第 40 卷第 6 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2018 年 6 月
Vol. 40 No. 6　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Jun. 2018

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.06.014

带有临界指数的 Schrödinger 方程正基态解的存在性[①]

李贵东，　唐春雷

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：研究了如下带有临界非线性项的 Schrödinger 方程：

$$-\Delta u = |u|^4 u + k(x)|u|^{p-2}u \qquad x \in \Omega$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是有界开集，$p \in (2, 4)$，$k \in L^{\frac{6}{6-p}}(\Omega)$ 满足适当的局部性质. 运用 Nehari 流形，得到了方程正基态解的存在性.

关 键 词：Schrödinger 方程；临界增长；Nehari 流形；基态解

中图分类号：O176.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9868(2018)06-0092-05

考虑如下 Schrödinger 方程：

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^4 u + k(x)|u|^{p-2}u & x \in \Omega \\ u \in H_0^{\ 1}(\Omega) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是有界开集，$p \in (2, 4)$，且 k 满足以下条件：

(k_1) $k \in L^{\frac{6}{6-p}}(\Omega)$，并且 $k(x) \geqslant 0$；

(k_2) 存在 $x_0 \in \Omega$，使得

$$0 < \liminf_{x \to x_0} \frac{k(x)}{|x - x_0|^{-\beta}} \leqslant \limsup_{x \to x_0} \frac{k(x)}{|x - x_0|^{-\beta}} < +\infty$$

近年来，许多学者对方程(1)进行了广泛的研究. 当 $k \equiv 0$ 且 $\Omega = \mathbb{R}^N$ 时，文献[1-2]得到了方程(1)正解的唯一性. 文献[3]在全空间里考虑了方程(1)，假设 $p = 2$，$k \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$，且在正测度集上 $k(x) < 0$，得到了方程(1)正解的存在性. 文献[4]考虑 $k(x) = \lambda$，运用约束极小化方法，证明了当 $4 \leqslant p < 6$ 且 $\lambda > 0$ 时，或者 $2 < p < 4$ 且 λ 足够大时，方程(1)有正解. 相关问题的进一步结果可以参见文献[5-8]. 受上述文献的启发，我们将考虑当 $2 < p < 4$ 并且 $k \in L^{\frac{6}{6-p}}(\Omega)$ 时，方程(1)的正基态解的存在性. 本文的主要结果是：

定理 1　假设条件(k_1)-(k_2)成立. 若 $\beta \in \left(2 - \frac{p}{2}, 2 - \frac{p}{6}\right]$，则方程(1)至少有 1 个正的基态解.

注 1　为了方便，我们不妨假设 $x_0 = 0$. 本文将文献[4]中的常数 λ 替换成一般的函数 $k(x)$，得到了与

① 收稿日期：2017-12-26
基金项目：国家自然科学基金项目(11471267).
作者简介：李贵东(1990-)，男，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者：唐春雷，教授，博士研究生导师.

文献[4] 相似的结果. 由 $k(x)$ 的一般性，满足条件的函数更多. 例如：

$$k(x)=\begin{cases}1 & x\in\Omega\backslash B_{\delta}(0)\\ |x|^{\frac{p}{6}-2} & x\in B_{\delta}(0)\end{cases}$$

定义 $\mathscr{I}$：$H_0^1(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$ 为方程(1) 对应的能量泛函，即

$$\mathscr{I}(u)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{\Omega}|u|^6\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_{\Omega}k(x)|u|^p\mathrm{d}x$$

如果 $u\in H_0^1(\Omega)$，对任意的 $v\in H_0^1(\Omega)$，满足

$$\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x=\int_{\Omega}|u|^4uv\mathrm{d}x+\int_{\Omega}k(x)|u|^{p-2}uv\mathrm{d}x$$

则称 u 是方程(1) 的弱解. 形式上，泛函 $\mathscr{I}$ 的临界点都是方程(1) 的弱解. Nehari 流形定义为

$$\begin{gathered}\mathscr{N}=\{u\in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}:\langle\mathscr{I}'(u),u\rangle=0\}=\\ \left\{u\in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}:\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x=\int_{\Omega}|u|^6\mathrm{d}x+\int_{\Omega}k(x)|u|^p\mathrm{d}x\right\}\end{gathered}$$

引理 1 假设条件(k_1)－(k_2) 成立. 若 $\beta\in\left(2-\frac{p}{2},2-\frac{p}{6}\right]$，则：

(i) 对任意的 $u\in H_0{}^1(\Omega)\backslash\{0\}$，存在唯一的 $t_u>0$，使得 $t_u u\in\mathscr{N}$ 且 $\mathscr{I}(t_u u)=\max\limits_{t\in(0,+\infty)}\mathscr{I}(tu)$；

(ii) $\mathscr{I}$ 限制在 Nehari 流形 $\mathscr{N}$ 上的下界大于一个正数.

