第 40 卷第 8 期　　西南大学学报(自然科学版)　　2018 年 8 月
Vol. 40 No. 8　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Aug. 2018

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.08.012

模糊拟阵的独立模糊壳①

吴德垠

重庆大学 数学与统计学院，重庆 401331

摘要： 首先分析了模糊拟阵的模糊独立集的特点，从模糊独立集的共同上界观点出发，定义了独立模糊壳的概念；然后，深入分析了模糊拟阵的导出拟阵、导出拟阵列和基本序列与独立模糊壳的关系，根据这些分析，构造了一般模糊拟阵的独立模糊壳的计算办法，并证明了这个计算方法的正确性，这个方法的核心就是独立模糊壳可以由模糊拟阵的导出拟阵列和基本序列唯一确定；接着，研究了在独立模糊壳隶属度集是基本序列集和单点集的两种特殊情况下，模糊拟阵所具有的性质；最后，探讨了闭模糊拟阵、准模糊图拟阵、模糊截短列拟阵和部分特殊闭正规模糊拟阵的独立模糊壳所拥有的特殊性质，得到一个模糊拟阵的独立模糊壳是模糊独立集的充要条件.

关 键 词： 拟阵；模糊拟阵；准模糊图拟阵；模糊截短列拟阵；基本序列；独立模糊壳

中图分类号： O157；O159　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673-9868(2018)08-0089-06

1988 年，文献[1]将模糊理论引入拟阵，开启了模糊拟阵研究领域[1]. 模糊独立集是组成模糊拟阵的基础，模糊基又是最大的模糊独立集. 那么这些最大模糊独立集是否有共同的上界呢？这个上界如果存在，它具有什么样的性质？对于我们熟知的闭模糊拟阵、闭正规模糊拟阵、准模糊图拟阵和模糊截短列拟阵，这个上界又有哪些特殊的地方？这些就是本文所要讨论的内容. 本质上，这些讨论是从一个新的角度和方法来研究模糊拟阵.

1 预备知识

设 $E=\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ 是一个集合，则 E 上的模糊集 μ 是一个映射 $\mu: E \longrightarrow [0, 1]$. E 上模糊集的全体记为 $F(E)$. 关于模糊数学的有关概念和符号主要参见文献[2]. 有关拟阵的理论主要参见文献[3].

定义 1[1] 设 $E=\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ 是非空有限集，$\ell \subseteq F(E)$ 是满足下列条件的非空模糊集族：

(i)(继承性) 若 $\mu \in \ell$，$\nu \in F(E)$，$\nu \leqslant \mu$，则 $\nu \in \ell$；

(ii)(交换性) 若 $\mu, \nu \in \ell$，$|\operatorname{supp} \mu| < |\operatorname{supp} \nu|$，则存在 $\omega \in \ell$，使得：

(a) $\mu < \omega \leqslant \mu \vee \nu$；

(b) $m(\omega) \geqslant \min\{m(\mu), m(\nu)\}$.

则称对偶 $\boldsymbol{M}=(E, \ell)$ 是 E 上的模糊拟阵，ℓ 称为 $\boldsymbol{M}$ 的模糊独立集族. $\forall \mu \in F(E)$，如果 $\mu \in \ell$，则称 μ 为

① 收稿日期：2017-05-24
基金项目：国家自然科学基金项目(61374078).
作者简介：吴德垠(1955-)，男，教授，主要从事模糊拟阵的研究.

$\boldsymbol{M}$ 的模糊独立集，否则称为 $\boldsymbol{M}$ 的相关模糊集. $\boldsymbol{M}$ 的最大模糊独立集称为 $\boldsymbol{M}$ 的模糊基.

有关模糊拟阵的理论参见文献[1,4－5].

设 $\boldsymbol{M}=(E,\ell)$ 是模糊拟阵，$\forall r\in(0,1]$，令 $I_r=\{C_r(\mu)\mid\forall\mu\in\ell\}$，则由文献[1]的定理2.1知，$\boldsymbol{M}_r=(E,I_r)$ 是 E 上的拟阵.

