DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.07.015

向量优化中 E 超有效解的最优性条件①

林　安[1]，　刘学文[2]

1. 重庆师范大学涉外商贸学院，数学与计算机学院，重庆 401520；
2. 重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331

摘要：基于改进集而提出的向量优化问题的 E-超有效性是对经典的超有效性概念的重要推广. 在实局部凸拓扑线性空间中，利用邻近 E-次似凸性建立了向量优化问题 E-超有效解的一些最优性必要与充分条件，推广了一些已有结果到近似解.

关　键　词：向量优化；E-超有效性；邻近 E-次似凸性；最优性条件

中图分类号：O221.6　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1673-9868(2018)07-0101-05

向量优化问题研究是运筹与优化研究领域中十分重要的研究方向. 在向量优化问题研究中，基于序锥而定义的各类解概念及其性质具有十分重要的作用，其中有效解和弱有效解是最基本的两类解概念. 近年来，一些学者为了对有效解与弱有效解进行限制而提出了向量优化问题各类真有效解的概念. 特别地，文献[1]定义了超有效性概念. 超有效性统一了很多已知的真有效性概念，并具有非常漂亮的一些性质. 文献[2]将超有效性概念从赋范线性空间推广到了一般实局部凸拓扑向量空间，并讨论了超有效点与其它真有效点之间的一些关系.

最近，基于文献[3]中提出的改进集，对向量优化问题的近似解定义及其性质开展了一系列研究[4-6]. 值得注意的是改进集是在统一框架下研究向量优化问题精确与近似解及其性质的重要工具. 特别地，文献[7]利用改进集提出了一类统一的真有效性—E-超有效性，并在邻近 E-次似凸性假设条件下建立了这类统一解的线性标量化定理和拉格朗日乘子定理等. E-超有效性包含了经典的超有效性作为其特例，统一了很多已知的真有效性和近似真有效性概念. 受文献[6-8]的启发，本文主要利用文献[8]中思想，在局部凸拓扑向量空间中，基于邻近 E-次似凸性假设建立了 E-超有效性的一些最优性必要条件和最优性充分条件.

1　预备知识

假定 Y 是实局部凸拓扑向量空间，Y^* 是 Y 的拓扑对偶空间. $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧式空间，$\mathbb{R}^n_+$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的非负象限锥. K 为 Y 中的点闭凸锥. 设 $A \subseteq Y$，$\operatorname{int} A$，$\operatorname{cl} A$，$\operatorname{cone} A$ 分别表示集合 A 的拓扑内部、拓扑闭包和锥包. $A \subseteq Y$ 的对偶锥定义为

$$A^* = \{f \in Y^* \mid f(y) \geqslant 0,\ \forall y \in A\}$$

定义 1[3]　设非空集合 $E \subseteq Y$. 若 E 满足 $0 \notin E$ 且 $E + K = E$，则称 E 是关于 K 的改进集. Y 中的改进集全体记为 $\mathcal{T}_Y$.

---

① 收稿日期：2017-01-17
基金项目：重庆市科委重点项目(cstc2015jcyjBX0029)；重庆师范大学校级科研项目(KY2017003).
作者简介：林　安(1991-)，女，硕士，助教，主要从事向量优化理论与方法的研究.
通信作者：刘学文，教授.

定义 2[4] 设 $E \subseteq Y$ 为改进集. 称 $A \subseteq Y$ 是邻近 E-次似凸的，若 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+E))$ 是凸集.

定义 3[7] 设 $E \subseteq Y$ 为改进集且 $A \subseteq Y$. 称 $\bar{y} \in A$ 为 A 的 E-超有效点，记作 $\bar{y} \in SE(A, E)$，若对任意 $V \in N(0)$，存在 $U \in N(0)$ 使得

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+E-\bar{y})) \cap (U-K) \subseteq V$$

例 1 令 $Y=\mathbb{R}^2$，$K=\mathbb{R}_+^2$，$E=\{(x_1, x_2): x_1+x_2 \geqslant 1, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}$ 且

$$A=\{(x_1, x_2): x_1+x_2 \leqslant 1, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}$$

显然 E 关于 K 是改进集且

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+E))=\mathrm{cl}(\mathrm{cone}E)=\mathbb{R}_+^2$$

对任意 $V \in N(0)$，只要 $U \in N(0)$ 足够小，则有 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+E)) \cap (U-K) \subseteq V$. 于是可得 $0 \in SE(A, E)$.

