DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.08.010

非负矩阵 Hadamard 积谱半径上界的不等式①

钟　琴[1]，　王　妍[1]，　周　鑫[1]，　牟谷芳[2]

1. 四川大学 锦江学院 数学教学部，四川 彭山 620860；
2. 乐山师范学院 数学与信息科学学院，四川 乐山 614000

摘要：非负矩阵的 Hadamard 积是矩阵分析理论研究中的重要问题. 在 Hölder 不等式的基础上，利用相似矩阵具有相同特征值这一特点给出两个 n 阶非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 谱半径的上界，所得结果只依赖于两个非负矩阵的元素，便于计算. 数值例子表明新估计式在一定条件下改进了现有的一些结果.

关　键　词：非负矩阵；Hadamard 积；谱半径；上界

中图分类号：O151.21　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673－9868(2018)08－0077－05

非负矩阵的 Hadamard 积是特殊的矩阵乘积，在偏微分方程中的弱极小原理、概率论中的特征函数以及控制论等领域有重要的应用[1－2]. 许多专家和学者对非负矩阵 Hadamard 积的谱半径上界进行了广泛的研究，并取得了一系列的研究成果.

记 $R^{n\times n}(C^{n\times n})$ 为 n 阶实(复)矩阵的集合. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，用 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$ 表示满足所有元素 $a_{ij}\geqslant 0$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$，此时称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为非负矩阵. 用 $\rho(\boldsymbol{A})$ 表示非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in R^{n\times n}$，称 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=(a_{ij}b_{ij})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积. 关于非负矩阵 Hadamard 积谱半径的上界估计已经有很多的研究，并有一些经典的结论：

结论 1[1]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$，则

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\rho(\boldsymbol{B}) \tag{1}$$

结论 2[3]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$，则

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_{i}\{2a_{ii}b_{ii}+\rho(\boldsymbol{A})\rho(\boldsymbol{B})-a_{ii}\rho(\boldsymbol{B})-b_{ii}\rho(\boldsymbol{A})\} \tag{2}$$

结论 3[4]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$，则

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4(\rho(\boldsymbol{A})-a_{ii})(\rho(\boldsymbol{B})-b_{ii})\times(\rho(\boldsymbol{A})-a_{jj})(\rho(\boldsymbol{B})-b_{jj})]^{\frac{1}{2}}\} \tag{3}$$

文献[5－12]也对非负矩阵 Hadamard 积谱半径的上界估计进行了深入的探讨，本文继续对这个问题进行研究，结合 Hölder 不等式给出非负矩阵 Hadamard 积谱半径的一组新上界.

1　非负矩阵 Hadamard 积谱半径的上界

引理 1[1]　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in R^{n\times n}$，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 是两个对角矩阵，则有

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{DAE})\circ\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{DA})\circ(\boldsymbol{BE})=(\boldsymbol{AE})\circ(\boldsymbol{DB})=\boldsymbol{A}\circ(\boldsymbol{DBE}).$$

---

①　收稿日期：2017－06－27
基金项目：国家自然科学基金面上项目(11471225)；四川省教育厅科研项目(18ZB0364)；四川大学锦江学院青年教师科研基金项目(QNJJ－2018－A01).
作者简介：钟　琴(1982－)，女，副教授，主要从事矩阵理论及其应用的研究.

引理 2[1](Gerschgorin 圆盘定理) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值包含在如下 n 个圆盘的并之中：

$$\bigcup\left\{z\in C:\ |z-a_{ii}|\leqslant\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}|a_{ij}|\right\}$$

引理 3[13](Hölder 不等式) 设

$$\boldsymbol{y}=(y_1,\ \cdots,\ y_n)^{\mathrm{T}}\in R^n \qquad \boldsymbol{z}=(z_1,\ \cdots,\ z_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$$

为非负向量，$0<\alpha<1$. 则

$$\sum_{i=1}^{n}y_iz_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n}z_i^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}$$

定理 1 设：

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0 \qquad \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}\geqslant 0 \qquad \boldsymbol{u}=(u_1,\ \cdots,\ u_n)^{\mathrm{T}}>0 \qquad 0\leqslant\alpha\leqslant 1$$

记：

$$\widetilde{R}_i=\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}\frac{a_{ij}b_{ij}u_i}{u_j} \qquad \widetilde{C}_i=\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}\frac{a_{ji}b_{ji}u_j}{u_i}$$

则 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max\limits_{i}\{a_{ii}b_{ii}+\widetilde{R}_i^{\alpha}\widetilde{C}_i^{1-\alpha}\}$.