闭模糊拟阵和模糊拟阵闭包的概念可见文献[1]，正规模糊拟阵的概念可参见文献[5]，准模糊图拟阵的内容可参阅文献[2,6－10]，模糊截短列拟阵的理论可参看文献[11].

为了以后叙述方便，令 $\boldsymbol{M}=(E,\ell)$ 是模糊拟阵，其闭包记为 $\overline{\boldsymbol{M}}=(E,\bar{\ell})$ $(\forall r\in(0,1])$，记

$$\bar{I}_r=\{X\subseteq E\mid 存在\ \mu\in\ell，使得\ X=C_r(\mu)\}$$

2 模糊拟阵的独立模糊壳

假设 $\boldsymbol{M}=(E,\ell)$ 是没有模糊环的模糊拟阵，而且 $0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant 1$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的基本序列，导出拟阵序列为

$$\boldsymbol{M}_{\bar{r}_1}=(E,I_{\bar{r}_1})\supset\boldsymbol{M}_{\bar{r}_2}=(E,I_{\bar{r}_2})\supset\cdots\supset\boldsymbol{M}_{\bar{r}_n}=(E,I_{\bar{r}_n})\qquad 1\leqslant i\leqslant n,\ \bar{r}_i=(r_{i-1}+r_i)/2$$

取 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，令 $r_{\boldsymbol{M}}=\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$.

2.1 关于独立模糊壳的概念与计算

定义2 构造模糊集 $\sigma_{\boldsymbol{M}}\in F(E)$ 为 $\sigma_{\boldsymbol{M}}:E\longrightarrow[0,1]$. $\forall e_i\in E$，取 $\sigma_{\boldsymbol{M}}(e_i)=\sup\{\mu(e_i)\mid\forall\mu\in\ell\}$，我们称模糊集 $\sigma_{\boldsymbol{M}}$ 为模糊拟阵 $\boldsymbol{M}$ 的独立模糊壳. 记 $\lambda_\sigma=R^+(\sigma_{\boldsymbol{M}})=\{\sigma_{\boldsymbol{M}}(e_i)\mid\forall e_i\in E,\sigma_{\boldsymbol{M}}(e_i)>0\}$，称之为 $\boldsymbol{M}$ 的独立模糊壳隶属度集.

容易看出，$\forall\mu\in\ell$，都有 $\mu\leqslant\sigma_{\boldsymbol{M}}$. 反之，$\forall\mu\in F(E)$，只要有 $e\in E$，使得 $\mu(e)>\sigma_{\boldsymbol{M}}(e)$，必定有 $\mu\notin\ell$. 这也就是称 $\sigma_{\boldsymbol{M}}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的独立模糊壳的主要原因.

定理1 如果 $\boldsymbol{M}=(E,\ell)$ 是闭模糊拟阵，则 $\forall e_i\in E$，$\sigma_{\boldsymbol{M}}(e_i)=\max\{\mu(e_i)\mid\forall\mu\in\ell\}$.

证 由文献[5]的定理1.10，$\forall\mu\in\ell$，都有 $\boldsymbol{M}$ 的模糊基 ν，使得 $\mu\leqslant\nu$. 又由文献[6]的定理8知，$\boldsymbol{M}$ 只有有限个不同的模糊基. 因此，对 $\forall e_i\in E$，有

$$\sigma_{\boldsymbol{M}}(e_i)=\sup\{\mu(e_i)\mid\forall\mu\in\ell\}=\sup\{\nu(e_i)\mid\nu\ 是\ \boldsymbol{M}\ 的模糊基\}=$$
$$\max\{\nu(e_i)\mid\nu\ 是\ \boldsymbol{M}\ 的模糊基\}=\max\{\mu(e_i)\mid\forall\mu\in\ell\}$$

这说明在闭模糊拟阵 $\boldsymbol{M}$ 中 $\sigma_{\boldsymbol{M}}$ 可达. 但是，反之却不一定.

