

保持等价关系的变换半群的组合结果^①

孙 垒

河南理工大学 数学与信息科学学院, 河南 焦作 454003

摘要: 设 $\mathcal{T}_X$ 是非空集合 X 上的全变换半群, E 是 X 上的 (n, m) -型等价关系, 则

$$T_E(X) = \{f \in \mathcal{T}_X : \forall x, y \in X, (x, y) \in E \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E\}$$

是 $\mathcal{T}_X$ 的子半群. 计算了变换半群 $T_E(X)$ 的基数, 并且在 $n = 2, m \geq 2$ 和 $n = 3, m \geq 2$ 的条件下, 分别给出了 $T_E(X)$ 的正则元个数的计算公式.

关键词: 变换半群; 等价关系; 正则元; 组合数

中图分类号: O152.7

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2018)08-0082-07

组合结果的研究是变换半群理论中一个有趣的课题, 对于变换半群结构的研究有着重要意义. 关于各类变换半群组合数的研究, 参看文献[1—8].

设 $\mathcal{T}_X$ 是非空集合 X ($|X| \geq 3$) 上全变换半群, E 是 X 上的等价关系, X/E 是由等价关系 E 确定的 X 的分类(其中 X/E 的每个元素称为一个 E -类). 文献[9] 最早引入了 $\mathcal{T}_X$ 的子半群

$$T_E(X) = \{f \in \mathcal{T}_X : \forall x, y \in X, (x, y) \in E \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E\}$$

这类半群称为保持等价关系 E 的变换半群. 它是一类重要的变换半群. 这是因为当 $E = X \times X$ 或 $E = \{(x, x) : x \in X\}$ 时, $T_E(X) = \mathcal{T}_X$. 对于这类变换半群, 文献[9—13] 研究了它的 α -同余、正则元、格林等价关系、生成集、秩、自然偏序关系和富足性等. 特别地, 得到了如下结论:

定理 1^[10] 设 $f \in T_E(X)$, 则 f 是 $T_E(X)$ 的正则元当且仅当对于任意 E -类 A , 存在 E -类 B , 使得 $A \cap f(X) = f(B)$.

由文献[10] 的命题 2.4 知, 当 $E \neq X \times X$ 且 $E \neq \{(x, x) : x \in X\}$ 时, 半群 $T_E(X)$ 是非正则半群. 怎么计算半群 $T_E(X)$ 中正则元的个数? 一般情形较为复杂, 本文先考虑一种特殊情形: 在 $X = \{1, 2, \dots, nm\}$ (其中 n 表示每个 E -类中元素的个数, m 表示 E -类的个数, 并且 $n \geq 2, m \geq 2$) 和特殊的等价关系 $(2, m)$ -型和 $(3, m)$ -型, 即

$$E = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \dots \cup (A_m \times A_m)$$

其中 $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$, $\dots$, $A_m = \{2m-1, 2m\}$, 和

$$E = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \dots \cup (A_m \times A_m)$$

其中 $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5, 6\}$, $\dots$, $A_m = \{3m-2, 3m-1, 3m\}$ 的假设下, 给出了 $T_E(X)$ 的正则元个数的计算公式.

现在给出半群 $T_E(X)$ 的一个最基本的性质: 对于任意 $f \in T_E(X)$ 和 $A \in X/E$, 有 $f(A) \subseteq B \in X/E$.

① 收稿日期: 2017-09-03

基金项目: 国家自然科学基金项目(U1404101).

作者简介: 孙 垒(1977-), 男, 副教授, 主要从事半群理论的研究.

用 $R(T_E(X))$ 和 $(R(T_E(X)))^+$ 分别表示 $T_E(X)$ 的正则元和非正则元的集合.

定理 2 设 E 是集合 X 上的 (n, m) -型等价关系, 其中 $n \geq 2, m \geq 2$, 则

$$|T_E(X)| = (mn^n)^m$$

证 设 $f \in T_E(X)$. 分两步进行:

步骤 1 像 $f(A_1)$ 所在 E -类的可能性有 m 个. 并且对于 A_1 中每个元素 x , 像 $f(x)$ 的可能性有 n 个. 于是像 $f(A_1)$ 所有选法为 mn^n 个.

步骤 2 取遍所有 m 个 E -类 $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 则 $|T_E(X)| = (mn^n)^m$.

