DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.06.013

一类带双临界指数的 Schrödinger-Poisson 系统正基态解的存在性①

李勇勇， 唐春雷

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：利用变分法和山路引理研究一类带有双临界指数的 Schrödinger-Poisson 系统，证明了其正基态解的存在性.

关键词：Schrödinger-Poisson 系统；双临界指数；变分法；山路引理；正基态解

中图分类号：O176.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9868(2018)06-0084-08

基于其物理意义[1-2]，Schrödinger-Poisson 系统

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \mu K(x)\phi f(u) = g(x,u) & x \in \mathbb{R}^3 \\ -\Delta \phi = K(x)F(u) & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

已经被很多学者研究. 在函数 V, K, g, $F(u) = \int_0^u f(s)\mathrm{d}s$ 以及参数 μ 的各种假设条件下，他们获得了非平凡解的存在性结果[1-8]. 特别地，当 g 含有临界项 $|u|^4 u$ 时，文献[5] 证明了基态变号解的存在性. 当 $F(u) = |u|^5$ 时，文献[3] 证明了正径向解的存在性. 注意到以上结果至多涉及单个的局部临界项 $|u|^4 u$ 或者非局部临界项 $\phi|u|^3 u$，当系统中同时含有这两个临界项时，其非平凡解的存在性还未曾被研究过.

受到文献[1, 3] 的启发，本文考虑下面的 Schrödinger-Poisson 系统：

$$\begin{cases} -\Delta u + u + |u|^4 u = \phi|u|^3 u + \lambda|u|^{p-2}u & x \in \mathbb{R}^3 \\ -\Delta \phi = |u|^5 & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\lambda > 0$，$2 < p < 6$，$|u|^4 u$ 和 $\phi|u|^3 u$ 分别是局部和非局部的 Sobolev 临界项. 本文的主要结果是：

定理 1 对任意的 $\lambda > 0$ 及 $4 < p < 6$，或对充分大的 $\lambda > 0$ 及 $2 < p \leqslant 4$，系统(1) 存在正基态解.

注 1 系统(1) 也被称为 Schrödinger-Newton 方程，当局部临界项 $|u|^4 u$ 和非局部临界项 $\phi|u|^3 u$ 位于方程的两端时，由于它们所带能量的竞争关系，证明 $(\mathrm{Ce})_c$ 条件是否成立将成为难点.

注 2 在定理 1 的证明中，我们将遇到几个难点. 首先，因为我们在 $\mathbb{R}^3$ 上研究临界问题，此时 Sobolev 嵌入 $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^3)$ $(2 \leqslant s \leqslant 6)$ 是连续非紧的，这使得系统(1) 的能量泛函不必满足 $(\mathrm{Ce})_c$ 条件. 为了证明能量泛函有非平凡的临界点，我们将通过 Lions 引理来修复紧性的缺失. 其次，因为 $2 < p < 6$，直接证明 $(\mathrm{Ce})_c$ 序列在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中有界比较困难，我们将利用 Pohožaev 恒等式来克服这一难点.

1 预备知识

从现在起，我们约定 Lebesgue 空间 $L^s(\mathbb{R}^3)$ $(1 \leqslant s \leqslant \infty)$ 带有标准范数 $|\cdot|_s$，Hilbert 空间 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 带

---

① 收稿日期：2017-11-28

基金项目：国家自然科学基金项目(11471267).

作者简介：李勇勇(1992-)，男，硕士研究生，主要从事非线性分析的研究.

通信作者：唐春雷，教授，博士研究生导师.

有范数

$$\| u \|_H = \left(\int_{\mathbb{R}^3} | \nabla u |^2 + u^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

以及 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 是 $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ 关于范数

$$\| u \|_D = \left(\int_{\mathbb{R}^3} | \nabla u |^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

的完备化空间. H^* 表示 Banach 空间 H 的共轭空间. 由文献[9]可知 Sobolev 嵌入 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ 的最佳常数

$$S = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}} \frac{\| u \|_D^2}{| u |_6^2} \tag{2}$$

由函数 $u_\varepsilon(x) = \dfrac{3^{\frac{1}{4}} \varepsilon^{\frac{1}{2}}}{(\varepsilon^2 + | x |^2)^{\frac{1}{2}}}$ 达到, 其中 $\varepsilon > 0$. 令 $o(1)$ 表示无穷小量, C_i ($i \in \mathbb{N}_+$) 表示不同的正数.