推论1 如果 $\boldsymbol{M}=(E,\ell)$ 是闭模糊拟阵，设 B 是 $\boldsymbol{M}$ 的全体模糊基组成的集合，则 $\sigma_{\boldsymbol{M}}=\bigvee_{\mu\in B}\mu$.

定理2 设 $\boldsymbol{M}=(E,\ell)$ 是模糊拟阵，$r_{\boldsymbol{M}}$ 为其基本序列集，$\sigma_{\boldsymbol{M}}$ 为其独立模糊壳，λ_σ 为其独立模糊壳隶属度集. 则有如下结论：

(i) $\forall\mu\in\ell$，都有 $\mu\leqslant\sigma_{\boldsymbol{M}}$. 反之，$\forall\mu\in F(E)$，只要有 $e\in E$ 使得 $\mu(e)>\sigma_{\boldsymbol{M}}(e)$，则 $\mu\notin\ell$；

(ii) $\forall\lambda\in\lambda_\sigma$，都有 $\lambda\leqslant r_n$，进而 $\forall\lambda\in\lambda_\sigma$，存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $r_{i-1}<\lambda\leqslant r_i$；

(iii) $\lambda_\sigma\subseteq r_{\boldsymbol{M}}$；

(iv) $\sigma_{\boldsymbol{M}}=\sigma_{\overline{\boldsymbol{M}}}$；

(v) $r_n\in\lambda_\sigma$.

证 (i) 由 $\sigma_{\boldsymbol{M}}$ 的定义即知结论成立.

(ii) $\forall\lambda\in\lambda_\sigma$，都有 $e_i\in E$，使得 $\lambda=\sigma_{\boldsymbol{M}}(e_i)$. 由 $\sigma_{\boldsymbol{M}}(e_i)$ 的定义知，要么有 $\mu\in\ell$ 使得 $\mu(e_i)=\lambda$；要么有 $\{\mu_k\}\subseteq\ell$，使得 $\mu_k(e_i)$ 在 k 趋于 ∞ 时，严格递增趋于 λ，即

$$\lim_{k\to\infty}\mu_k(e_i)=\lambda$$

若 $\mu(e_i)=\lambda$，取 $\boldsymbol{M}$ 的闭包 $\overline{\boldsymbol{M}}$（文献[1]的定义 3.5）. 由于 $\overline{\boldsymbol{M}}$ 是包含 $\boldsymbol{M}$ 的最小的闭模糊拟阵，因此存在 $\overline{\boldsymbol{M}}$ 的模糊基 ν，使得 $\lambda=\mu(e_i)\leqslant\nu(e_i)$. 又由文献[6]的定理 8 知，存在 $r_j\in r_{\boldsymbol{M}}$，使得 $\nu(e_i)=r_j$. 因此 $\lambda\leqslant r_j\leqslant r_n$，我们断言 $\lambda>r_{j-1}$. 如果 $\lambda\leqslant r_{j-1}$，则取 $a\in(r_{j-1},r_j)$. 构造模糊集 $\delta=e_i^a$，根据文献[1]的定义 3.5，$I_a=\overline{I}_a$，则对 $\forall r\in(0,1]$，当 $r\leqslant a$ 时，