证 (i) 对任意的 $t\in(0,+\infty)$ 和 $u\in H_0{}^1(\Omega)\backslash\{0\}$，设

$$\Phi(t)=\mathscr{I}(tu)=\frac{t^2}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{t^6}{6}\int_{\Omega}|u|^6\mathrm{d}x-\frac{t^p}{p}\int_{\Omega}k(x)|u|^p\mathrm{d}x \tag{2}$$

可得

$$\langle\mathscr{I}'(tu),tu\rangle=\Phi'(t)t=t^2\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-t^6\int_{\Omega}|u|^6\mathrm{d}x-t^p\int_{\Omega}k(x)|u|^p\mathrm{d}x$$

由函数的单调性可证(i).

(ii) 由 $u\in\mathscr{N}$，可得

$$\|u\|^2\leqslant C\left(\|u\|^6+|k|_{\frac{6}{6-p}}\|u\|^p\right)$$

由 $\mathscr{N}$ 的定义，可知 $u\neq 0$. 因此存在不依赖 u 的 σ，满足 $\|u\|\geqslant\sigma>0$，同时有

$$\begin{gathered}\mathscr{I}(u)-\frac{1}{p}\langle\mathscr{I}'(u),u\rangle=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{6}\right)\int_{\Omega}|u|^6\mathrm{d}x\geqslant\\ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u\|^2\geqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\sigma^2\end{gathered}$$

因而对任意的 $u\in\mathscr{N}$，都有 $\mathscr{I}(u)\geqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\sigma^2>0$.

由引理 1，易得 $m=\inf\limits_{u\in\mathscr{N}}\mathscr{I}(u)>0$. 定义 S 为

$$S=\inf\left\{\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x:u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N),\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x=1\right\}$$

由文献[1－4，7]，S 可由函数

$$U_{\varepsilon}=C\left(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon+|x|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

达到，这里 C 是固定的正数，$\varepsilon>0$. 定义一个截断函数 $\psi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3,[0,1])$，它满足 $\psi(x)=1$，$x\in B_{\bar{\rho}}(0)$ 且 $\psi(x)=0$，$x\in\mathbb{R}^3\backslash B_{2\bar{\rho}}(0)$，这里的 $\bar{\rho}$ 是一个正数. 令 $u_{\varepsilon}=\psi U_{\varepsilon}$，定义测试函数

$$v_{\varepsilon}=\frac{u_{\varepsilon}}{\left(\int_{\Omega}|u_{\varepsilon}|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}}$$

当 ε 足够小时，根据文献[4，7]可知：

$$\int_{\Omega}|v_{\varepsilon}|^{6}\mathrm{d}x=1\qquad \int_{\Omega}|\nabla v_{\varepsilon}|^{2}\mathrm{d}x=S+O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$$

引理 2　假设条件$(\mathrm{k}_1)-(\mathrm{k}_2)$成立. 若 $\beta\in\left(2-\frac{p}{2},\ 2-\frac{p}{6}\right]$，则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{|x|<\varepsilon^{\frac{1}{2}}}k(x)|v_{\varepsilon}|^{p}\mathrm{d}x}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}=+\infty$$

证　事实上，当 $|x|<\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ 时，有

$$v_{\varepsilon}\geqslant C\left(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon+|x|^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant C_{1}\varepsilon^{-\frac{1}{4}}$$

由条件(k_2)，可得

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{|x|<\varepsilon^{\frac{1}{2}}}k(x)|v_{\varepsilon}|^{p}\mathrm{d}x}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\geqslant\liminf_{\varepsilon\to 0}C_{2}\varepsilon^{\frac{4-2\beta-p}{4}}$$

因 $\beta\in\left(2-\frac{p}{2},\ 2-\frac{p}{6}\right]$，所以 $4-2\beta-p<0$，故

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{|x|<\varepsilon^{\frac{1}{2}}}k(x)|v_{\varepsilon}|^{p}\mathrm{d}x}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}=+\infty$$

引理 3　假设条件$(\mathrm{k}_1)-(\mathrm{k}_2)$成立. 若 $\beta\in\left(2-\frac{p}{2},\ 2-\frac{p}{6}\right]$，则存在正数 t_{ε}，ε_{0}，T^{*}，满足 $t_{\varepsilon}v_{\varepsilon}\in\mathcal{N}$，且 $\varepsilon_{0}\geqslant\varepsilon$ 时 $t_{\varepsilon}\geqslant T^{*}>0$.