对每个 $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, 由 Hölder 不等式以及 Sobolev 不等式可得, 对任意的 $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, 有

$$L_u(v) = \int_{\mathbb{R}^3} | u |^5 v \mathrm{d}x \leqslant | u |_6^5 \, | v |_6 \leqslant S^{-3} \| u \|_D^5 \| v \|_D$$

即对任意的 $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, 线性泛函 $L_u \in [D^{1,2}(\mathbb{R}^3)]^*$. 从而, 由 Lax-Milgram 定理, 我们知道 Poisson 方程 $-\Delta \phi = | u |^5$ 有唯一的正解 $\phi_u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, 并且

$$\phi_u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{| u(y) |^5}{| x - y |} \mathrm{d}y$$

由此, 系统(1) 可以简化为

$$-\Delta u + u + | u |^4 u = \phi_u | u |^3 u + \lambda | u |^{p-2} u \qquad x \in \mathbb{R}^3 \tag{3}$$

由文献[2], u 是方程(3) 的弱解当且仅当(u, ϕ_u) 是系统(1) 的弱解, 当且仅当 u 是能量泛函

$$I_{\lambda,p}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (| \nabla u |^2 + u^2) \mathrm{d}x + \frac{1}{6} \int_{\mathbb{R}^3} | u |^6 \mathrm{d}x - \frac{1}{10} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u | u |^5 \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{p} \int_{\mathbb{R}^3} | u |^p \mathrm{d}x$$

的临界点. 不难证明, 对任意的 $2 < p < 6$ 以及 $\lambda > 0$, $I_{\lambda,p} \in C^1(H^1(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$, 且对任意的 $u, v \in H^1(\mathbb{R}^3)$, 有

$$\langle I'_{\lambda,p}(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3} | u |^4 uv \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u | u |^3 uv \mathrm{d}x - \lambda \int_{\mathbb{R}^3} | u |^{p-2} uv \mathrm{d}x$$

因此, 证明系统(1) 有非平凡弱解等价于证明泛函 $I_{\lambda,p}$ 有非平凡临界点.

由椭圆方程的正则性理论我们不难证明: 系统(1) 的每个弱解(u, ϕ_u) 满足 $u, \phi_u \in C^2(\mathbb{R}^3)$. 从而, 类似于文献[1, 3, 6] 的讨论, 我们可以证明下面的引理:

引理 1 如果(u, ϕ_u) 是系统(1) 的弱解, 则(u, ϕ_u) 满足下面的 Pohožaev 等式:

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_{\lambda,p}(u) = & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} | \nabla u |^2 \mathrm{d}x + \frac{3}{2} \int_{\mathbb{R}^3} u^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} | u |^6 \mathrm{d}x - \\ & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u | u |^5 \mathrm{d}x - \frac{3\lambda}{p} \int_{\mathbb{R}^3} | u |^p \mathrm{d}x = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

2 定理 1 的证明

如果序列$\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ 满足 $I_{\lambda,p}(u_n) \xrightarrow{n} c$, $\mathscr{P}_{\lambda,p}(u_n) \xrightarrow{n} 0$ 且 $I'_{\lambda,p}(u_n) \xrightarrow{n} 0$, 则我们称它为泛函 $I_{\lambda,p}$ 在水平 $c \in \mathbb{R}$ 处的一个 Pohožaev-Cerami 序列(简称$(PC)_c$ 序列). 进而, 如果泛函 $I_{\lambda,p}$ 的每个$(PC)_c$ 序列均有收敛子列, 则我们称 $I_{\lambda,p}$ 满足$(PC)_c$ 条件. 首先, 我们证明泛函 $I_{\lambda,p}$ 满足山路引理[7] 的几何假设条件.

引理 2 (i) 存在 $\rho_0, \alpha_0 > 0$, 使得当 $\| u \|_H = \rho_0$ 时, 有 $I_{\lambda,p}(u) \geqslant \alpha_0$;

(ii) 存在某个函数 $e \in H^1(\mathbb{R}^3)$, 满足 $\| e \|_H > \rho_0$ 且 $I_{\lambda,p}(e) < 0$.

证 (i) 由文献[3] 的引理 2.1-(v)、Sobolev 嵌入 $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$ 以及(2) 式, 对任意的 $\lambda > 0$, 我

们有

$$I_{\lambda,p}(u)\geqslant\frac{1}{2}\|u\|_H^2+\frac{1}{6}|u|_6^6-\frac{1}{10S}|u|_6^{10}-\frac{\lambda}{p}|u|_p^p\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\|u\|_H^2-\frac{1}{10S^6}\|u\|_H^{10}-\frac{C_1\lambda}{p}\|u\|_H^p$$

由于 $p>2$，于是我们可以选取 $\rho_0>0$ 充分小，使得 $\alpha_0=\frac{1}{2}\rho_0^2-\frac{1}{10S^6}\rho_0^{10}-\frac{C_1\lambda}{p}\rho_0^p>0$ 满足 (i) 的要求.

(ii) 任取 $u\in H^1(\mathbb{R}^3)\backslash\{0\}$，定义 $u_t(\cdot)=u\left(\frac{\cdot}{t}\right)$，其中 $t>0$. 由文献[3] 的引理 2.1-(ii),(iv)，我们推断出：当 $t\to+\infty$ 时，

$$I_{\lambda,p}(u_t)=\frac{t}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{t^3}{2}\int_{\mathbb{R}^3}u^2\mathrm{d}x+\frac{t^3}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x-\frac{t^5}{10}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u|u|^5\mathrm{d}x-\frac{\lambda t^3}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x\to-\infty$$

于是，可以取 $t_0>0$ 充分大，使得 $\|u_{t_0}\|_H>\rho_0$ 且 $I_{\lambda,p}(u_{t_0})<0$，则 $e=u_{t_0}$ 满足 (ii) 的要求.