注 1 $\bar{y} \in SE(A, E)$ 当且仅当对任意 $V \in N(0)$，存在 $U \in N(0)$ 使得

$$\mathrm{cone}(A+E-\bar{y}) \cap (U-K) \subseteq V$$

文献[7]指出了 E-超有效性与文献[6]中提出的 E-Benson 真有效性之间的关系.

注 2 若 $\bar{y} \in SE(A, E)$，则 $\bar{y} \in BE(A, E)$，其中 $BE(A, E)$ 表示 A 的 E-Benson 真有效点全体.

注 3 若 $E=K \backslash \{0\}$，则定义 3 与文献[2]中提出的超有效点概念一致.

引理 1[9] $A \subseteq Y$ 有界当且仅当对任意的 $f \in Y^*$，均有 $\sup\{|f(x)|: y \in A\}<+\infty$.

2 主要结果

定理 1 设 $A \subseteq Y$，$E \in \mathscr{T}_Y$ 且 $\bar{y} \in SE(A, E)$. 若 $A-\bar{y}$ 是邻近 E-次似凸的，则

$$Y^*=(A+E-\bar{y})^*-K^*$$

证 对于 $f \in Y^*$，由 f 在 0 点连续可知，存在 $V \in N(0)$ 使得

$$|f(y)|<1 \qquad \forall y \in V \tag{1}$$

对上述 V，根据定义 3 可得，存在凸对称零邻域 $U \in N(0)$ 且 $U \subseteq V$ 使得

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+E-\bar{y})) \cap (U-K) \subseteq V \tag{2}$$

令 $Z=Y \times Y \times \mathbb{R}$，定义 Z 中的子集如下：

$$Q=\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+E-\bar{y})) \times K \times \mathbb{R}_+^1;\ S=\{(y, -y, -f(y)): y \in Y\}$$

$$W=\{(u, v, \lambda): u, v \in U_\xi \text{ 且 } |\lambda|<2\}$$

其中 $U_\xi \in N(0)$ 是凸对称的零邻域且 $U_\xi+U_\xi \subseteq U$. 由 $A-\bar{y}$ 的邻近 E-次似凸性可知 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+E-\bar{y}))$ 是凸集，即 Q 是凸锥. 此外，易得 S 是 Z 的线性子空间，W 是凸对称吸收集.

若 $u, v \in U_\xi$ 满足 $y+u \in \mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+E-\bar{y}))$ 且 $v-y \in K$，则 $y \in -u+\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+E-\bar{y}))$，$y \in v-K$. 于是，存在 $d \in \mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+E-\bar{y}))$，$k \in K$ 使得 $y=-u+d=v-k$，即

$$y+u=v+u-k=d$$

因为 $u+v \in U_\xi+U_\xi \subseteq U$，所以有

$$y+u \in \mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+E-\bar{y})) \cap (U-K)$$

由(2)式可得 $y+u \in V$. 再由(1)式可得 $|f(y+u)|<1$. 从而由 $u \in U_\xi \subseteq V$ 有

$$|f(y)|<|f(u)|+1<2 \tag{3}$$

于是，可得下式成立

$$(S+W-(0, 0, 4)) \cap Q=\varnothing \tag{4}$$

否则，存在 $(y, -y, -f(y)) \in S$，$(u, v, \lambda) \in W$ 满足

$$(y+u, -y+v, -f(y)+\lambda-4) \in Q$$

于是有 $y+u \in \mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+E-\bar{y}))$，$-y+v \in K$ 且