证 当 $\alpha=0$ 和 $\alpha=1$ 时，由 Gerschgorin 圆盘定理易得结论成立. 故设 $0<\alpha<1$. 令 $\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}(u_1,\ \cdots,\ u_n)$，因为 $\boldsymbol{u}=(u_1,\ \cdots,\ u_n)^{\mathrm{T}}>0$，所以 $\boldsymbol{U}$ 可逆. 记 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{UAU}^{-1}$，根据引理 1 有

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}\circ\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{UAU}^{-1})\circ\boldsymbol{B}=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\boldsymbol{U}^{-1}$$

所以 $\rho(\widetilde{\boldsymbol{A}}\circ\boldsymbol{B})=\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})$，这里

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}\circ\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \dfrac{a_{12}b_{12}u_1}{u_2} & \cdots & \dfrac{a_{1n}b_{1n}u_1}{u_n}\\ \dfrac{a_{21}b_{21}u_2}{u_1} & a_{22}b_{22} & \cdots & \dfrac{a_{2n}b_{2n}u_2}{u_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{a_{n1}b_{n1}u_n}{u_1} & \dfrac{a_{n2}b_{n2}u_n}{u_2} & \cdots & a_{nn}b_{nn}\end{pmatrix}$$

令 $\rho(\widetilde{\boldsymbol{A}}\circ\boldsymbol{B})=\lambda$，$\lambda$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}\neq 0$.

以下分两种情况进行证明：

情况 1 若

$$\widetilde{R}_s=\sum_{k=1,\ k\neq s}^{n}\frac{a_{sk}b_{sk}u_s}{u_k}>0 \qquad s=1,2,\cdots,n$$

由 $(\widetilde{\boldsymbol{A}}\circ\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 知，对任意的自然数 s，根据 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}(\lambda-a_{ss}b_{ss})x_s={}&\sum_{k=1,\ k\neq s}^{n}\frac{a_{sk}b_{sk}u_s}{u_k}x_k=\\ &\sum_{k=1,\ k\neq s}^{n}\left(\frac{a_{sk}b_{sk}u_s}{u_k}\right)^{\alpha}\left(\left(\frac{a_{sk}b_{sk}u_s}{u_k}\right)^{1-\alpha}x_k\right)\leqslant\\ &\left(\sum_{k=1,\ k\neq s}^{n}\left(\left(\frac{a_{sk}b_{sk}u_s}{u_k}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}\left(\sum_{k=1,\ k\neq s}^{n}\left(\left(\frac{a_{sk}b_{sk}u_s}{u_k}\right)^{1-\alpha}x_k\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}=\\ &\left(\sum_{k=1,\ k\neq s}^{n}\frac{a_{sk}b_{sk}u_s}{u_k}\right)^{\alpha}\left(\sum_{k=1,\ k\neq s}^{n}\left(\frac{a_{sk}b_{sk}u_s}{u_k}\right)x_k^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}=\\ &\widetilde{R}_s^{\alpha}\left(\sum_{k=1,\ k\neq s}^{n}\left(\frac{a_{sk}b_{sk}u_s}{u_k}\right)x_k^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}\end{aligned} \tag{4}$$

由

$$\widetilde{R}_s=\sum_{k=1,\ k\neq s}^{n}\frac{a_{sk}b_{sk}u_s}{u_k}>0\qquad s=1,2,\cdots,n$$

知，(4) 式等价于

$$\frac{\lambda-a_{ss}b_{ss}}{\widetilde{R}_s^{\alpha}}x_s\leqslant\left(\sum_{k=1,\ k\neq s}^{n}\left(\frac{a_{sk}b_{sk}u_s}{u_k}\right)x_k^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}$$

所以

$$\left(\frac{\lambda-a_{ss}b_{ss}}{\widetilde{R}_s^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}x_s^{\frac{1}{1-\alpha}}\leqslant\sum_{k=1,\ k\neq s}^{n}\left(\frac{a_{sk}b_{sk}u_s}{u_k}\right)x_k^{\frac{1}{1-\alpha}}\tag{5}$$

将(5) 式两边对 s 求和，得

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\lambda-a_{ss}b_{ss}}{\widetilde{R}_s^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}x_s^{\frac{1}{1-\alpha}}\leqslant\sum_{s=1}^{n}\ \sum_{k=1,\ k\neq s}^{n}\left(\frac{a_{sk}b_{sk}u_s}{u_k}\right)x_k^{\frac{1}{1-\alpha}}=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{C}_kx_k^{\frac{1}{1-\alpha}}\tag{6}$$

若对满足 $x_s\neq0$ 的所有 s 都有 $\left(\frac{\lambda-a_{ss}b_{ss}}{\widetilde{R}_s^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}>\widetilde{C}_s$，与(6) 式矛盾. 因此，至少有满足 $x_s\neq0$ 的 s，使得

$$\left(\frac{\lambda-a_{ss}b_{ss}}{\widetilde{R}_s^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\leqslant\widetilde{C}_s$$

