第 40 卷第 7 期 西 南 大 学 学 报(自然科学版) 2018 年 7 月
Vol. 40 No. 7 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Jul. 2018

DOI:10.13718/j.cnki.xdzk.2018.07.024

时变网络拓扑图下智能电网中基于优化算法的分布式调度响应[①]

张 豪, 韩易言, 吕庆国, 郑李逢, 张亚南

西南大学 电子信息工程学院, 重庆 400715

摘要:就时变网络拓扑图下智能电网中基于优化算法的分布式调度响应问题进行了研究. 利用原对偶方法将带有约束的智能电网优化问题转化为一个无约束的优化问题同时提出相应的求解算法. 该算法允许不同发电机之间采用异构常数步长进行更新,同时给出了算法的收敛速度. 理论推导表明文中所提出的算法能以线性收敛的速度达到该问题的最优解.

关 键 词:时变网络;智能电网;优化算法;原对偶算法;分布式调度响应

中图分类号:**TM73** **文献标志码**:**A** **文章编号**:1673-9868(2018)07-0177-04

由全局不等式约束、全局等式约束和全局约束集这 3 个条件相互结合而成的子优化问题是一类比较常见的分布式多智能体优化问题. 这些子问题可以独立被解决,但均需要一个协调策略来保证各个智能体最终是收敛于全局最优值,整个优化问题的目标是多个智能体合作性地去最小化一个给定的目标函数.

针对这些优化问题,由于分布式算法具有可靠性高、可扩展性强、低信道带宽的特点,吸引了许多研究者深入研究分布式优化算法,因此提出了很多的分布式优化算法(包括离散算法[1-3]、连续算法[4-7]、局域投影的分布式算法[8]、含有约束集的优化算法[9-13]),其中含有约束集的优化算法又包括分布式拉格朗日原对偶次梯度算法(DLPDS 算法)、分布式罚对偶次梯度算法(DPPDS 算法)、原对偶次梯度算法等.

从前人的研究可以看出,当前的研究很少采用分布式优化的算法求解智能电网中的调度响应问题. 本文通过结合分布式优化算法、原对偶算法以及拉格朗日方法来求解智能电网中此类带有约束的问题,给出了理论证明及推导,并给出了算法达到最优解的充分条件以及其相应的收敛速率.

1 预备工作

本文中 $\boldsymbol{I}_N$ 和 $\boldsymbol{1}_N$ 分别代表 N 维单位矩阵和所有元素为 1 的列向量. 对于任意列向量 $\boldsymbol{x}$, $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$ 表示其欧几里德范数. 函数 $f^{\otimes}(x)$ 表示 $f(x)$ 的共轭. 本文中需要用的图论知识:一个具有 N 个节点的无向时变网络拓扑图,在 k 时刻该网络拓扑可以表示为 $G(k)=(V(k), E(k), \boldsymbol{A}(k))$,其中 $V(k)$ 表示网络节点数, $E(k)\subseteq V(k)\times V(k)$ 表示边集. $\boldsymbol{A}(k)$ 表示对应该时刻的网络邻接矩阵. 如果在节点 i 和 j 之间存在边,则对应邻接矩阵元素 $a_{ij}>0$,否则 $a_{ij}=0$. 如果邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(k)$ 满足 $\boldsymbol{1}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(k)=\boldsymbol{1}_N^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{1}_N=\boldsymbol{1}_N$,则 $\boldsymbol{A}(k)$ 是双随机矩阵.

2 问题构造

分布式经济调度问题主要的目标就是系统中所有的发电机整体协作来使得网络中的成本代价降到最

① 收稿日期:2018-04-03
基金项目:国家自然科学基金项目(61403314).
作者简介:张 豪(1992-),男,硕士研究生,主要从事多智能体一致性优化,智能电网等方面等研究.