证　由引理 1 的(i)知 t_{ε} 存在. 事实上，只需要讨论 $t_{\varepsilon}<1$ 的情况. 由$\langle\mathscr{I}'(t_{\varepsilon}v_{\varepsilon}),\ t_{\varepsilon}v_{\varepsilon}\rangle=0$，可得

$$\int_{\Omega}|\nabla v_{\varepsilon}|^{2}\mathrm{d}x\leqslant t_{\varepsilon}^{p-2}\left(1+\int_{\Omega}k(x)|v_{\varepsilon}|^{p}\mathrm{d}x\right)$$

根据 Sobolev 不等式，有

$$t_{\varepsilon}^{p-2}\geqslant\frac{S+O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})}{1+|k|_{\frac{6}{6-p}}(S+O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}))^{p}}$$

易知存在 $\varepsilon_{0}>0$，当 $\varepsilon_{0}\geqslant\varepsilon$ 时有 $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})\leqslant S$. 故 $\varepsilon_{0}\geqslant\varepsilon$ 时，有

$$t_{\varepsilon}\geqslant\left[\frac{S}{1+2^{p}|k|_{\frac{6}{6-p}}S^{p}}\right]^{\frac{1}{p-2}}=T^{*}$$

引理 4　假设条件$(\mathrm{k}_1)-(\mathrm{k}_2)$成立. 若 $\beta\in\left(2-\frac{p}{2},\ 2-\frac{p}{6}\right]$，则 $m<\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$.

证　对任意的 $t\in(0,+\infty)$，设

$$\Psi(t)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla tv_{\varepsilon}|^{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{\Omega}|tv_{\varepsilon}|^{6}\mathrm{d}x=\frac{t^{2}}{2}\int_{\Omega}|\nabla v_{\varepsilon}|^{2}\mathrm{d}x-\frac{t^{6}}{6}$$

则 $t_{*}=\left|\int_{\Omega}|\nabla v_{\varepsilon}|^{2}\mathrm{d}x\right|^{\frac{1}{4}}$ 时，有

$$\Psi(t_{*})=\sup_{t\in(0,+\infty)}\Psi(t)=\frac{1}{3}\left(\int_{\Omega}|\nabla v_{\varepsilon}|^{2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}+O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$$

由 m 的定义和$\int_{\Omega\setminus\{|x|<\varepsilon^{\frac{1}{2}}\}}k(x)|v_{\varepsilon}|^{p}\mathrm{d}x\geqslant 0$，可知

$$
\begin{aligned}
m \leqslant{} & \mathscr{I}(t_\varepsilon v_\varepsilon) = \\
& \frac{t_\varepsilon^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x - \frac{t_\varepsilon^6}{6} - \frac{t_\varepsilon^p}{p}\int_\Omega k(x)|v_\varepsilon|^p \mathrm{d}x \leqslant \\
& \Psi(t_*) - \frac{t_\varepsilon^p}{p}\int_{|x|<\varepsilon^{\frac{1}{2}}} k(x)|v_\varepsilon|^p \mathrm{d}x - \frac{t_\varepsilon^p}{p}\int_{\Omega\setminus\{|x|<\varepsilon^{\frac{1}{2}}\}} k(x)|v_\varepsilon|^p \mathrm{d}x \leqslant \\
& \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) - \frac{t_\varepsilon^p}{p}\int_{|x|<\varepsilon^{\frac{1}{2}}} k(x)|v_\varepsilon|^p \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

根据引理 2－3，可得 ε 足够小时 $m < \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$.