结合引理 2 与山路引理[7]，我们得知泛函 $I_{\lambda,p}$ 有一个山路几何结构，且山路值为

$$\tilde{c}_{\lambda,p}=\inf_{\gamma_0\in\tilde{\Gamma}_{\lambda,p}}\max_{t\in[0,1]}I_{\lambda,p}(\gamma_0(t))\tag{5}$$

其中

$$\tilde{\Gamma}_{\lambda,p}=\{\gamma_0\in C([0,1],H^1(\mathbb{R}^3)):\gamma_0(0)=0,\ I_{\lambda,p}(\gamma_0(1))<0\}$$

进一步，我们证明 $I_{\lambda,p}$ 有一个$(\mathrm{PC})_c$ 序列.

引理 3　对任意的 $2<p<6$ 以及 $\lambda>0$，泛函 $I_{\lambda,p}$ 有一个$(\mathrm{PC})_{c_{\lambda,p}}$ 序列$\{u_n\}\subset H^1(\mathbb{R}^3)$，即：

$$I_{\lambda,p}(u_n)\xrightarrow{n}c_{\lambda,p}\qquad \mathscr{P}_{\lambda,p}(u_n)\xrightarrow{n}0\qquad I'_{\lambda,p}(u_n)\xrightarrow{n}0\tag{6}$$

证　根据文献[8]，定义映射 Φ：$\mathbb{R}\times H^1(\mathbb{R}^3)\longrightarrow H^1(\mathbb{R}^3)$ 为 $\Phi(\tau,u)(x)=u(e^{-\tau}x)$，我们可知泛函

$$I_{\lambda,p}\circ\Phi(\tau,u)=\frac{e^{\tau}}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{e^{3\tau}}{2}\int_{\mathbb{R}^3}u^2\mathrm{d}x+$$
$$\frac{e^{3\tau}}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x-\frac{e^{5\tau}}{10}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u|u|^5\mathrm{d}x-\frac{\lambda e^{3\tau}}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x$$

满足 $I_{\lambda,p}\circ\Phi\in C^1(\mathbb{R}\times H^1(\mathbb{R}^3),\mathbb{R})$. 重复引理 2 的证明，必存在 $\rho_1,\rho_2,\alpha>0$，使得当 $\|(\tau,u)\|_{\mathbb{R}\times H}=(\tau^2+\|u\|_H^2)^{\frac{1}{2}}=\rho_2$ 且 $\|u\|_H=\rho_1$ 时，有 $I_{\lambda,p}\circ\Phi(\tau,u)\geqslant\alpha>0$. 此外，任取 $u\in H^1(\mathbb{R}^3)\backslash\{0\}$，必存在充分大的 $t_1>0$，使得 $\|u_{t_1}\|_H>\rho_2$ 且 $I_{\lambda,p}\circ\Phi(0,u_{t_1})<0$. 于是，泛函 $I_{\lambda,p}\circ\Phi$ 有一个山路几何结构，且山路值为

$$c_{\lambda,p}=\inf_{\gamma\in\Gamma_{\lambda,p}}\max_{\theta\in[0,1]}I_{\lambda,p}\circ\Phi(\gamma(\theta))\tag{7}$$

其中

$$\Gamma_{\lambda,p}=\{\gamma\in C([0,1],\mathbb{R}\times H^1(\mathbb{R}^3)):\gamma(0)=(0,0),\ I_{\lambda,p}\circ\Phi(\gamma(1))<0\}$$

注意到 $\Phi(\Gamma_{\lambda,p})\subset\tilde{\Gamma}_{\lambda,p}$ 且$\{0\}\times\tilde{\Gamma}_{\lambda,p}\subset\Gamma_{\lambda,p}$，我们推断出 $c_{\lambda,p}=\tilde{c}_{\lambda,p}$. 令 $M=[0,1]$ 且 $M_0=\{0,1\}$，我们有

$$\infty>c_{\lambda,p}=\inf_{\gamma\in\Gamma_{\lambda,p}}\max_{\theta\in M}I_{\lambda,p}\circ\Phi(\gamma(\theta))>0=\sup_{\gamma\in\Gamma_{\lambda,p}}\sup_{\theta\in M_0}I_{\lambda,p}\circ\Phi(\gamma(\theta))$$

从而，由文献[7] 的定理 2.9 我们得知：存在序列$\{(\tau_n,v_n)\}\subset\mathbb{R}\times H^1(\mathbb{R}^3)$，满足：对任意的 $\gamma\in\Gamma_{\lambda,p}$，

$$\begin{cases}I_{\lambda,p}\circ\Phi(\tau_n,v_n)\xrightarrow{n}c_{\lambda,p}\\(I_{\lambda,p}\circ\Phi)'(\tau_n,v_n)\xrightarrow{n}0\\\min\limits_{\theta\in[0,1]}\|(\tau_n,v_n)-\gamma(\theta)\|_{\mathbb{R}\times H}\xrightarrow{n}0\end{cases}\tag{8}$$