下面借助定理 1, 通过构造 $T_E(X)$ 的非正则元, 计算 $T_E(X)$ 的正则元的个数. 显然, 若对于任意 E -类 A , 有 $|A \cap f(X)| = 1$, 则 f 是 $T_E(X)$ 的正则元.

引理 1 设 E 是集合 X 上的 $(2, m)$ -型等价关系, 其中 $m \geq 2$, 则

$$|(R(T_E(X)))^+| = m \left[\sum_{i=2}^m C_m^i (2^i - 2) (4(m-1))^{m-i} \right]$$

证 分两种情形构造 $T_E(X)$ 的非正则元 f , 即存在一个 E -类 A , 使对于任意 E -类 B , 有

$$A \cap f(X) \neq f(B)$$

情形 1 $m = 2$. 从 2 个 E -类中选取 1 个 E -类的方法有 2 个. 这个 E -类不妨设为 $A = \{a_1, a_2\}$. 满足 $|f(A_1)| = |f(A_2)| = 1$ 且 $f(X) = \{a_1, a_2\}$ 的变换有 2 个. 于是 $A \cap f(X) = \{a_1, a_2\}$. 但是对于 E -类 A_1, A_2 , 有:

$$A \cap f(X) \neq f(A_1) \quad A \cap f(X) \neq f(A_2)$$

因此对于情形 1 有 $2 \times 2 = 4$ 个非正则元.

情形 2 $m \geq 3$. 分下述步骤进行.

步骤 1 从 m 个 E -类中选取 1 个 E -类的方法有 m 个. 这个 E -类不妨设为 $A = \{a_1, a_2\}$.

步骤 2 下面有两种可能:

(P1) 所有 E -类被变换 f 作用到 A 中. 满足 $|f(A_1)| = |f(A_2)| = \dots = |f(A_m)| = 1$ 且 $f(X) = \{a_1, a_2\}$ 的变换有 $2^m - 2$ 个.

(P2) $i (i \geq 2)$ 个 E -类被变换 f 作用到 A 中, 其它 $m-i$ 个 E -类被变换 f 作用到 $X/E - \{A\}$ 中. 满足这种可能的选法有 C_m^i 种. 不妨设这 i 个 E -类为 $A_1, A_2, \dots, A_i$. 下面考虑满足:

$$|f(A_1)| = |f(A_2)| = \dots = |f(A_i)| = 1$$

$$f(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i) = \{a_1, a_2\}$$

$$f(A_{i+1} \cup A_{i+2} \cup \dots \cup A_m) \subseteq X/E - A$$

的变换 f 的个数. 一方面, 满足 $|f(A_1)| = |f(A_2)| = \dots = |f(A_i)| = 1$ 且 $f(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i) = \{a_1, a_2\}$ 的选法有 $(2^i - 2)$ 个; 另一方面, 满足 $f(A_{i+1} \cup A_{i+2} \cup \dots \cup A_m) \subseteq X - A$ 的选法有 $(4(m-1))^{m-i}$ 个.

因此对于这种可能共有 $\sum_{i=2}^{m-1} C_m^i (2^i - 2) (4(m-1))^{m-i}$ 个变换.

满足上述两种可能(P1)和(P2)的变换 f 有

$$(2^m - 2) + \sum_{i=2}^{m-1} C_m^i (2^i - 2) (4(m-1))^{m-i} = \sum_{i=2}^m C_m^i (2^i - 2) (4(m-1))^{m-i}$$

个. 进而在情形 2 下构造的变换 f 有 $m \left[\sum_{i=2}^m C_m^i (2^i - 2) (4(m-1))^{m-i} \right]$ 个.

由此可知 $A \cap f(X) = \{a_1, a_2\}$. 但是对于任意 E -类 $B \in \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 有

$$A \cap f(X) \neq f(B)$$

由定理 1 知 f 是 $T_E(X)$ 的非正则元.