$$C_r(\delta)=\{a\}\in\overline{I}_a=I_a\subseteq I_r$$

当 $r>a$ 时，

$$C_r(\delta)=\varnothing\in I_r$$

所以，由文献[1]的定理 2.4 知 $\delta\in\iota$. 但 $\delta(e_i)=a>\lambda$，这与已知矛盾. 故

$$r_{j-1}<\lambda\leqslant r_j$$

若 $\lim\limits_{k\to\infty}\mu_k(e_i)=\lambda$，如果 $\lambda>r_n$，由 $\lim\limits_{k\to\infty}\mu_k(e_i)=\lambda(\mu_k\in\iota)$ 知，可取某足够大的正整数 k，使得 $\mu_k(e_i)=a\in(r_n,\lambda)$. 由文献[1]的定理 2.4 知 $\{e_i\}\subseteq C_a(\mu_k)\in I_a\neq\varnothing$. 但根据文献[1]的定义 3.5 和观察 2.2，$\forall r>r_n$ 都有 $I_r=\varnothing$，矛盾. 则 $\lambda\leqslant r_n$. 又由于 $\boldsymbol{M}$ 无模糊环，因此 $0<\lambda\leqslant r_n$. 这说明存在 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $r_{j-1}<\lambda\leqslant r_j$.

(iii) $\forall\lambda\in\lambda_\sigma$，由(ii)，存在 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $r_{j-1}<\lambda\leqslant r_j$. 我们断言，$\lambda=r_j$. 否则，$r_{j-1}<\lambda<r_j$，取 $r'\in(r_{j-1},\lambda)$，$r''\in(\lambda,r_j)$. 根据独立模糊壳的定义 2，存在 $e\in E$，使得 $\lambda=\sigma_{\boldsymbol{M}}(e)$. 因此，必有 $\mu'\in\iota$，使得 $\mu'(e)\leqslant r'$，即$\{e\}\subseteq C_{r'}(\mu')\in I_{r'}$. 而由 $r''>\lambda=\sigma_{\boldsymbol{M}}(e)$ 知，$\forall\mu\in\iota$，都不会有 $\mu(e)\geqslant r''$，即$\{e\}\notin I_{r''}$. 由 $r',r''\in(r_{j-1},r_j)$ 和文献[1]的观察 2.2 知，$I_{r'}=I_{r''}$，这与$\{e\}\in I_{r'}$，但$\{e\}\notin I_{r''}$ 矛盾. 由此知 $\lambda=r_j\in r_{\boldsymbol{M}}$，故 $\lambda\sigma\subseteq r_{\boldsymbol{M}}$.

(iv) 由于 $\overline{\boldsymbol{M}}$ 是包含 $\boldsymbol{M}$ 的最小的闭模糊拟阵，因此 $\sigma_{\boldsymbol{M}}\leqslant\sigma_{\overline{\boldsymbol{M}}}$. 下面证明 $\sigma_{\boldsymbol{M}}\geqslant\sigma_{\overline{\boldsymbol{M}}}$.

$\forall e_i\in E$，由(iii)知，存在 $r_j\in r_{\boldsymbol{M}}$ 使得 $\sigma_{\overline{\boldsymbol{M}}}(e_i)=r_j$. 由定理 1，存在 $\mu\in\bar{\iota}$ 使得 $\mu(e_i)=r_j$，由此知$\{e_i\}\in\overline{I}_{r_j}$. 取无穷数列$\{\lambda_k\}\subseteq(r_{j-1},r_j)$，使其递增且 $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=r_j$. 构造无穷个模糊子集列$\{\mu_k=e_i^{\lambda_k}\}$，由文献[1]的观察 2.2 知$\{e_i\}\in\overline{I}_{r_j}\subseteq\overline{I}_{\lambda_k}=I_{\lambda_k}$，再由文献[1]的定理 2.4 得出$\{\mu_k\}\subseteq\iota$，因此

$$\{\lambda_k=\mu_k(e_i)\}\subseteq\{\mu(e_i)\mid\forall\mu\in\iota\}$$

从而

$$\sigma_{\overline{\boldsymbol{M}}}(e_i)=r_j\leqslant\sup\{\mu(e_i)\mid\forall\mu\in\iota\}=\sigma_{\boldsymbol{M}}(e_i)$$

即 $\sigma_{\boldsymbol{M}}\geqslant\sigma_{\overline{\boldsymbol{M}}}$. 故 $\sigma_{\boldsymbol{M}}=\sigma_{\overline{\boldsymbol{M}}}$.