现在，取 $u_n=\Phi(\tau_n, v_n)$，由(8)式可知 $I_{\lambda,p}(u_n)\xrightarrow{n}c_{\lambda,p}$，且对任意的 $(h,\varphi)\in\mathbb{R}\times H^1(\mathbb{R}^3)$，有

$$\langle(I_{\lambda,p}\circ\Phi)'(\tau_n, v_n),(h,\varphi)\rangle=\langle I'_{\lambda,p}(\Phi(\tau_n,v_n)),\Phi(\tau_n,\varphi)\rangle+\mathscr{P}_{\lambda,p}(\Phi(\tau_n,v_n))h=o(1)\tag{9}$$

于是，取 $(h,\varphi)=(1,0)$，我们从(9)式推断出 $\mathscr{P}_{\lambda,p}(u_n)\xrightarrow{n}0$. 如果取 $(h,\varphi)=(0,\Phi(-\tau_n,\varphi))$，则(8)式的第3个极限式蕴含

$$\|\Phi(-\tau_n,\varphi)\|_H=\|\varphi(e^{\tau_n}\ \cdot)\|_H\leqslant C_2\|\varphi\|_H$$

从而

$$\langle I'_{\lambda,p}(u_n),\varphi\rangle=\langle(I_{\lambda,p}\circ\Phi)'(\tau_n,v_n),(0,\Phi(-\tau_n,\varphi))\rangle\xrightarrow{n}0$$

因此，$\{u_n\}=\{\Phi(\tau_n,v_n)\}$ 是泛函 $I_{\lambda,p}$ 的 $(\mathrm{PC})_{c_{\lambda,p}}$ 序列.

引理4 对于泛函 $I_{\lambda,p}$ 的每个 $(\mathrm{PC})_{c_{\lambda,p}}$ 序列 $\{u_n\}$，其中

$$0<c_{\lambda,p}<\left[\frac{2}{5}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{15}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]S^{\frac{3}{2}}$$

如果 $u_n\rightharpoonup 0$ 于 $H^1(\mathbb{R}^3)$，则存在常数 $r,\eta>0$ 以及序列 $\{y_n\}\subset\mathbb{R}^3$，满足 $|y_n|\xrightarrow{n}\infty$ 且

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{B_r(y_n)}u_n^2\mathrm{d}x\geqslant\eta>0\tag{10}$$

证 假设结论不成立，根据 Lions 引理[7]，当 $2<p<6$ 时，有 $\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^p\mathrm{d}x\xrightarrow{n}0$. 从而，由(6)式可得

$$\begin{aligned}c_{\lambda,p}+o(1)=I_{\lambda,p}(u_n)=\\ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_n|^2+u_n^2)\mathrm{d}x+\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^6\mathrm{d}x-\frac{1}{10}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}|u_n|^5\mathrm{d}x+o(1)\end{aligned}\tag{11}$$

以及

$$o(1)=\langle I'_{\lambda,p}(u_n),u_n\rangle=\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_n|^2+u_n^2)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^6\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}|u_n|^5\mathrm{d}x+o(1)\tag{12}$$

于是，由(12)式，文献[3]的引理2.1-(Ⅴ)以及(2)式，我们有

$$S|u_n|_6^2+|u_n|_6^6\leqslant S^{-1}|u_n|_6^{10}+o(1)\tag{13}$$

进一步，假设在 $\{u_n\}$ 的子列意义下，$|u_n|_6^6\xrightarrow{n}\kappa$ 且 $\|u_n\|_H^2\xrightarrow{n}l$，则由(13)式我们得出 $S^{-1}\kappa^{\frac{5}{3}}-\kappa-S\kappa^{\frac{1}{3}}\geqslant 0$. 解得 $\kappa=0$ 或者 $\kappa\geqslant\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}S^{\frac{3}{2}}$. 如果 $\kappa=0$，则(12)式与文献[3]的引理2.1-(Ⅴ)蕴含 $l=0$，这与 $c_{\lambda,p}>0$ 相矛盾；如果 $\kappa\geqslant\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}S^{\frac{3}{2}}$，由(2)式可得 $l\geqslant\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}S^{\frac{3}{2}}$，则将(12)式代入(11)式，我们得到

$$c_{\lambda,p}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\|u_n\|_H^2+\frac{1}{15}|u_n|_6^6\right)\geqslant\frac{2}{5}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}S^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{15}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}S^{\frac{3}{2}}$$

这与已知条件相矛盾. 因此(10)式成立.