$$-f(y)+\lambda+4 \geqslant 0 \tag{5}$$

此外，由(3)式和 $|\lambda|<2$ 可得

$$-f(y)+\lambda-4<|f(y)|-2\leqslant 2-2=0$$

这与(5)式矛盾. 因此，(4)式成立. 由于 $(0,0,0)\in \mathrm{int}W$，则

$$\mathrm{int}(S+W-(0,0,4))\neq\varnothing$$

此外，Q 和 $(S+W-(0,0,4))$ 显然是凸集，故存在 $0\neq\varphi\in Z^*$ 使得

$$\sup\varphi(S+W-(0,0,4))\leqslant\inf\varphi(Q)$$

根据 Q 是锥，可得 $\varphi\in Q^*$ 且 $\varphi(\gamma)\leqslant 0$，$\forall\gamma\in(S+W-(0,0,4))$. 由于 $\varphi\neq 0$，故存在点 $w\in W$ 使得 $\varphi(w)>0$，于是 $\varphi(0,0,4)>0$. 不妨设 $\varphi(0,0,1)=1$. 由此可得 $\sup\varphi(S)\leqslant 4$ 且因 $\varphi(S)$ 有上界，故有 $\varphi(S)=\{0\}$. 令

$$\varphi(y,0,0)=g(y)\qquad\varphi(0,y,0)=h(y)\qquad y\in Y$$

于是

$$\varphi(x,y,\lambda)=g(x)+h(y)+\lambda\qquad\forall(x,y,\lambda)\in Z$$

由 $\varphi(q)\geqslant 0$，$\forall q\in Q$ 得

$$g\in\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+E-\bar{y}))^*=(A+E-\bar{y})^*\qquad h\in K^*$$

由于

$$\varphi(S)=\{0\}$$

故有

$$f(y)=g(y)-h(y)\qquad y\in Y$$

即

$$f\in(A+E-\bar{y})^*-K^*$$

注 4　若 A 为凸集且 $E=K\setminus\{0\}$，则定理 1 退化为文献[8]中的定理 2.1. 事实上，根据文献[10]中的命题 4.1(ii)可得

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+E-\bar{y}))=\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+K\setminus\{0\}-\bar{y}))\subseteq\\ \mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+K-\bar{y}))=\\ \mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+\mathrm{int}K-\bar{y}))\subseteq\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+K\setminus\{0\}-\bar{y}))\end{aligned}$$

于是有

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+K\setminus\{0\}-\bar{y}))=\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+K-\bar{y}))$$

此外，

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A-\bar{y}))\subseteq\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+K-\bar{y}))$$

进而有

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A-\bar{y}))\subseteq\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+K\setminus\{0\}-\bar{y}))$$

于是

$$(\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+K\setminus\{0\}-\bar{y})))^*\subseteq(\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A-\bar{y})))^*$$

由定理 1 得

$$Y^*=(A+E-\bar{y})^*-K^*$$

则

$$\begin{aligned}Y^*=(A+E-\bar{y})^*-K^*=\\ (A+K\setminus\{0\}-\bar{y})^*-K^*=\\ (\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A+K\setminus\{0\}-\bar{y})))^*-K^*\subseteq(\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(A-\bar{y})))^*-K^*=(A-\bar{y})^*-K^*\end{aligned}$$

因此

$$Y^*=(A-\bar{y})^*-K^*$$

这就表明定理 1 退化到了文献[8]中的定理 2.1.

定理 2 设 Y 局部有界，$A \subseteq Y$，$E \in \mathscr{T}_Y$，$\bar{y} \in A$. 若 $(A+E-\bar{y})^* - K^* = Y^*$，则 $\bar{y} \in SE(A, E)$.