(v) 由文献[1]的定义 3.5 和观察 2.2 知，$\overline{I}_{r_n}\neq\varnothing$. 取$\{e\}\in\overline{I}_{r_n}$，造模糊集 $\mu=e^{r_n}$，由文献[1]的定理 2.4 知 $\mu\in\iota$，因此，由 $\mu(e)=r_n$ 知 $\sigma_{\overline{\boldsymbol{M}}}(e)\geqslant r_n$. 再由(ii)知 $\sigma_{\overline{\boldsymbol{M}}}(e)\leqslant r_n$，得出 $\sigma_{\overline{\boldsymbol{M}}}(e)=r_n$. 由(iv)知 $\sigma_{\overline{\boldsymbol{M}}}(e)=\sigma_{\boldsymbol{M}}(e)=r_n$，故而 $r_n\in\lambda_\sigma$.

下面的定理描述了模糊拟阵的导出拟阵、导出拟阵列和基本序列与独立模糊壳隶属度集之间密切的关系. 同时该定理也是计算独立模糊壳的有效工具.

定理 3　设 $\boldsymbol{M}=(E,\iota)$ 是模糊拟阵，$r_{\boldsymbol{M}}$ 为其基本序列集，$\sigma_{\boldsymbol{M}}$ 为其独立模糊壳，λ_σ 为其独立模糊壳隶属度集，$\forall r\in(0,1]$，$I_r=\{C_r(\mu)\mid\forall\mu\in\iota\}$. $\forall r_i\in r_{\boldsymbol{M}}$，$r_i\in\lambda_\sigma$ 的充要条件是存在 $e\in E$，使得$\{e\}\in I_{r'}(0<r'<r_i)$，但$\{e\}\notin I_{r''}(r_i<r''\leqslant 1)$.

证 必要性 若 $r_i \in \lambda_\sigma$，则有 $e \in E$，使得 $r_i = \sigma_M(e)$. 由定理2的(iv)知，$r_i = \sigma_M(e) = \sigma_{\overline{M}}(e)$. 再由定理1，存在 $\mu \in \bar{\ell}$ 使得 $\mu(e) = r_i$. 则当 $0 < r' < r_i$ 时，有 $\{e\} \in C_{r'}(\mu) \in \overline{I_{r'}} = I_{r'}$. 当 $r_i < r'' \leqslant 1$ 时，如果存在 r'' 使得 $\{e\} \in I_{r''}$，则取 $r_i < r'' < r_{i+1}$，仍有 $\{e\} \in I_{r''} = \overline{I_{r''}}$. 构造模糊集 $\nu = e^{r''}$，则由文献[1]的定理2.4知 $\nu \in \bar{\ell}$. 由 $\sigma_M(e) = \sigma_{\overline{M}}(e) = r_i < r'' = \nu(e)$ 知矛盾. 因此 $\{e\} \notin I_{r''}$.

充分性 从 $\{e\} \in I_{r'}(r' < r_i)$，构造模糊集 $\mu = e^{r'}$，由文献[1]的定理2.4知 $\mu \in \ell$. 所以 $\sigma_M(e) \geqslant \mu(e) = r'$. 由此，取数列 $\{\lambda_k\} \subseteq (r_{i-1}, r_i)$，使得 $k \to \infty$ 时 $\{\lambda_k\}$ 递增趋于 r_i. 构造模糊集列 $\mu_k = e^{\lambda_k}$，同样也有 $\{\mu_k\} \subseteq \ell$. 因此，从 $\sigma_M(e) \geqslant \mu_k(e) = \lambda_k$ 知 $\sigma_M(e) \geqslant \lim\limits_{k \to \infty} \lambda_k = r_i$.