下面，我们证明山路值 $c_{\lambda,p}$ 满足引理4的假设条件. 定义 $\psi(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3,[0,1])$ 满足：$\psi(x)\equiv 1$ $(x\in B_1(0))$，且 $\psi(x)\equiv 0$ $(x\in\mathbb{R}^3\backslash B_2(0))$. 令 $v_\varepsilon(x)=\psi(x)u_\varepsilon(x)$，根据文献[7,9]，当 $\varepsilon\to 0^+$ 时，有：

$$|\nabla v_\varepsilon|_2^2=S^{\frac{3}{2}}+O(\varepsilon)\qquad |v_\varepsilon|_6^6=S^{\frac{3}{2}}+O(\varepsilon^3)\tag{14}$$

以及

$$|v_\varepsilon|_s^s=\begin{cases}O(\varepsilon^{\frac{s}{2}}) & 2\leqslant s<3\\ O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}|\log\varepsilon|) & s=3\\ O(\varepsilon^{\frac{6-s}{2}}) & 3<s<6\end{cases}\tag{15}$$

引理 5　对任意的 $\lambda>0$ 以及 $4<p<6$，或对充分大的 $\lambda>0$ 以及 $2<p\leqslant 4$，均有 $c_{\lambda,p}\in(0,c_*)$，其中

$$c_*=\left[\frac{2}{5}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{15}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]S^{\frac{3}{2}}$$

证　显然，$c_{\lambda,p}>0$. 我们只需证明 $c_{\lambda,p}<c_*$. 对任意的 $u\in H^1(\mathbb{R}^3)$，由 Young -不等式可得

$$\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\phi_u\cdot\nabla|u|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\sqrt{5}+1}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u|u|^5\mathrm{d}x+\frac{\sqrt{5}+1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$$

由此，我们推断出

$$\begin{aligned}I_{\lambda,p}(u)\leqslant&\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}+3}{20}\right)\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}u^2\mathrm{d}x-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{10}-\frac{1}{6}\right)\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x=\\&\frac{\sqrt{5}+13}{20}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{3\sqrt{5}-2}{30}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}u^2\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x=J_{\lambda,p}(u)\end{aligned}$$

于是，为了证明 $c_{\lambda,p}<c_*$，我们只需找到某个函数 $v\in H^1(\mathbb{R}^3)$，使得

$$\sup_{t\geqslant 0}J_{\lambda,p}(tv)<c_*$$

为此，取 tv_ε 为泛函 $J_{\lambda,p}$ 的测试函数，其中 $t\geqslant 0$，$\varepsilon>0$. 注意到 0 是 $J_{\lambda,p}(tv_\varepsilon)$ 在 $t=0$ 处的局部极小值，并且当 $t\to+\infty$ 时，$J_{\lambda,p}(tv_\varepsilon)\to-\infty$，所以存在某个 $t_\varepsilon>0$，满足

$$J_{\lambda,p}(t_\varepsilon v_\varepsilon)=\max_{t\geqslant 0}J_{\lambda,p}(tv_\varepsilon)$$

进一步，我们不难证明 t_ε 是唯一的，并且存在 $\varepsilon_1>0$ 以及 $T_1,T_2>0$，使得对任意的 $0<\varepsilon<\varepsilon_1$，均有 $T_1\leqslant t_\varepsilon\leqslant T_2$. 于是，由(14) 式我们推断出

$$\begin{aligned}J_{\lambda,p}(t_\varepsilon v_\varepsilon)=&\frac{(\sqrt{5}+13)t_\varepsilon^2}{20}|\nabla v_\varepsilon|_2^2-\frac{(3\sqrt{5}-2)t_\varepsilon^6}{30}|v_\varepsilon|_6^6+\frac{t_\varepsilon^2}{2}|v_\varepsilon|_2^2-\frac{\lambda t_\varepsilon^p}{p}|v_\varepsilon|_p^p\leqslant\\&\max_{t\geqslant 0}\left[\frac{(\sqrt{5}+13)t_\varepsilon^2}{20}|\nabla v_\varepsilon|_2^2-\frac{(3\sqrt{5}-2)t_\varepsilon^6}{30}|v_\varepsilon|_6^6\right]+\frac{t_\varepsilon^2}{2}|v_\varepsilon|_2^2-\frac{\lambda t_\varepsilon^p}{p}|v_\varepsilon|_p^p=\\&\frac{(\sqrt{5}+13)^{\frac{3}{2}}}{30(6\sqrt{5}-4)^{\frac{1}{2}}}\frac{|\nabla v_\varepsilon|_2^3}{|v_\varepsilon|_6^3}+\frac{t_\varepsilon^2}{2}|v_\varepsilon|_2^2-\frac{\lambda t_\varepsilon^p}{p}|v_\varepsilon|_p^p\leqslant\\&\frac{(\sqrt{5}+13)^{\frac{3}{2}}S^{\frac{3}{2}}}{30(6\sqrt{5}-4)^{\frac{1}{2}}}+\frac{T_2^2}{2}|v_\varepsilon|_2^2-\frac{\lambda T_1^p}{p}|v_\varepsilon|_p^p+O(\varepsilon)=\\&\left[\frac{2}{5}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{15}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]S^{\frac{3}{2}}-h_{\lambda,p}(\varepsilon)\end{aligned}$$

其中

$$h_{\lambda,p}(\varepsilon)=\frac{\lambda T_1^p}{p}|v_\varepsilon|_p^p-\frac{T_2^2}{2}|v_\varepsilon|_2^2-O(\varepsilon)$$

下面，我们分 3 种情形来证明：对充分小的 $\varepsilon>0$，均有 $h_{\lambda,p}(\varepsilon)>0$.