低，其等价于求解如下带有约束的优化问题：

$$\min f(\boldsymbol{x})=\sum\nolimits_{i=1}^{N} f_i(x_i),\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^N \text{ s. t. } \sum\nolimits_{i=1}^{N} x_i=M,\ l_i\leqslant x_i\leqslant u_i \qquad \forall i\in 1,\cdots,N \tag{1}$$

其中等式约束 $\sum\nolimits_{i=1}^{N} x_i=M$ 称之为耦合约束，对于每个发电机 i 的不等式约束 $l_i\leqslant x_i\leqslant u_i$ 称之为 box 约束. 并且分别用 $\Phi=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^N \mid \sum\nolimits_{i=1}^{N} x_i=M\right\}$ 和 $\chi_i=\{x_i\in\mathbb{R}\mid l_i\leqslant x_i\leqslant u_i\}$ 表示满足相应约束的集合. 对于 box 约束，用 $\chi=\chi_1\times\chi_2\times\cdots\times\chi_N$ 来表示它们的笛卡尔积，因此对于问题(1) 的最优解集可以表示为 $X^*=\chi\cap\Phi$.

通过使用拉格朗日函数 $L:\chi\times R\longrightarrow R$，问题(1) 可以写为如下形式：

$$L(\boldsymbol{x},\lambda)=\sum\nolimits_{i=1}^{N} f_i(x_i)+\lambda\left(\sum\nolimits_{i=1}^{N} x_i-M\right) \tag{2}$$

将等式(2) 进行变形可得：

$$C(\lambda)=\min_{\boldsymbol{x}\in\chi}\sum\nolimits_{i=1}^{N} f_i(x_i)+\lambda\left(\sum\nolimits_{i=1}^{N} x_i-M\right)=\sum\nolimits_{i=1}^{N}\left(-f_i^{\otimes}(-\lambda)-\lambda\frac{M}{N}\right)=$$
$$\sum\nolimits_{i=1}^{N} C_i(\lambda) \tag{3}$$

由等式(2) 可知原问题(1) 的对偶问题等价于求解

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}} C(\lambda) \tag{4}$$

也等价于求解

$$\min_{\lambda\in\mathbb{R}} \stackrel{\Delta}{=} S(\lambda) \tag{5}$$

这里

$$S_i(\lambda)=f_i^{\otimes}(-\lambda)+\lambda\frac{M}{N}$$

则我们可以用如下的分布式优化算法来求解问题(5)

$$\boldsymbol{x}(k+1)\in\arg\min_{\boldsymbol{x}\in\chi}\sum_{i\in V} f_i(x_i)+\lambda_i(k)x_i$$
$$\lambda(k+1)=\boldsymbol{A}(k)\lambda(k)-\boldsymbol{D}\beta(k)$$
$$\beta(k+1)=\boldsymbol{A}(k)\beta(k)-(\boldsymbol{x}(k+1)-\boldsymbol{x}(k)) \tag{6}$$

这里 $x_i(0)\in\chi_i$，$\lambda_i(0)\in\mathbb{R}$，$\beta_i(0)=S'_i(\lambda(0))$.

假设 1 对于任意的 $k=0,1,\cdots$，假设存在一个正整数 $B\geqslant 1$ 使得时变无向图

$$G(k)=(V,\varepsilon(k)\cup\varepsilon(k+1)\cup\cdots\cup\varepsilon(k+B-1))$$

是连通的.

假设 2 对于任意的 $i=1,\cdots,N$，函数 f_i 是可微的且 ∇f_i 是利普希茨连续的，利普希茨常数为 σ_i，也就是说，对于任意的 $x,y\in\mathbb{R}$，∇f_i 满足如下的不等式：

$$\|\nabla f_i(y)-\nabla f_i(x)\|\leqslant\sigma_i\|y-x\|$$

假设 3 对于任意的 $x,y\in\mathbb{R}$，函数 f_i，$i=1,\cdots,N$ 满足如下的不等式：

$$f_i(x)\geqslant f_i(y)+[\nabla f_i(y),x-y]+\frac{\mu_i}{2}\|x-y\|^2$$

其中 $\mu_i\in[0,+\infty)$，并且至少存在一个 $\mu_i\geqslant 0$.