证 由 Y 是实局部凸局部有界拓扑线性空间以及文献[8]可知，存在凸有界集 $U_0 \in N(0)$. 此外，$\mathrm{cone}(A+E-\bar{y}) \cap (U_0 - K)$ 是有界集. 否则，存在网 $\{t_\alpha(y_\alpha - e_\alpha - \bar{y}) = u_\alpha - k_\alpha : \alpha \in I\}$ 是无界集，其中

$$t_\alpha > 0,\ y_\alpha \in A,\ e_\alpha \in E,\ u_\alpha \in U_0,\ k_\alpha \in K$$

由 $\{u_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq U_0$，得 $\{u_\alpha : \alpha \in I\}$ 有界. 进而可得 $\{k_\alpha : \alpha \in I\}$ 无界. 根据引理 1，存在 $f_0 \in Y^*$ 使得

$$\sup\{|f_0(k_\alpha)| : \alpha \in I\} = +\infty$$

不失一般性，假设 $f_0(k_\alpha) \to +\infty$. 由于

$$f_0 \in Y^* = (A+E-\bar{y})^* - K^*$$

则存在 $g \in (A+E-\bar{y})^*$ 和 $h \in K^*$ 使得 $f_0 = g - h$. 因此 $g = f_0 + h$. 由 $g \in (A+E-\bar{y})^*$ 及 g 在有界集 U_0 上连续可得

$$\begin{aligned} 0 \leqslant g(t_\alpha(y_\alpha - e_\alpha - \bar{y})) = g(u_\alpha - k_\alpha) = g(u_\alpha) - g(k_\alpha) \leqslant \\ \sup g(U_0) - f_0(k_\alpha) - h(k_\alpha) \leqslant \sup g(U_0) - f_0(k_\alpha) \to -\infty \end{aligned}$$

矛盾. 于是 $\mathrm{cone}(A+E-\bar{y}) \cap (U_0 - K)$ 有界. 对任意 $V \in N(0)$，存在 $t > 0$ 使得

$$\mathrm{cone}(A+E-\bar{y}) \cap (U_0 - K) \subseteq tV$$

因此

$$\mathrm{cone}(A+E-\bar{y}) \cap (U_0/t - K) \subseteq V$$

从而由注 1 可知，$\bar{y} \in SE(A, E)$.

注 5 定理 2 推广了文献[1]中的命题 2.2，文献[8]中的定理 2.2. 事实上，若取 $E = K \backslash \{0\}$，则根据注 4 可得

$$Y^* = (A+E-\bar{y})^* - K^* \subseteq (A-\bar{y})^* - K^*$$

于是 $(A-\bar{y})^* - K^* = Y^*$. 由定理 2 得 $\bar{y} \in SE(A, E)$. 根据注 3 有 $\bar{y}$ 就是文献[2]中定义的超有效点. 于是，定理 1 退化为文献[8]中的定理 2.2.

文献[8]中在锥是 self-allied 集的条件下获得了超有效性的最优性条件，其中 A 是 self-allied 集是指：$A \subseteq Y$，如果 $V \in N(0)$，存在 $U \in N(0)$ 且 $U \subseteq V$ 满足若 $x, y \in A$ 且 $x + y \in U$，则 $x, y \in U$.

推论 1 设 Y 局部有界，$K \subseteq Y$ 是 self-allied 闭凸点锥. 若 $A \subseteq Y$，$\bar{y} \in A$ 且 $A - \bar{y}$ 是邻近 E-次似凸的，则 $\bar{y} \in SE(A, E)$ 当且仅当对任意 $f \in K^*$，存在 $g \in K^*$ 使得 $g - f \in K^*$ 且

$$\inf\{g(y+e) : y \in A, e \in E\} = g(\bar{y})$$

证 若 $\bar{y} \in SE(A, E)$，根据定理 1 有

$$(A+E-\bar{y})^* - K^* = Y^*$$

故对任意 $f \in K^*$，存在 $g \in (A+E-\bar{y})^*$ 和 $h \in Y^*$ 使得 $f = g - h$. 这表明 $g - f \in K^*$ 且 $g \in K^*$. 因为 $g \in (A+E-\bar{y})^*$，故 $g(y+e-\bar{y}) \geqslant 0$，$\forall y \in A, e \in E$. 于是