定理 1 的证明 由文献[7]的定理 8.5，可得到$(\mathrm{PS})_m$ 序列$\{u_n\}$，即：

$$
\mathscr{I}(u_n) \to m \qquad \mathscr{I}'(u_n) \to 0
$$

不妨假设 $u_n(x) \geqslant 0$ (a.e. $x \in \Omega$). 序列$\{u_n\}$显然是有界的，则存在 $u \in H_0^1(\Omega)$，满足 $u_n \rightharpoonup u$ ($x \in H_0^1(\Omega)$). 假设 $u=0$，那么根据条件(k_1)，可得

$$
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega k(x)|u_n|^p \mathrm{d}x = \int_\Omega k(x)|u|^p \mathrm{d}x = 0 \tag{3}
$$

由$\langle \mathscr{I}'(u_n), u_n\rangle = 0$，当 $n \to \infty$ 时，有

$$
\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega |u_n|^6 \mathrm{d}x + \int_\Omega k(x)|u_n|^p \mathrm{d}x = \int_\Omega |u_n|^6 \mathrm{d}x + o(1)
$$

由 Sobolev 不等式，可知

$$
\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x \leqslant S^{-3}\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x\right)^3 + o(1)
$$

可得

$$
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x = 0
$$

或者

$$
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x \geqslant S^{\frac{3}{2}}
$$

如果

$$
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x = 0
$$

那么由引理 1(ii) 的证明过程可得

$$
m = \lim_{n\to\infty}\mathscr{I}(u_n) = 0
$$

这与引理 1(ii) 矛盾. 如果

$$
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x \geqslant S^{\frac{3}{2}}
$$

那么由(3) 式可得

$$
\begin{aligned}
m ={} & \lim_{n\to\infty}\mathscr{I}(u_n) = \\
& \lim_{n\to+\infty}\mathscr{I}(u_n) - \frac{1}{6}\langle \mathscr{I}'(u_n), u_n\rangle = \\
& \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{p}\right)\int_\Omega k(x)|u|^p \mathrm{d}x = \\
& \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x + o(1) \geqslant \\
& \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

这与引理 4 矛盾. 故假设不成立，即 $u \neq 0$. 由 $\mathscr{I}'(\cdot)$ 的弱连续性得，u 是方程(1) 的非平凡解. 因

$$m \leqslant \mathscr{I}(u) \leqslant \liminf_{n \to \infty} \mathscr{I}(u_n) = m$$

故 $\mathscr{I}(u) = m$. 结合强极大值原理可得 u 是正的. 再由 m 的定义，即证 u 是方程(1) 的正基态解.

参考文献：

[1] AUBIN T. Problèmes Isoperimetriques et Espaces de Sobolev [J]. J Differential Geom，1976，11(4)：573－598.

[2] TALENTI G. Best Constant in Sobolev Inequality [J]. Ann Mat Pura Appl，1976，110(1)：353－372.

[3] BENCI V，CERAMI G. Existence of Positive Solutions of the Equation $-\Delta u + a(x)u = u^{(N+2)/(N-2)}$ in $\mathbb{R}^3$ [J]. J Funct Anal，1990，88(1)：90－117.

[4] BRÉZIS H，NIRENBERG L. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents [J]. Comm Pure Appl Math，1983，36(4)：437－477.

[5] LEI C Y，SUO H M，CHU C M，et al. On Ground State Solutions for a Kirchhoff Type Equation with Critical Growth [J]. Comput Math Appl，2016，72(3)：729－740.

[6] LEI C Y，SUO H M，CHU C M，et al. On Kirchhoff Type Problems Involving Critical and Singular Nonlinearities [J]. Ann Polon Math，2015，114(3)：269－291.

[7] WILLEM M. Minimax Theorems [M]. Boston：Birkhäuser，1996.

[8] 李苗苗，唐春雷. 一类带临界指数的 Schrödinger-Poisson 方程正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(4)：35－38.

Existence of a Positive Ground State Solution for Schrödinger Equations with a Critical Term

LI Gui-dong，　TANG Chun-lei

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，the following Schrödinger equation with a critical term is studied：

$$-\Delta u = |u|^4 u + k(x)|u|^{p-2}u \qquad x \in \Omega$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is a bounded open set，$p \in (2, 4)$，and $k \in L^{\frac{6}{6-p}}(\Omega)$ satisfies suitable local properties. The existence of a positive ground state solution is obtained by using the Nehari manifold.

Key words：Schrödinger equation；critical growth；Nehari manifold；ground state solution

责任编辑　廖　坤

崔玉洁