假设 4 对于任意的 $k=0,1,\cdots$ 发电机之间的通信矩阵(或加权邻接矩阵)$\boldsymbol{A}(k)=[a_{ij}(k)]\in\mathbb{R}^{N\times N}$ 满足如下 3 个条件：

1) 如果$(i,j)\in\varepsilon(k)$ 且 $i\neq j$，那么 $a_{ij}(k)>0$，否则 $a_{ij}(k)=0$；

2) 对于所有的 i，$a_{ii}(k)>0$，且对于所有的 i 和 j，$\sum\nolimits_{i=1}^{N} a_{ij}(k)=\sum\nolimits_{j=1}^{N} a_{ij}(k)=1$；

3) 存在一个正整数 B 使得 $\sup\limits_{k\geqslant B-1}\delta(k)<1$ 成立，其中

$$\delta(k)=\sigma_{\max}\left\{\boldsymbol{A}_B(k)-\frac{1}{N}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\right\} \qquad \forall k\geqslant 0$$

3　主要结果

定理 1[14]　在假设 1－4 的前提下，使算法(6) 中的步长 $\alpha_{\max} = \max_i\{\alpha_i\}$ 并满足下列的关系式：

$$\alpha_{\max} \in \left(0,\ \min\left\{\frac{(1-\delta)\left(1-\delta-4\sqrt{3}\bar{\kappa}(1-\kappa_D^{-1})\right)}{10L\delta\sqrt{N}\sqrt{\bar{\kappa}}},\ \frac{1}{2\widetilde{L}}\right\}\right)$$

这里 $\kappa_D = \dfrac{\alpha_{\max}}{\alpha_{\min}}$ 是步长元素构成的对角矩阵 $\boldsymbol{D}$，

$$\bar{\kappa} = \frac{L}{\hat{u}}$$

则我们可以得到算法(6) 产生的序列$\{\lambda(k)\}$ 以线性速率 $O(r^k)$ 收敛于其最优解 λ^*，这里

$$r \in (0,\ 1)$$

$$r = \max\left\{\sqrt{12\bar{\kappa}^2(1-\kappa_D^{-1})^2 + 10L\delta\sqrt{n}\sqrt{\bar{\kappa}}\alpha_{\max}} + \delta + 2\sqrt{3}\bar{\kappa}(1-\kappa_D^{-1}),\ \sqrt{1-\frac{\alpha_{\max}\bar{\mu}}{3}}\right\}$$

$$\delta = \sup_{k\geqslant B-1}\left\{\sigma_{\max}\left\{\boldsymbol{A}_B(k) - \frac{1}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\right\}\right\} \qquad \forall k \geqslant 0$$

定理 2　在假设 1－4 的前提下，令算法(6) 中步长 α_i 满足定理(1) 要求，当序列$\{\lambda(k)\}$ 以线性速率 $O(r^k)$ 收敛于其最优解 λ^*，序列$\{x(k)\}$ 以线性速率 $O\left(\left(\dfrac{r}{2}\right)^k\right)$ 收敛于其最优解 x^*.

证　定义局部拉格朗日函数为

$$L_i(x_i,\ \lambda_i) = f_i(x_i) + \lambda_i\left(x_i - \frac{M}{N}\right) \tag{7}$$

则式(7) 可以改写成：

$$L(\boldsymbol{x},\ \lambda) = \sum\nolimits_{i=1}^{N} L_i(x_i,\ \lambda_i)$$

因为 $f_i(x)$ 是参数为$\dfrac{\mu_i}{2}$ 的强凸函数，可以推出 $L_i(x_i,\ \lambda_i)$ 也是参数为$\dfrac{\mu_i}{2}$ 的强凸参数[15]，因此，对于 $\forall x_i \in \chi_i$，可以得出

$$\sum\nolimits_{i=1}^{N}\frac{\mu_i}{2}(x_i(k+1)-x^*)^2 \leqslant L(\boldsymbol{x}^*,\ \lambda(k)) - L(\boldsymbol{x}(k+1),\ \lambda(k))$$

根据强对偶性质可以进一步得到

$$L(\boldsymbol{x}^*,\ \lambda(k)) - L(\boldsymbol{x}(k+1),\ \lambda(k)) \leqslant$$
$$\sum\nolimits_{i=1}^{N}\left(S'_i(\lambda_i(k))\,(\lambda_i(k)-\lambda^*) + \frac{1}{2\mu_i}(\lambda_i(k)-\lambda^*) + \lambda_i(k)\left(x_i^* - \frac{M}{N}\right)\right)$$