情形 1　$4<p<6$. 由(15) 式可得，对充分小的 $0<\varepsilon<\min\{1,\varepsilon_1\}$ 以及任意的 $\lambda>0$，有

$$h_{\lambda,p}(\varepsilon)\geqslant\frac{\lambda T_1^p}{p}\int_{B_\varepsilon(0)}\frac{3^{\frac{p}{4}}\varepsilon^{\frac{p}{2}}}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{\frac{p}{2}}}\mathrm{d}x-O(\varepsilon)\geqslant C_3\lambda\varepsilon^{3-\frac{p}{2}}-O(\varepsilon)$$

注意到 $0<3-\dfrac{p}{2}<1$，于是我们推断出，对充分小的 $\varepsilon>0$，有 $h_{\lambda,p}(\varepsilon)>0$.

情形 2　$3<p\leqslant 4$. 取 $\lambda=\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$，由(15) 式，对充分小的 $0<\varepsilon<\varepsilon_1$，我们有

$$h_{\lambda,p}(\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{\frac{5-p}{2}}\right)-O(\varepsilon)$$

注意到$\frac{1}{2} \leqslant \frac{5-p}{2} < 1$，于是我们推断出，对充分小的$\varepsilon > 0$，有$h_{\lambda,p}(\varepsilon) > 0$.

情形 3　重复情形 2 的讨论，取$\lambda = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$，利用(15)式我们可以证明：当$2 < p < 3$或者$p = 3$时，对充分小的$\varepsilon > 0$，均有$h_{\lambda,p}(\varepsilon) > 0$. 于是，引理 5 得证.

为了证明基态解的存在性，我们定义如下的 Pohožaev 流形以及相应的基态能量：

$$\mathscr{M}_{\lambda,p} = \{u \in H^1(\mathbb{R}^3)\backslash\{0\}: \mathscr{P}_{\lambda,p}(u) = 0\}$$

$$m_{\lambda,p} = \inf_{u \in \mathscr{M}_{\lambda,p}} I_{\lambda,p}(u)$$

引理 6　对任意的$2 < p < 6$以及任意的$\lambda > 0$，均有$m_{\lambda,p} \geqslant c_{\lambda,p}$，其中$c_{\lambda,p}$由(7)式定义.

证　任取$u \in \mathscr{M}_{\lambda,p}$，定义$u_t(\cdot) = u\left(\frac{\cdot}{t}\right)$，$t > 0$且$u_0(\cdot) = 0$，我们有

$$I_{\lambda,p}(u_t) = I_{\lambda,p}(u_t) - \frac{t^3}{3}\mathscr{P}_{\lambda,p}(u) = \left(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{6}\right)\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^5}{10}\right)\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u |u|^5 \mathrm{d}x$$

显然，$t = 1$是函数$I_{\lambda,p}(u_t)$在$[0, +\infty)$上唯一的最大值点. 注意到当$t \to +\infty$时，$I_{\lambda,p}(u_t) \to -\infty$，则必存在充分大的正数$t_\infty$，使得$I_{\lambda,p}(u_{t_\infty}) < 0$. 令$\gamma_0(t) = u_{tt_\infty}$，则$\gamma_0 \in \tilde{\Gamma}_{\lambda,p}$. 于是，由(5)式及$c_{\lambda,p} = \tilde{c}_{\lambda,p}$可知

$$I_{\lambda,p}(u) = \sup_{t \geqslant 0} I_{\lambda,p}(u_t) = \sup_{t \geqslant 0} I_{\lambda,p}(u_{tt_\infty}) = \sup_{t \geqslant 0} I_{\lambda,p}(\gamma_0(t)) \geqslant c_{\lambda,p}$$

因此，由u在$\mathscr{M}_{\lambda,p}$中的任意取法，我们推断出$m_{\lambda,p} \geqslant c_{\lambda,p}$.