$$\inf\{g(y+e) : y \in A, e \in E\} = g(\bar{y})$$

反之，若对任意 $f \in K^*$，存在 $g \in K^*$ 使得 $g - f \in K^*$ 且

$$\inf\{g(y+e) \mid y \in A, e \in E\} = g(\bar{y})$$

则有 $g \in (A+E-\bar{y})^*$ 且 $g - f = h \in K^*$. 这表明

$$K^* \subseteq (A+E-\bar{y})^* - K^* \tag{6}$$

此外，因为 Y 是实局部凸局部有界拓扑线性空间，则由文献[9]中的定理 9.3 得，存在有界绝对凸零邻域 $U \in N(0)$ 使得 $\{(1/n)U : n \in \mathbb{N}\}$ 为 Y 的零邻域基. 这意味着 Y 可度量. 注意到 K 是 self-allied 集，则 $K^* - K^* = Y^*$[8]. 根据(6)式可得

$$Y^* = K^* - K^* \subseteq (A+E-\bar{y})^* - K^* - K^* = (A+E-\bar{y})^* - K^*$$

因此，$Y^* = (A+E-\bar{y}) - K^*$. 由定理 2 可得 $\bar{y} \in SE(A, E)$.

注 6 推论 1 推广了文献[1]中的推论 2.3，文献[8]中的推论 2.1.

参考文献：

[1] BORWEIN J M，ZHUANG D. Super Efficiency in Vector Optimization [J]. Transactions of the American Mathematical Society，1993，338(1)：105－122.

[2] ZHENG X Y. Proper Efficiency in Locally Convex Topological Vector Spaces [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1997，94(2)：469－486.

[3] CHICOO M，MIGNANEGO F，PUSILLO L，et al. Vector Optimization Problems via Improvement Sets [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2011，150(3)：516－529.

[4] ZHAO K Q，YANG X M，PENG J W. Weak E-Optimal Solution in Vector Optimization [J]. Taiwanese Journal of Mathematics，2013，17(4)：1287－1302.

[5] ZHAO K Q，YANG X M. A Unified Stability Result with Perturbations in Vector Optimization [J]. Optimization Letters，2013，7(8)：1913－1919.

[6] ZHAO K Q，YANG X M. E-Benson Proper Efficiency in Vector Optimization [J]. Optimization，2015，64(4)：739－752.

[7] ZHOU Z A，YANG X M，ZHAO K Q. E-Super Efficiency of Set-Valued Optimization Problems Involving Improvement [J]. Journal of Industrial and Management Optimization，2016，12(3)：1031－1039.

[8] HU Y D，GONG X H. Super Efficiency and Its Scalarization in Topological Vector Space [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，2000，16(1)：22－26.

[9] 徐登洲，姚庆六，张华孝，等. 拓扑线性空间 [M]. 兰州：兰州大学出版社，1987.

[10] CHEN G Y，RONG W D. Characterizations of the Benson Proper Efficiency for Nonconvex Vector Optimization [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1998，98(2)：365－384.

Optimality Conditions of E-Super-efficient Solutions in Vector Optimization

LIN　An[1]，　LIU Xue-wen[2]

1. *Mathematics and Computer College，Chongqing Normal University Foreign Trade and Business College，Chongqing 401520，China；*
2. *School of Mathematical Sciences，Chongqing Normal University，Chongqing 401331，China*

Abstract：E-super efficiency defined by improvement sets is an important generalization of the classical super-efficiency in vector optimization. In this paper，by means of the nearly E-subconvexlikeness，some necessary and sufficient optimality conditions of E-super-efficient solutions are established for vector optimization problems in a real locally convex topological linear space. Our main results generalize some known results to the approximate solution case.

Key words：vector optimization；E-super efficiency；nearly E-subconvexlikeness；optimality condition

责任编辑　张　构