另一方面，如果有 $\mu \in \ell$，使得 $\mu(e) > r_i$. 令 $r = \mu(e)$，则 $r > r_i$，但 $\{e\} \in C_r(\mu) \in I_r$，与已知矛盾. 因此，$\forall \mu \in \ell$，必有 $\mu(e) \leqslant r_i$，得出 $\sigma_M(e) \leqslant r_i$. 故 $r_i = \sigma_M(e) \in \lambda_\sigma$.

由定理3，再用定理1，可以很容易得到如下推论：

推论2 设 $\boldsymbol{M} = (E, \ell)$ 是闭模糊拟阵，σ_M 为其独立模糊壳，$\forall r_i \in r_M$，$r_i \in \lambda_\sigma$ 的充要条件是存在 $e \in E$，使得 $\{e\} \in I_{r'}(0 < r' \leqslant r_i)$，但 $\{e\} \notin I_{r''}(r_i < r'' \leqslant 1)$.

推论2与定理3几乎一样，只是"$\{e\} \in I_{r'}(0 < r' \leqslant r_i)$"与"$\{e\} \in I_{r'}(0 < r' < r_i)$"中一个是"$\leqslant$"，而另一个是"$<$". 而这个差异就是闭模糊拟阵的独立模糊壳的体现.

推论3 设 $\boldsymbol{M} = (E, \ell)$ 是模糊拟阵，σ_M 为其独立模糊壳，$\forall r_i \in r_M$，$r_i \in \lambda_\sigma$ 的充要条件是存在 $e \in E$，使得 $\{e\} \in I_{\bar{r}_i}$. 如果 $i = 1,2,\cdots,n-1$，则有 $\{e\} \notin I_{\overline{r_{i+1}}}$.

推论3说明 σ_M 可以由模糊拟阵的导出拟阵列和基本序列唯一确定. 这是用来计算独立模糊壳的最好工具.

2.2 特殊模糊拟阵的独立模糊壳

本段主要讨论一些具有特殊性质的模糊拟阵的独立模糊壳的性态.

定理4 设 $\boldsymbol{M} = (E, \ell)$ 是模糊拟阵，基本序列为 $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n \leqslant 1$，导出拟阵序列为

$$\boldsymbol{M}_{\bar{r}_1} = (E, I_{\bar{r}_1}) \supset \boldsymbol{M}_{\bar{r}_2} = (E, I_{\bar{r}_2}) \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{\bar{r}_n} = (E, I_{\bar{r}_n}) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,\ \bar{r}_i = (r_{i-1} + r_i)/2$$

则 $\lambda_\sigma = r_M$ 的充要条件是 $\forall i(i = 1,2,\cdots,n)$，都存在 $e \in E$，使得 $\{e\} \in I_{\bar{r}_i}$. 如果 $i < n$，则 $\{e\} \notin I_{\overline{r_{i+1}}}$.

证 根据推论3和定理2即可证明.

推论4 如果 $\boldsymbol{M} = (E, \ell)$ 是准模糊图拟阵[6]，则 $\lambda_\sigma = r_M$.

定理5 设 $\boldsymbol{M} = (E, \ell)$ 是模糊拟阵，基本序列为 $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n \leqslant 1$，导出拟阵序列为

$$\boldsymbol{M}_{\bar{r}_1} = (E, I_{\bar{r}_1}) \supset \boldsymbol{M}_{\bar{r}_2} = (E, I_{\bar{r}_2}) \supset \cdots \supset \boldsymbol{M}_{\bar{r}_n} = (E, I_{\bar{r}_n}) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,\ \bar{r}_i = (r_{i-1} + r_i)/2$$

则 $\sigma_M = \omega(E, r_n)$ 的充要条件是 $\forall e \in E$，都有 $\{e\} \in I_{\bar{r}_n}$.

证 必要性 反证，如果存在 $e \in E$，使得 $\{e\} \notin I_{\bar{r}_n}$. 由于 $\boldsymbol{M}$ 无模糊环，因此，$\boldsymbol{M}_{\bar{r}_1}$ 是无环拟阵. 则存在 $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$，使得 $\{e\} \in I_{\bar{r}_i}$，但 $\{e\} \notin I_{\overline{r_{i+1}}}$. 根据推论3可知 $r_i \in \lambda_\sigma$，这与 $\lambda_\sigma = \{r_n\}$ 矛盾.