综合情形 1 和情形 2, 有

$$|(R(T_E(X)))^+| = \begin{cases} 4 & m = 2 \\ m \left[\sum_{i=2}^m C_m^i (2^i - 2)(4(m-1))^{m-i} \right] & m \geq 3 \end{cases}$$

即

$$|(R(T_E(X)))^+| = m \left[\sum_{i=2}^m C_m^i (2^i - 2)(4(m-1))^{m-i} \right]$$

根据定理 2 和引理 1, 得到本文的主要结论:

定理 3 设 E 是集合 X 上的 $(2, m)$ -型等价关系(其中 $m \geq 2$), 则

$$|(R(T_E(X)))| = (4m)^m - m \left[\sum_{i=2}^m C_m^i (2^i - 2)(4(m-1))^{m-i} \right]$$

引理 2 设 E 是集合 X 上的 $(3, 2)$ -型等价关系, 则

$$|(R(T_E(X)))^+| = 516$$

证 分两种情形构造 $T_E(X)$ 的非正则元 f , 即存在一个 E -类 A , 使得对于任意 E -类 B , 有

$$A \cap f(X) \neq f(B)$$

情形 1 $|A \cap f(X)| = 2$.

步骤 1 从 2 个 E -类中选取 1 个 E -类的方法有 2 个, 这个 E -类不妨设为 A .

步骤 2 从 A 中选取 2 个元素的方法有 $C_3^2 = 3$ 个, 不妨设这 2 个元素为 a_1, a_2 .

步骤 3 满足 $|f(A_1)| = |f(A_2)| = 1$ 且 $f(A_1 \cup A_2) = \{a_1, a_2\}$ 的变换有 2 个.

由此可知

$$A \cap f(X) = \{a_1, a_2\}$$

但是

$$A \cap f(X) \neq f(A_1) \quad A \cap f(X) \neq f(A_2)$$

由定理 1 知 f 是 $T_E(X)$ 的非正则元. 因此在情形 1 下 $T_E(X)$ 的非正则元的个数为 $2 \times 3 \times 2 = 12$ 个.

情形 2 $|A \cap f(X)| = 3$.

步骤 1 从 2 个 E -类中选取 1 个 E -类的方法有 2 个. 这个 E -类不妨设为 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$.

步骤 2 下面有两种可能:

(P1) 满足 $f(A_1) = \{a_1\}$, $f(A_2) = \{a_2, a_3\}$, 或 $f(A_1) = \{a_2, a_3\}$, $f(A_2) = \{a_1\}$, 或 $f(A_1) = \{a_2\}$, $f(A_2) = \{a_1, a_3\}$, 或 $f(A_1) = \{a_1, a_3\}$, $f(A_2) = \{a_2\}$, 或 $f(A_1) = \{a_3\}$, $f(A_2) = \{a_1, a_2\}$, 或 $f(A_1) = \{a_1, a_2\}$, $f(A_2) = \{a_3\}$ 的变换有 $6(2^3 - 2) = 36$ 个.

(P2) 满足 $f(A_1) = \{a_1, a_2\}$, $f(A_2) = \{a_1, a_3\}$, 或 $f(A_1) = \{a_1, a_3\}$, $f(A_2) = \{a_1, a_2\}$, 或 $f(A_1) = \{a_1, a_2\}$, $f(A_2) = \{a_2, a_3\}$, 或 $f(A_1) = \{a_2, a_3\}$, $f(A_2) = \{a_1, a_2\}$, 或 $f(A_1) = \{a_1, a_3\}$, $f(A_2) = \{a_2, a_3\}$, 或 $f(A_1) = \{a_2, a_3\}$, $f(A_2) = \{a_1, a_3\}$ 的变换有 $6(2^3 - 2)(2^3 - 2) = 216$ 个.

满足上述两种可能(P1) 和(P2) 的变换有 $36 + 216 = 252$ 个. 于是情形 2 构造的变换 f 有 $2 \times 252 = 504$ 个.

由此可知

$$A \cap f(X) = \{a_1, a_2, a_3\}$$

但是

$$A \cap f(X) \neq f(A_1) \quad A \cap f(X) \neq f(A_2)$$

从而由定理 1 知 f 是 $T_E(X)$ 的非正则元.

综合情形 1 和情形 2, 共有 $12 + 504 = 516$ 个非正则元.

