F(x, \delta_m)}{\delta_m^2} \geqslant M_m \tag{6}$$

对固定的数 $k \in \mathbb{N}$,构建 $W_k \in \Gamma_k$ 满足引理 1 的(A_2).

存在最小的满足 $q^N \geqslant k$ 的整数 q. 把立方体 $\mathscr{D}$ 分成 q^N 个立方体,记为 $\mathscr{D}_i (i = 1,2,\cdots,q^N)$. $\mathscr{D}_i$ 的每个面与 $\mathscr{D}$ 相对应的面平行且边长 $d = \frac{r_0}{q}$. 构建新的立方体 $E_i \subseteq \mathscr{D}_i$ 与 $\mathscr{D}_i$ 有相同的中心,对应的面相互平行且边长为$\frac{d}{2}$. 设函数 $\psi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0, 1]) (i = 1,2,\cdots,k)$,满足:

$$\mathrm{supp}(\psi_i) \subset \mathscr{D}_i \qquad \mathrm{supp}(\psi_i) \cap \mathrm{supp}(\psi_j) = \varnothing \qquad i \neq j$$

当 $x \in E_i$ 时,$\psi_i(x) = 1$;当 $x \in \mathbb{R}^N$ 时,$0 \leqslant \psi_i(x) \leqslant 1$. 定义

$$S^{k-1} = \{(t_1, t_2 \cdots, t_k) \in \mathbb{R}^k : \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |t_i| = 1\} \tag{7}$$

和

$$V_k=\left\{\sum_{i=1}^{k} t_i\psi_i(x):(t_1,t_2\cdots,t_k)\in S^{k-1}\right\} \tag{8}$$

显然由奇映射$(t_1,t_2,\cdots,t_k)\longmapsto \sum_{i=1}^{k} t_i\psi_i(x)$，可得 V_k 同胚于 S^{k-1}，从而有 $\gamma(V_k)=\gamma(S^{k-1})=k$.

由 V_k 是紧的，故存在常数 $C_k>0$，使得对任意的 $u=\sum_{i=1}^{k} t_i\psi_i\in V_k$，都有

$$\| u \|_* \leqslant C_k \tag{9}$$

对任意的 $s\in\left(0,\dfrac{\delta}{2}\right)$和 $u\in V_k$，有

$$I(su)\leqslant \frac{1}{2}\| su \|_*^2-\sum_{i=1}^{k}\int_{\mathscr{D}_i} F(x,st_i\psi_i)\mathrm{d}x \tag{10}$$

存在整数 $1\leqslant i_u\leqslant k$，使得 $t_{i_u}=1$，其中 t_i 如(7)式所定义.(10)式的最后一项可展开为

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{\mathscr{D}_i} F(x,st_i\psi_i)\mathrm{d}x=\int_{E_{i_u}} F(x,st_i\psi_i)\mathrm{d}x+\int_{\mathscr{D}_{i_u}\setminus E_{i_u}} F(x,st_i\psi_i)\mathrm{d}x+\sum_{i\neq i_u}\int_{\mathscr{D}_i} F(x,st_i\psi_i)\mathrm{d}x \tag{11}$$

由 $E_{i_u}\subseteq\mathscr{D}_i\subseteq\mathscr{D}$ 和(5)式，可得

$$\int_{\mathscr{D}_{i_u}\setminus E_{i_u}} F(x,st_i\psi_i)\mathrm{d}x+\sum_{i\neq i_u}\int_{\mathscr{D}_i} F(x,st_i\psi_i)\mathrm{d}x\geqslant -Cr_0^N s^2 \tag{12}$$

对任意的 $\delta_m\in\left(0,\dfrac{\delta}{2}\right)$，结合(9)－(12)式，有

$$I(\delta_m u)\leqslant\frac{1}{2}\delta_m^2C_k^2+Cr_0^N\delta_m^2-\int_{E_{i_u}} F(x,\delta_m t_i\psi_i)\mathrm{d}x\leqslant \delta_m^2\left(\frac{1}{2}C_k^2+Cr_0^N-\left(\frac{d}{2}\right)^N M_m\right) \tag{13}$$

事实上，

$$|E_{i_u}|=\left(\frac{d}{2}\right)^N$$

对所有的 $x\in E_{i_u}$，都有 $|\delta_m t_i\psi_i(x)|\equiv\delta_m$. 当 $m\to+\infty$ 时，有 $\delta_m\to 0$ 和 $M_m\to+\infty$，故存在 $m_0\in\mathbb{N}$，使得当 $m\geqslant m_0$ 时，(13)式的右边为负. 定义

$$W_k=\{\delta_{m_0}u:u\in V_k\}$$

可知：

$$\gamma(W_k)=\gamma(V_k)=k \qquad \sup_{u\in W_k} I(u)<0$$

定理 1 的证明　由条件(f_3)可知 I 是偶的且 $I(0)=0$，由引理 4 和引理 5 可知 I 满足引理 1 的(A_1)和(A_2). 故由引理 1 可得方程(1)存在非平凡解序列$\{u_n\}\subset E$，且$\{u_n\}$满足 $I(u_n)\leqslant 0$，当 $n\to+\infty$ 时，$u_n\to 0$.

参考文献：

[1] BIN G. Multiple Solutions of Nonlinear Schrödinger Equation with the Fractional Laplacian [J]. Nonlinear Anal，2016，30：236－247.

[2] NEZZA E D，PALATUCCI G，VALDINOCI E. Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces [J]. Bull Sci Math，2011，136(5)：521－573.

[3] TENG K M. Multiple Solutions for a Class of Fractional Schrödinger Equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. Nonlinear Anal, 2015, 21(21): 76-86.
[4] LI L, ZHONG X. Infinitely Many Small Solutions for the Kirchhoff Equation with Local Sublinear Nonlinearities [J]. J Math Anal Appl, 2016, 435(1): 955-967.
[5] KHOUTIR S, CHEN H B. Existence of Infinitely Many High Energy Solutions for a Fractional Schrödinger Equation in $\mathbb{R}^N$ [J]. Appl Math Lett, 2016, 61(2): 156-162.
[6] ZHANG W, TANG X H, ZHANG J. Infinitely Many Radial and Non-Radial Solutions for a Fractional Schrödinger Equation [J]. Comput Math Appl, 2016, 71(3): 737-747.
[7] 刘晓琪, 欧增奇. 一类 Kirchhoff 型分数阶 p-拉普拉斯方程无穷解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(4): 70-75.

Infinitely Many Solutions for a Class of Sublinear Fractional Schrödinger Equations

ZHANG Wei, TANG Chun-lei
School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: The following fractional Schrödinger equation is studied

$$(-\Delta)^s u + V(x)u = f(x, u) \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

where $N \geqslant 3$, V is an indefinite potential and f satisfies sublinear growth. The existence of infinitely many solutions is obtained by using the variant symmetric mountain lemma.

Key words: fractional Schrödinger equation; variational method; infinitely many solutions; symmetric mountain pass theorem

责任编辑 廖 坤