定理 1 的证明　结合引理 2、引理 3 以及引理 5，对任意的$\lambda > 0$及$4 < p < 6$，或者对充分大的$\lambda > 0$及$2 < p \leqslant 4$，泛函$I_{\lambda,p}$均有$(\mathrm{PC})_{c_{\lambda,p}}$序列$\{u_n\} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$，其中$c_{\lambda,p} < c_*$. 首先，我们证明$\{u_n\}$在$H^1(\mathbb{R}^3)$中有界. 事实上，由(6)式我们有

$$c_{\lambda,p} + o(1) = I_{\lambda,p}(u_n) - \frac{1}{3}\mathscr{P}_{\lambda,p}(u_n) = \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{15}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} |u_n|^5 \mathrm{d}x \tag{16}$$

以及

$$c_{\lambda,p} + o(1) = I_{\lambda,p}(u_n) - \frac{1}{2}\langle I'_{\lambda,p}(u_n), u_n\rangle \geqslant -\frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^6 \mathrm{d}x + \lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^p \mathrm{d}x \tag{17}$$

结合(16),(17)式以及(2)式，由$\langle I'_{\lambda,p}(u_n), u_n\rangle = o(1)$可得

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 + u_n^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} |u_n|^5 \mathrm{d}x + \lambda\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^p \mathrm{d}x + o(1) \leqslant C_4$$

因此，$\{u_n\}$在$H^1(\mathbb{R}^3)$中有界，则必存在函数$u \in H^1(\mathbb{R}^3)$，使得在$\{u_n\}$的子列意义下，$u_n \rightharpoonup u$. 接下来，我们分 2 步完成定理 1 的证明：

步骤 1　证明存在函数$v \in H^1(\mathbb{R}^3)\backslash\{0\}$，满足$v \geqslant 0$且$I'_{\lambda,p}(v) = 0$.

如果$u = 0$，根据引理 4 与引理 5，存在常数$r, \eta > 0$以及序列$\{y_n\} \subset \mathbb{R}^3$，使得$|y_n| \xrightarrow{n} \infty$且(10)式成立. 令$v_n(\cdot) = u_n(\cdot + y_n)$，因为$\|v_n\|_H = \|u_n\|_H$，则由 Rellich 嵌入定理[7]，必存在函数$v \in H^1(\mathbb{R}^3)$，使得：在$\{v_n\}$的子列意义下，当$n \to \infty$时：

$$\begin{cases} v_n \rightharpoonup v & x \in H^1(\mathbb{R}^3) \\ v_n \to v & x \in L^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3),\ 2 \leqslant s < 6 \\ v_n(x) \to v(x) & \text{a. e. } x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{18}$$

显然，(10)式与(18)式蕴含$v \neq 0$. 为了证明$I'_{\lambda,p}(v) = 0$，注意到$C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$在$H^1(\mathbb{R}^3)$中稠密，我们只需证明，对任意的$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$，有$\langle I'_{\lambda,p}(v), \varphi\rangle = 0$. 为此，由(18)式我们知道，存在函数$\omega \in L^5(\operatorname{supp} \varphi)$，满足

$$|v_n|^{p-1}|\varphi| \leqslant |\omega|^{p-1}|\varphi| \in L^1(\operatorname{supp} \varphi)$$

于是，由(18)式以及 Lebesgue 控制收敛定理，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^{p-2} v_n \varphi \mathrm{d}x \xrightarrow{n} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^{p-2} v \varphi \mathrm{d}x \tag{19}$$

注意到$\{|v_n|^4 v_n\}$在$L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)$中有界，由(18)式得知，在$\{v_n\}$的子列意义下，$|v_n|^4 v_n \rightharpoonup |v|^4 v$于$L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)$. 因此

$$\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^4 v_n \varphi \mathrm{d}x \xrightarrow{n} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^4 v\varphi \mathrm{d}x \tag{20}$$

由 Hölder 不等式、(2) 式以及文献[3] 的引理 2.1-(ⅴ) 可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |\phi_{v_n}(|v_n|^3 v_n - |v|^3 v)|^{\frac{6}{5}} \mathrm{d}x &\leqslant 2^{\frac{6}{5}} \int_{\mathbb{R}^3} |\phi_{v_n}|^{\frac{6}{5}} \left(|v_n|^{\frac{24}{5}} + |v|^{\frac{24}{5}}\right) \mathrm{d}x \leqslant \\ & 2^{\frac{6}{5}} |\phi_{v_n}|_6^{\frac{6}{5}} \left(|v_n|_6^{\frac{24}{5}} + |v|_6^{\frac{24}{5}}\right) \leqslant \\ & C_5 \|v_n\|_D^6 \left(\|v_n\|_H^{\frac{24}{5}} + \|v\|_H^{\frac{24}{5}}\right)\end{aligned}$$

于是，结合(18) 式我们得知，在$\{v_n\}$的子列意义下，$\phi_{v_n}(|v_n|^3 v_n - |v|^3 v) \rightharpoonup 0$于$L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)$. 从而，有

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n}(|v_n|^3 v_n - |v|^3 v)\varphi \mathrm{d}x \xrightarrow{n} 0 \tag{21}$$

此外，注意到$|v|^3 v\varphi \in L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)$，由(18) 式、文献[3] 的引理 2.1-(ⅶ) 以及嵌入$D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$可得

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\phi_{v_n} |v|^3 v\varphi - \phi_v |v|^3 v\varphi) \mathrm{d}x \xrightarrow{n} 0 \tag{22}$$

结合(19)－(22) 式，由$\|\varphi(\cdot - y_n)\|_H = \|\varphi\|_H$可得

$$\langle I'_{\lambda,p}(v), \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle I'_{\lambda,p}(v_n), \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle I'_{\lambda,p}(u_n), \varphi(\cdot - y_n)\rangle = 0 \tag{23}$$

即v是泛函$I_{\lambda,p}$的非平凡临界点. 进一步，由于泛函$I_{\lambda,p}$是对称的，我们可以保证$v \neq 0$满足$v \geqslant 0$.