引理 3 设 E 是集合 X 上的 $(3, m)$ -型等价关系(其中 $m \geq 3$), 则

$$|(R(T_E(X)))^+| = m \left\{ \sum_{i=2}^m C_m^i \left[3^i - 3 + \sum_{j=1}^{i-1} C_i^j 6^{j+1} (2^{i-j} - 1) + 3(2^i - 2)6^i \right] (27(m-1))^{m-i} \right\}$$

证 分两种情形构造 $T_E(X)$ 的非正则元 f , 即存在一个 E -类 A , 使得对于任意 E -类 B , 有

$$A \cap f(X) \neq f(B)$$

情形 1 $|A \cap f(X)| = 2$.

步骤 1 从 m 个 E -类中选取 1 个 E -类的方法有 m 个, 这个 E -类不妨设为 A .

步骤 2 从 A 中选取 2 个元素的方法有 $C_3^2 = 3$ 个, 不妨设这 2 个元素为 a_1, a_2 .

步骤 3 下面有两种可能;

(P1) 所有 E -类被变换 f 作用到 A 中. 满足 $|f(A_1)| = |f(A_2)| = \cdots = |f(A_m)| = 1$ 且 $f(X) = \{a_1, a_2\}$ 的变换有 $2^m - 2$ 个.

(P2) $i (i \geq 2)$ 个 E -类被变换 f 作用到 A 中, 其它 $m - i$ 个 E -类被变换 f 作用到 $X/E - \{A\}$ 中. 满足这种可能的选法有 C_m^i 种. 不妨设这 i 个 E -类为 $A_1, A_2, \cdots, A_i$. 下面考虑满足

$$|f(A_1)| = |f(A_2)| = \cdots = |f(A_i)| = 1$$

$$f(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_i) = \{a_1, a_2\}$$

$$f(A_{i+1} \cup A_{i+2} \cup \cdots \cup A_m) \subseteq X/E - \{A\}$$

的变换 f 的个数. 一方面, 满足 $|f(A_1)| = |f(A_2)| = \cdots = |f(A_i)| = 1$ 且 $f(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_i) = \{a_1, a_2\}$ 的选法有 $(2^i - 2)$ 个; 另一方面, 满足 $f(A_{i+1} \cup A_{i+2} \cup \cdots \cup A_m) \subseteq X/E - \{A\}$ 的选法有 $(27(m - 1))^{m-i}$ 个. 结合这两方面有 $(2^i - 2)(27(m - 1))^{m-i}$ 个变换. 因此对于这种可能共有 $\sum_{i=2}^{m-1} C_m^i (2^i - 2)(27(m - 1))^{m-i}$ 个变换.

满足上述两种可能(P1)和(P2)的变换 f 有

$$(2^m - 2) + \sum_{i=2}^{m-1} C_m^i (2^i - 2)(27(m - 1))^{m-i} = \sum_{i=2}^m C_m^i (2^i - 2)(27(m - 1))^{m-i}$$

个. 因此对于情形 1 共有 $3m \sum_{i=2}^m C_m^i (2^i - 2)(27(m - 1))^{m-i}$ 个变换.

由此可知

$$A \cap f(X) = \{a_1, a_2\}$$

但是对于任意 E -类 $B \in \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$, 有 $A \cap f(X) \neq f(B)$. 由定理 1 知 f 是 $T_E(X)$ 的非正则元.

情形 2 $|A \cap f(X)| = 3$.

步骤 1 从 m 个 E -类中选取 1 个 E -类的方法有 m 种, 这个 E -类不妨设为 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$.

步骤 2 下面分 3 种情形:

情形 2.1 被 f 作用到 A 中的 E 类 A_i (其中 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$) 满足 $|f(A_i)| = 1$. 此情形又有两种可能:

(P1) 对于任意 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 满足 $f(A_i) \subseteq A$ 且 $f(X) = \{a_1, a_2, a_3\}$ 的变换有 $3^m - 3(2^m - 2) - 3 = 3^m - 3 \times 2^m + 3$ 个.