也即 $\lambda\leqslant a_{ss}b_{ss}+\widetilde{R}_s^{\alpha}\widetilde{C}_s^{\ 1-\alpha}$，从而

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant a_{ss}b_{ss}+\widetilde{R}_s^{\alpha}\widetilde{C}_s^{\ 1-\alpha}\leqslant\max_i\{a_{ii}b_{ii}+\widetilde{R}_i^{\alpha}\widetilde{C}_i^{1-\alpha}\}$$

情况 2　若对某

$$\widetilde{R}_s=\sum_{k=1,\ k\neq s}^{n}\frac{a_{sk}b_{sk}u_s}{u_k}=0\qquad s=1,2,\cdots,n$$

则在 $\widetilde{R}_s=0$ 的任一行中添上一个小的正元素使 $\widetilde{\boldsymbol{A}}\circ\boldsymbol{B}$ 产生摄动，所得新矩阵的特征值包含域大于 $\widetilde{\boldsymbol{A}}\circ\boldsymbol{B}$ 的特征值包含域，并且在摄动趋于 0 的极限情形同样可推得结论成立.

推论 1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant0$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}\geqslant0$，$\boldsymbol{u}=(u_1,\ \cdots,\ u_n)^{\mathrm{T}}>0$，则：

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_i\left\{a_{ii}b_{ii}+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}\frac{a_{ij}b_{ij}u_i}{u_j}\right\}\tag{7}$$

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_i\left\{a_{ii}b_{ii}+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}\frac{a_{ji}b_{ji}u_j}{u_i}\right\}\tag{8}$$

证　在定理 1 中令 $\alpha=1$ 得(7) 式，令 $\alpha=0$ 得(8) 式.

定理 2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant0$ 具有非零行和，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}\geqslant0$，$0\leqslant\alpha\leqslant1$. 记：

$$\widetilde{R}_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}\frac{a_{ij}b_{ij}R_i(\boldsymbol{A})}{R_j(\boldsymbol{A})}$$

$$\widetilde{C}_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}\frac{a_{ji}b_{ji}R_j(\boldsymbol{A})}{R_i(\boldsymbol{A})}$$

$$R_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

则 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max\limits_i\{a_{ii}b_{ii}+\widetilde{R}_i^{\alpha}(\boldsymbol{A})\widetilde{C}_i^{1-\alpha}(\boldsymbol{A})\}$.

证　在定理 1 中取 $\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}(R_1(\boldsymbol{A}),\ \cdots,\ R_n(\boldsymbol{A}))$ 即得.

同理，若 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}\geqslant0$ 具有非零行和，取 $\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}(R_1(\boldsymbol{B}),\ \cdots,\ R_n(\boldsymbol{B}))$，显然有：

定理 3　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant0$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}\geqslant0$ 具有非零行和，$0\leqslant\alpha\leqslant1$. 记：

$$\widetilde{R}_i(\boldsymbol{B})=\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}\frac{a_{ij}b_{ij}R_i(\boldsymbol{B})}{R_j(\boldsymbol{B})}$$

$$\widetilde{C}_i(\boldsymbol{B})=\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}\frac{a_{ji}b_{ji}R_j(\boldsymbol{B})}{R_i(\boldsymbol{B})}$$

$$R_i(\boldsymbol{B})=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

则 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max\limits_i\{a_{ii}b_{ii}+\widetilde{R}_i^{\alpha}(\boldsymbol{B})\widetilde{C}_i^{1-\alpha}(\boldsymbol{B})\}$.

定理 4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$，且 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都有非零行和，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，记：

$$\widetilde{R}_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}\frac{a_{ij}b_{ij}R_i(\boldsymbol{A})}{R_j(\boldsymbol{A})}$$

$$\widetilde{C}_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}\frac{a_{ji}b_{ji}R_j(\boldsymbol{A})}{R_i(\boldsymbol{A})}$$

$$R_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$$

$$\widetilde{R}_i(\boldsymbol{B})=\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}\frac{a_{ij}b_{ij}R_i(\boldsymbol{B})}{R_j(\boldsymbol{B})}$$

$$\widetilde{C}_i(\boldsymbol{B})=\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}\frac{a_{ji}b_{ji}R_j(\boldsymbol{B})}{R_i(\boldsymbol{B})}$$

$$R_i(\boldsymbol{B})=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

则

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\min\{\max_i\{a_{ii}b_{ii}+\widetilde{R}_i^{\alpha}(\boldsymbol{A})\widetilde{C}_i^{1-\alpha}(\boldsymbol{A})\},\ \max_i\{a_{ii}b_{ii}+\widetilde{R}_i^{\alpha}(\boldsymbol{B})\widetilde{C}_i^{1-\alpha}(\boldsymbol{B})\}\}\tag{9}$$