如果$u \neq 0$，重复(23) 式的证明，我们可以证得$u \geqslant 0$且$I'_{\lambda,p}(u) = 0$. 此时，我们令$v_n(\cdot) = u_n(\cdot + 0)$且$v = u$.

步骤 2　证明在步骤 1 中得到的非负非平凡临界点v满足$I_{\lambda,p}(v) = m_{\lambda,p} = c_{\lambda,p}$且$(v, \phi_v) > 0$.

由引理 1 可得$\mathscr{P}_{\lambda,p}(v) = 0$. 由此，结合引理 6、(4) 式、$\|\cdot\|_D^2$的弱下半连续性及文献[6] 的引理 2.1-(ⅰ)，我们有

$$\begin{aligned} c_{\lambda,p} \leqslant m_{\lambda,p} \leqslant I_{\lambda,p}(v) = I_{\lambda,p}(v) - \frac{1}{3}\mathscr{P}_{\lambda,p}(v) = \\ \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{15}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_v |v|^5 \mathrm{d}x \leqslant \\ \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_n|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{15}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_n} |v_n|^5 \mathrm{d}x\right) = \\ \liminf_{n\to\infty}\left(I_{\lambda,p}(u_n) - \frac{1}{3}\mathscr{P}_{\lambda,p}(u_n)\right) = c_{\lambda,p} \end{aligned}$$

因此，(v, ϕ_v)是系统(1) 的非负非平凡基态解. 进一步，我们证明$(v, \phi_v) > 0$. 令

$$D = \{x \in \mathbb{R}^3 : v(x) > 0\}$$

由椭圆方程的正则性理论可知$v, \phi_v \in C^2(\mathbb{R}^3)$，于是$D$是开集. 反设$\partial D \neq \varnothing$，取$x_0 \in \partial D$满足$v(x_0) = 0$，则必存在$\delta > 0$，使得$U^{\circ}(x_0; \delta) \cap D \neq \varnothing$. 不妨假设$x_1 \in U^{\circ}(x_0; \delta) \cap D$，在球$B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_1| < |x_1 - x_0| + \delta\}$上由强极大值原理可知，对任意的$x \in B$，有$v(x) > 0$，这与$x_0 \in B$且$v(x_0) = 0$相矛盾. 于是$\partial D = \varnothing$，即对任意的$x \in \mathbb{R}^3$，有$v(x) > 0$. 注意到$v \neq 0$蕴含$\phi_v > 0 (x \in \mathbb{R}^3)$，因此$(v, \phi_v)$是系统(1) 的正基态解. 定理 1 得证.

参考文献：

[1]　AZZOLLINI A, D'AVENIA P, LUISI V. Generalized Schrödinger-Poisson Type Systems [J]. Commun Pur Appl Anal, 2017, 12(2): 867－879.

[2]　BENCI V, FORTUNATO D. An Eigenvalue Problem for the Schrödinger-Maxwell Equations [J]. Topol Methods Non-

linear Anal，1998，11(2)：283－293.

[3] LI F Y，LI Y H，SHI J P. Existence of Positive Solutions to Schrödinger-Poisson Type Systems with Critical Exponent [J]. Commun Contemp Math，2014，16(6)：1－28.

[4] 李苗苗，唐春雷. 一类带临界指数的 Schrödinger-Poisson 方程正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(4)：35－38.

[5] ZHONG X J，TANG C L. Ground State Sign-Changing Solutions for a Schrödinger-Poisson System with a Critical Nonlinearity in $\mathbb{R}^3$ [J]. Nonlinear Anal，2018，39(2)：166－184.

[6] ZHAO L G，ZHAO F K. Positive Solutions for Schrödinger-Poisson Equations with a Critical Exponent [J]. Nonlinear Anal，2009，70(6)：2150－2164.

[7] WILLEM M. Minimax Theorems [M]. Boston：Birkhäuser，1996.

[8] JEANJEAN L. Existence of Solutions with Prescribed Norm for Semilinear Elliptic Equations [J]. Nonlinear Anal，1997，28(10)：1633－1659.

[9] BRÉZIS H，NIRENBERG L. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents [J]. Commun Pure Appl Math，1983，36(4)：437－477.

Existence of Positive Ground State Solutions for a Class of Schrödinger-Poisson Systems with Double Critical Exponents

LI Yong-yong， TANG Chun-lei

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：By using the variational method and the mountain pass theorem，we prove the existence of positive ground state solutions for a class of Schrödinger-Poisson systems with double critical exponents.

Key words：Schrödinger-Poisson system；double critical exponent；variational method；mountain pass theorem；positive ground state solution

责任编辑 廖 坤