充分性 由定理2的(v)知，$r_n \in \lambda_\sigma$. 若有 $r_i \neq r_n$(即 $i < n$)使得 $r_i \in \lambda_\sigma$，由推论3知，存在 $e \in E$，使得 $\{e\} \in I_{\bar{r}_i}$，但 $\{e\} \notin I_{\overline{r_{i+1}}}$，这与"$\forall e \in E$，都有 $\{e\} \in I_{\bar{r}_n}$"矛盾. 故 $\lambda_\sigma = \{r_n\}$.

推论5 如果 $\boldsymbol{M} = (E, \ell)$ 是模糊截短列拟阵，则 $\sigma_M = \omega(E, r_n)$. 即，$\lambda_\sigma = \{r_n\}$.

推论5也是模糊截短列拟阵的必要条件. 由文献[12]的定理6，还有一类更简单的闭正规模糊拟阵，叫作初等模糊拟阵.

推论6 设 $\boldsymbol{M}_h = (E, \boldsymbol{\Psi}_h)$ 是拟阵 $\boldsymbol{M} = (E, I)$ 上的高度为 $h(h \in (0, 1])$ 的初等模糊拟阵[12]，则此

模糊拟阵是模糊截短列拟阵，而且 $\lambda_\sigma=\{h\}$.

根据文献[11]的定理3.5，模糊截短列拟阵是一类闭正规模糊拟阵. 推论5和推论6给出了两类特殊的闭正规模糊拟阵的独立模糊壳的性质.

2.3　特殊独立模糊壳的模糊拟阵

从独立模糊壳来研究模糊拟阵较困难，我们来做一点尝试. 取 $\mu\in F(E)$，$\mu\neq\varnothing$，令 $\ell=\{\nu\in F(E)\mid \nu\leqslant\mu\}$，则 $\boldsymbol{M}=(E,\ell)$ 是一个闭模糊拟阵. 我们称此模糊拟阵为由模糊集 μ 生成的模糊拟阵.

定理 6　设 $\boldsymbol{M}=(E,\ell)$ 是模糊拟阵，则其独立模糊壳 $\sigma_{\boldsymbol{M}}\in\ell$ 的充要条件是 $\boldsymbol{M}$ 是由模糊集 $\sigma_{\boldsymbol{M}}$ 生成的模糊拟阵.

证　必要性　如果 $\sigma_{\boldsymbol{M}}\in\ell$，取 $\mu=\sigma_{\boldsymbol{M}}$，则由定理2的(i)知，$\forall\nu\in\ell$，都有 $\nu\leqslant\sigma_{\boldsymbol{M}}=\mu$，即

$$\ell\subseteq\{\nu\in F(E)\mid\nu\leqslant\mu\}$$

又由 $\mu=\sigma_{\boldsymbol{M}}\in\ell$ 知 $\{\nu\in F(E)\mid\nu\leqslant\mu\}\subseteq\ell$. 因此 $\ell=\{\nu\in F(E)\mid\nu\leqslant\mu\}$. 因此，$\boldsymbol{M}$ 是由模糊集 $\sigma_{\boldsymbol{M}}$ 生成的模糊拟阵

充分性　若 $\boldsymbol{M}$ 是由模糊集 $\sigma_{\boldsymbol{M}}$ 生成的模糊拟阵，则

$$\ell=\{\nu\in F(E)\mid\nu\leqslant\sigma_{\boldsymbol{M}}\}$$

假设 $\boldsymbol{M}$ 的独立模糊壳为 δ，我们证明 $\delta=\sigma_{\boldsymbol{M}}$.