(P2) $i (i \geq 3)$ 个 E -类被变换 f 作用到 A 中, 其它 $m - i$ 个 E -类被变换 f 作用到 $X/E - \{A\}$ 中. 满足这种可能的选法有 C_m^i 种. 不妨设这 i 个 E -类为 $A_1, A_2, \cdots, A_i$. 下面考虑满足:

$$f(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_i) = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$f(A_{i+1} \cup A_{i+2} \cup \cdots \cup A_m) \subseteq X/E - \{A\}$$

的变换 f 的个数. 一方面, 满足 $f(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_i) = \{a_1, a_2, a_3\}$ 的选法有 $3^i - 3 \times 2^i + 3$ 个; 另一方面, 满足 $f(A_{i+1} \cup A_{i+2} \cup \cdots \cup A_m) \subseteq X/E - \{A\}$ 的选法有 $(27(m - 1))^{m-i}$ 个. 结合这两方面有 $(3^i - 3 \times 2^i + 3)(27(m - 1))^{m-i}$ 个变换. 因此对于这种可能共有 $\sum_{i=3}^{m-1} C_m^i (3^i - 3 \times 2^i + 3)(27(m - 1))^{m-i}$ 个变换.

满足上述两种可能(P1)和(P2)的变换 f 有

$(3^m - 3 \times 2^m + 3) + \sum_{i=3}^{m-1} C_m^i (3^i - 3 \times 2^i + 3) (27(m-1))^{m-i} = \sum_{i=3}^m C_m^i (3^i - 3 \times 2^i + 3) (27(m-1))^{m-i}$ 个.

由此可知

$$A \cap f(X) = \{a_1, a_2, a_3\}$$

但是对于任意 E -类 $B \in \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 有

$$A \cap f(X) \neq f(B)$$

由定理 1 知 f 是 $T_E(X)$ 的非正则元.

情形 2.2 被 f 作用到 A 中的 E 类 A_i (其中 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$) 满足 $|f(A_i)|=1$ 或 $|f(A_i)|=2$, 并且存在 $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, m\}$, 使得 $|f(A_{i_1})|=1$ 且 $|f(A_{i_2})|=2$. 此情形又有两种可能:

(P3) 对于任意 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 满足 $f(A_i) \subseteq A$ 且 $f(X) = \{a_1, a_2, a_3\}$, 此时有 $C_3^2 \sum_{i=1}^{m-1} C_m^i 6^i \times (2 \times (2^{m-i} - 1)) = \sum_{i=1}^{m-1} C_m^i 6^{i+1} (2^{m-i} - 1)$ 个.

(P4) $i(i \geq 2)$ 个 E -类被变换 f 作用到 A 中, 其它 $m-i$ 个 E -类被变换 f 作用到 $X/E - \{A\}$ 中. 满足这种可能的选法有 C_m^i 种. 不妨设这 i 个 E -类为 $A_1, A_2, \dots, A_i$. 下面考虑满足:

$$\begin{aligned} f(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i) &= \{a_1, a_2, a_3\} \\ f(A_{i+1} \cup A_{i+2} \cup \dots \cup A_m) &\subseteq X/E - \{A\} \end{aligned}$$

的变换 f 的个数. 一方面, 满足 $f(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i) = \{a_1, a_2, a_3\}$ 的选法有 $\sum_{j=1}^{i-1} C_i^j 6^{j+1} (2^{i-j} - 1)$ 个; 另一方面, 满足 $f(A_{i+1} \cup A_{i+2} \cup \dots \cup A_m) \subseteq X/E - \{A\}$ 的选法有 $(27(m-1))^{m-i}$ 个. 结合这两方面有 $(\sum_{j=1}^{i-1} C_i^j 6^{j+1} (2^{i-j} - 1)) (27(m-1))^{m-i}$ 个变换. 因此对于这种可能共有 $\sum_{i=2}^{m-1} C_m^i (\sum_{j=1}^{i-1} C_i^j 6^{j+1} (2^{i-j} - 1)) (27(m-1))^{m-i}$ 个变换.

满足上述两种可能(P3) 和(P4) 的变换 f 有

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m-1} C_m^i 6^{i+1} (2^{m-i} - 1) + \sum_{i=2}^{m-1} C_m^i \left(\sum_{j=1}^{i-1} C_i^j 6^{j+1} (2^{i-j} - 1) \right) (27(m-1))^{m-i} = \\ &\sum_{i=2}^m C_m^i \left(\sum_{j=1}^{i-1} C_i^j 6^{j+1} (2^{i-j} - 1) \right) (27(m-1))^{m-i} \end{aligned}$$

个.

由此可知

$$A \cap f(X) = \{a_1, a_2, a_3\}$$

但是对于任意 E -类 $B \in \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 有 $A \cap f(X) \neq f(B)$. 由定理 1 知 f 是 $T_E(X)$ 的非正则元.