4　结　论

本文研究了无向时变拓扑图下智能电网中基于优化算法的分布式调度响应问题. 通过构造拉格朗日函数以及利用原对偶方法，将该带有约束的优化问题转化为一个无约束的优化问题，然后利用提出的分布式优化算法求解该问题，得出了保证该算法能够线性收敛到最优解的充分条件. 然而在现代电力系统的应用中，无向时变网络的协议已经不能完全满足智能电网中复杂度更高以及不对等通信条件下的发展要求. 我们将在后续的研究中考虑有向网络拓扑图下的分布式调度响应问题.

参考文献：

［1］　NEDIC A，OZDAGLAR A. Distributed Sub-Gradient Methods for Multi-Agent Optimization［J］. IEEE Transactions on Automatic Control，2009，54(1)：48－61.

［2］　韩易言，张　豪，徐自强. 有向拓扑图下基于脉冲协议的离散非线性多智能体系统一致性［J］. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(11)：58－61.

[3] OLFATI-SABER R, FAX J A, MURRAY R M. Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems [J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(1): 215-233.
[4] CHANG T H, HONG M, WANG X. Multi-Agent Distributed Optimization via Inexact Consensus ADMM [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(2): 482-497.
[5] 蒲 浩，刘衍民，黄建文，等. 具有非线性脉冲效应和反应扩散项的神经网络的指数滞后同步 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(11): 86-94.
[6] GHARESIFARD B, CORTéS J. Distributed Continuous-Time Convex Optimization on Weight-Balanced Digraphs [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(3): 781-786.
[7] LIU S, QIU Z, XIE L. Continuous-Time Distributed Convex Optimization with Set Constraints [J]. IFAC Proceedings Volumes, 2014, 47(3): 9762-9767.
[8] LI L, CHAMBERS J A, LOPES C G, et al. Distributed Estimation Over an Adaptive Incremental Network Based on The Affine Projection Algorithm [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(1): 151-164.
[9] BIANCHI P, JAKUBOWICZ J. Convergence of A Multi-Agent Projected Stochastic Gradient Algorithm for Non-Convex Optimization [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(2): 391-405.
[10] LOU Y, SHI G, JOHANSSON K H, et al. Approximate Projected Consensus for Convex Intersection Computation: Convergence Analysis and Critical Error Angle [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(7): 1722-1736.
[11] WANG J, ELIA N. Control Approach to Distributed Optimization [C] //IEEE Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. New York: IEEE Press, 2010: 557-561.
[12] YUAN D, XU S, ZHAO H. Distributed Primal - Dual Sub-Gradient Method for Multi-Agent Optimization via Consensus Algorithms [J]. IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics, 2011, 41(6): 1715-1724.
[13] ZHU M, MARTíNEZ S. On Distributed Convex Optimization under Inequality and Equality Constraints [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(1): 151-164.
[14] NEDIC A, OLSHEVSKY A, WEI S, et al. Geometrically Convergent Distributed Optimization with Uncoordinated Step-Sizes[C] //American Control Conference. New York: IEEE Press, 2017: 3950-3955.
[15] 时统业，王 斌. HG-凸函数的加权积分不等式 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2017, 35(1): 42-46.

Distributed Dispatch Response in the Smart Grid Based on Optimization Algorithm Under Time-Varying Network Topologies

ZHANG Hao, HAN Yi-yan, LÜ Qing-guo, ZHENG Li-feng, ZHANG Ya-nan

School of Electronic and Information Engineering, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, distributed dispatch response problems are investigated based on optimization algorithms in the smart grid over time-varying network topologies. The corresponding mathematical preliminaries are firstly given, then the constrained optimization problem in the smart grid is transformed into an unconstrained optimization problem with the primal dual method and, correspondingly, an algorithm for solving the problem is proposed. The algorithm allows different generators to adopt uncoordinated constant step-sizes to update the values, and its convergence speed is also given. A theoretical derivation indicates that the proposed algorithm can achieve the optimal solution at the linear convergence rate.

Key words: time-varying network; smart grid; optimization algorithm; primal dual algorithm; distributed dispatch response

责任编辑 张 枸