2 数值算例

例 1 估计矩阵 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 的谱半径，其中：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&1&1\\2&5&1&1\\0&2&4&1\\1&1&1&4\end{pmatrix}\qquad\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&3&2&0\\0&1&4&3\\0&0&1&5\end{pmatrix}$$

应用文献[1]中(1)式，文献[5]中定理 6，文献[3]中(2)式，文献[4]中(3)式，文献[6]中定理 3，文献[7]中定理 1，文献[8]中定理 4.1 分别得到：

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 50.127\,4\qquad\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 39.746\,8\qquad\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 25.536\,4$$

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 25.364\,4\qquad\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 24.389\,2\qquad\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 23.636\,8\qquad\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 23.2$$

令 $\alpha=\dfrac{1}{2}$，利用(9)式得 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 21.732\,1$. 实际上，$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})=20.743\,9$.

例 2 估计矩阵 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 的谱半径，其中：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&0&2\\1&0.05&1&1\\0&1&4&0.5\\1&0.5&0&4\end{pmatrix}\qquad\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

应用文献[3]中定理 4，文献[10]中定理 2.1，文献[4]中定理 4 及文献[11]中定理 2.1，文献[12]中定理 1 分别得到：

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 17.101\,7\qquad\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 10.012\,6$$

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 11.647\,8\qquad\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 8.189\,7\qquad\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 6.477\,5$$

令 $\alpha=\dfrac{1}{2}$，应用(9)式得 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 6.449\,5$. 实际上，$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})=5.733\,9$.

3 结束语

本文给出了非负矩阵 Hadamard 积谱半径的上界估计式. 数值例子表明，在一定条件下新估计优于已有的相关结果，而且本文得到的 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})$ 的界仅仅依赖于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的元素，易于计算.

参考文献：

[1] HORN R A，JOHNSON C R. Topics in Matrix Analysis [M]. 北京：人民邮电出版社，2005.

[2] 顾幸生，刘漫丹，张凌波. 现代控制理论及应用 [M]. 上海：华东理工大学出版社，2008.

[3] FANG M Z. Bounds on Eigenvalues of Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Linear Algebra Appl，2007，425(1)：7－15.

[4] LIU Q B，CHEN G L. On Two Inequalities for the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Linear Algebra Appl，2009，431(5)：974－984.

[5] HUANG R. Some Inequalities for the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Linear Algebra Appl，2008，428(7)：1551－1559.

[6] LIU Q B，CHEN G L，ZHAO L L. Some New Bounds on the Spectral Radius of Matrices [J]. Linear Algebra Appl，2010，432(4)：936－948.

[7] 陈付彬，禹旺勋. 非负矩阵 Hadamard 积谱半径的界 [J]. 江南大学学报(自然科学版)，2014，13(1)：117－120.

[8] LI Y T，LI Y Y，WANG R W，et al. Some New Bounds on Eigenvalues of the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Linear Algebra Appl，2010，432(2)：536－545.

[9] CHENG G H. New Bounds for Eigenvalues of the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Taiwan J Math，2014，18(1)：305－312.

[10] ZHAO L L. Two Inequalities for the Hadamard Product of Matrices [J]. J Inequal Appl，2012，2012(1)：122－127.

[11] GUO Q P，LI H B，SONG M Y. New Inequalities on Eigenvalues of the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. J Inequal Appl，2013，2013：433－443.

[12] 孙德淑. 非负矩阵 Hadamard 积的谱半径上界和 M-矩阵 Fan 积的最小特征值下界的新估计 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(2)：7－11.

[13] 黄廷祝，钟守铭，李正良. 矩阵理论 [M]. 北京：高等教育出版社，2003.

Some Inequalities for the Upper Bound of the Spectral Radius of Hadamard Product of Nonnegative Matrices

ZHONG Qin[1]，　WANG Yan[1]，　ZHOU Xin[1]，　MOU Gu-fang[2]

1. Department of Mathematics，Jinjiang College of Sichuan University，Pengshan Sichuan 620860，China；

2. College of Mathematics and Information Science，Leshan Normal University，Leshan Sichuan 614000，China

Abstract：The Hadamard product of non negative matrices is an important problem in the matrix analysis theories. Based on the Hölder inequality，taking into consideration the fact that similar matrices have the same eigenvalues，this paper gives the upper bounds of the spectral radius $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ for the Hadamard product of the nonnegative matrices of order n $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$. The new bounds only depend on the entries of nonnegative matrices $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$，therefore，they are easy to calculate. Numerical examples are given to show that the new bounds have improved several existing results.

Key words：nonnegative matrix；Hadamard product；spectral radius；upper bound

责任编辑　廖　坤

崔玉洁