情形 2.3 被 f 作用到 A 中的 E -类 A_i (其中 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$) 满足 $|f(A_i)|=2$. 此情形又有两种可能:

(P5) 对于任意 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 满足 $f(A_i) \subseteq A$ 且 $f(X) = \{a_1, a_2, a_3\}$ 的变换有 $3(2^m - 2)6^m$ 个.

(P6) $i(i \geq 2)$ 个 E -类被变换 f 作用到 A 中, 其它 $m-i$ 个 E -类被变换 f 作用到 $X/E - \{A\}$ 中. 满足这种可能的选法有 C_m^i 种. 不妨设这 i 个 E -类为 $A_1, A_2, \dots, A_i$. 下面考虑满足:

$$\begin{aligned} f(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i) &= \{a_1, a_2, a_3\} \\ f(A_{i+1} \cup A_{i+2} \cup \dots \cup A_m) &\subseteq X/E - \{A\} \end{aligned}$$

的变换 f 的个数. 一方面, 满足 $f(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i) = \{a_1, a_2, a_3\}$ 的选法有 $3(2^i - 2)6^i$ 个; 另一方面, 满足 $f(A_{i+1} \cup A_{i+2} \cup \dots \cup A_m) \subseteq X/E - \{A\}$ 的选法有 $(27(m-1))^{m-i}$ 个. 结合这两方面有 $(3(2^i - 2)6^i) (27(m-1))^{m-i}$ 个变换. 因此对于这种可能共有 $\sum_{i=2}^{m-1} C_m^i (3(2^i - 2)6^i) (27(m-1))^{m-i}$ 个变换.

满足上述两种可能(P5) 和(P6) 的变换 f 有

$$3(2^m - 2)6^m + \sum_{i=2}^{m-1} C_m^i (3(2^i - 2)6^i)(27(m-1))^{m-i} = \sum_{i=2}^m C_m^i (3(2^i - 2)6^i)(27(m-1))^{m-i}$$

个.

由此可知

$$A \cap f(X) = \{a_1, a_2, a_3\}$$

但是对于任意 E -类 $B \in \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 有 $A \cap f(X) \neq f(B)$. 由定理 1 知 f 是 $T_E(X)$ 的非正则元.

因此在情形 2 下 $T_E(X)$ 的非正则元的个数为

$$\begin{aligned} m \left\{ \sum_{i=3}^m C_m^i (3^i - 3 \times 2^i + 3)(27(m-1))^{m-i} + \sum_{i=2}^m C_m^i \left(\sum_{j=1}^{i-1} C_i^j 6^{j+1} (2^{i-j} - 1) \right) (27(m-1))^{m-i} + \right. \\ \left. \sum_{i=2}^m C_m^i (3(2^i - 2)6^i)(27(m-1))^{m-i} \right\} = \\ m \left\{ \sum_{i=3}^m C_m^i (3^i - 3 \times 2^i + 3)(27(m-1))^{m-i} + \sum_{i=2}^m C_m^i \left[\sum_{j=1}^{i-1} C_i^j 6^{j+1} (2^{i-j} - 1) + 3(2^i - 2)6^i \right] (27(m-1))^{m-i} \right\} = \\ m \left\{ \sum_{i=3}^m C_m^i \left[(3^i - 3 \times 2^i + 3) + \sum_{j=1}^{i-1} C_i^j 6^{j+1} (2^{i-j} - 1) + 3(2^i - 2)6^i \right] (27(m-1))^{m-i} + 288C_m^2 (27(m-1))^{m-2} \right\} \end{aligned}$$

故在两种情形下半群 $T_E(X)$ 的非正则元的个数为

$$\begin{aligned} 3m \sum_{i=2}^m C_m^i (2^i - 2)(27(m-1))^{m-i} + \\ m \left\{ \sum_{i=3}^m C_m^i \left[(3^i - 3 \times 2^i + 3) + \sum_{j=1}^{i-1} C_i^j 6^{j+1} (2^{i-j} - 1) + 3(2^i - 2)6^i \right] (27(m-1))^{m-i} + 288C_m^2 (27(m-1))^{m-2} \right\} = \\ m \left\{ \sum_{i=3}^m C_m^i \left[(3 \times 2^i - 6) + (3^i - 3 \times 2^i + 3) + \right. \right. \\ \left. \sum_{j=1}^{i-1} C_i^j 6^{j+1} (2^{i-j} - 1) + 3(2^i - 2)6^i \right] (27(m-1))^{m-i} + 294C_m^2 (27(m-1))^{m-2} \right\} = \\ m \left\{ \sum_{i=2}^m C_m^i \left[3^i - 3 + \sum_{j=1}^{i-1} C_i^j 6^{j+1} (2^{i-j} - 1) + 3(2^i - 2)6^i \right] (27(m-1))^{m-i} \right\} \end{aligned}$$

根据定理 2、引理 2 和引理 3, 得到本文的另一个主要结论:

定理 4 设 E 是集合 X 上的 $(3, m)$ -型等价关系(其中 $m \geq 2$), 则下面结论成立:

(i) 当 $m = 2$ 时, $| (R(T_E(X))) | = 2400$;

(ii) 当 $m \geq 3$ 时,

$$| (R(T_E(X))) | = (27m)^m - m \left\{ \sum_{i=2}^m C_m^i \left[3^i - 3 + \sum_{j=1}^{i-1} C_i^j 6^{j+1} (2^{i-j} - 1) + 3(2^i - 2)6^i \right] (27(m-1))^{m-i} \right\}$$

参考文献:

- [1] LARADJI A, UMAR A. Combinatorial Results for Semigroups of Order-Preserving Partial Transformations [J]. Journal of Algebra, 2004, 278(1): 342-359.
- [2] LARADJI A, UMAR A. Combinatorial Results for Semigroups of Order-Preserving Full Transformations [J]. Semigroup Forum, 2006, 72(1): 51-62.
- [3] FERNANDES V H, GRACINDA M S G, JESUS M M. The Cardinal and the Idempotent Number of Various Monoids of Transformations on a Finite Chain [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2011, 34(1): 79-85.
- [4] FERNANDES V H, QUINTEIRO T M. The Cardinal of Various Monoids of Transformations That Preserve a Uniform Partition [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2012, 35(4): 885-896.

- [5] SUN L. Combinatorial Results for Certain Semigroups of Transformations Preserving Orientation and a Uniform Partition [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2013, 36(1): 179–192.
- [6] ZHANG J, LUO Y F. On Certain Order-Preserving Transformation Semigroups [J]. Communications in Algebra, 2017, 45(7): 2980–2995.
- [7] 邓伟娜, 裴惠生. 一类变换半群中幂等元的中心化子 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2013, 35(2): 55–61.
- [8] 高荣海, 徐 波. 核具有连续横截面的保序变换半群的秩 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2013, 38(4): 18–24.
- [9] PEI H S. Equivalences, α -Semigroups and α -Congruences [J]. Semigroup Forum, 1994, 49(1): 49–58.
- [10] PEI H S. Regularity and Green's Relations for Semigroups of Transformations That Preserve an Equivalence [J]. Communications in Algebra, 2005, 33(1): 109–118.
- [11] PEI H S. On the Rank of the Semigroup $T_E(X)$ [J]. Semigroup Forum, 2005, 70(1): 107–117.
- [12] SUN L, PEI H S, CHENG Z X. Naturally Ordered Transformation Semigroups Preserving an Equivalence [J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2008, 78(2): 117–128.
- [13] PEI H S, ZHOU H J. Abundant Semigroups of Transformations Preserving an Equivalence Relation [J]. Colloquium Algebra, 2011, 18(1): 77–82.

A Combinatorial Result for Certain Semigroups of Transformations Preserving an Equivalence Relation

SUN Lei

School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo Henan 454003, China

Abstract: Let $\mathcal{T}_X$ be a full transformation semigroup on the nonempty set X , and E be an (n, m) -type equivalence relation on X . Then

$$\mathcal{T}_E(X) = \{f \in \mathcal{T}_X : \forall x, y \in X, (x, y) \in E \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E\}$$

is a subsemigroup of T_X . In this paper, we calculate the cardinality of the semigroup $T_E(X)$ and present a formula for the number of its regular elements under the supposition that $n=2, m \geq 2$ and $n=3, m \geq 2$.

Key words: transformation semigroup; equivalence; regular element; combinatorial result

责任编辑 廖 坤

崔玉洁