$\forall e\in E$，由独立模糊壳定义有

$$\delta(e)=\sup\{v(e)\mid\ \forall\nu\in\ell\}$$

因为 $\forall\nu\in\ell$，都有 $\nu\leqslant\sigma_{\boldsymbol{M}}$，则 $\sigma_{\boldsymbol{M}}(e)\geqslant\delta(e)$. 而从 $\sigma_{\boldsymbol{M}}\in\ell$. 又知 $\sigma_{\boldsymbol{M}}(e)\leqslant\delta(e)$，即 $\sigma_{\boldsymbol{M}}(e)=\delta(e)$. 故 $\sigma_{\boldsymbol{M}}=\delta$.

3　结　论

本文首先从模糊拟阵的模糊独立集的共同上界出发，提出独立模糊壳的概念；然后详细讨论了独立模糊壳的许多性质以及计算办法；接着，深入讨论了独立模糊壳隶属度集是基本序列集，以及模糊壳隶属度集是单点集的两种极端情况；最后，利用独立模糊壳隶属度集的这两种情况，研究了闭模糊拟阵、模糊截短列拟阵、准模糊图拟阵和部分特殊闭正规模糊拟阵的独立模糊壳性质. 然而，这些性质都是必要条件，而非充分条件. 但是，还是可以通过独立模糊壳来对模糊拟阵进行研究. 特别是将独立模糊壳结合模糊拟阵的其它概念和工具来研究模糊拟阵，可能会得到一些更好的结果. 这将是以后进一步用独立模糊壳研究模糊拟阵的方向.

参考文献：

[1]　GOETSCHEL R, VOXMAN W. Fuzzy Matroids [J]. Fuzzy Sets And Systems, 1988, 27(3): 291－302.

[2]　吴德垠. 一个准模糊图拟阵的新特征 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(2): 35－39.

[3]　刘桂真, 陈庆华. 拟阵 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1994.

[4]　GOETSCHEL R, VOXMAN W. Fuzzy Circuits [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 32(1): 35－43.

[5]　GOETSCHEL R, VOXMAN W. Bases of Fuzzy Mtroids [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31: 253－261.

[6]　吴德垠. 准模糊图拟阵 [J]. 重庆大学学报(自然科学版), 1996, 19(3): 101－109.

[7]　刘文斌. 准模糊图拟阵基图 [J]. 模糊系统与数学, 2004, 18(3): 80－85.

[8]　夏　军, 吴德垠, 陈娟娟. 准模糊图拟阵基的性质 [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2013, 30(2): 56－59.

[9] 陈娟娟，吴德垠，夏 军. 准模糊图拟阵的子拟阵 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(4)：52－54.

[10] 刘文斌，刘冬兵. 准模糊图拟阵的次限制最小基 [J]. 数学实践与认识，2015，45(5)：277－281.

[11] 吴德垠，王 彭. 关于模糊截短列拟阵的研究 [J]. 模糊系统与数学，2016，30(5)：125－131.

[12] 吴德垠. 闭正规模糊拟阵的模糊基集特征 [J]. 重庆大学学报(自然科学版)，1996，19(2)：30－35.

Independent Fuzzy Shells of Fuzzy Matroids

WU De-yin

School of Mathematics and Statistics，Chongqing University，Chongqing 401331，China

Abstract：In this paper，many characters of independent fuzzy sets in fuzzy matroids are analyzed and，based on the common upper bound of independent fuzzy sets，the concept of "independent fuzzy shell" is defined. First，the relations of independent fuzzy shells with induced matroids，induced matroid sequence and fundamental sequence are discussed. With the help of these analyses，a calculating method of the independent fuzzy shell for ordinary fuzzy matroids is constructed，and the validity of this method is proven. The core of this method is that the independent fuzzy shell can be uniquely determined by the induced matroid sequence and the fundamental sequence. Then，the property of the fuzzy matroids is researched on two particular cases that the degree set of membership about independent fuzzy shells are the fundamental sequence set and the single point set. Finally，the particular properties of independent fuzzy shells are studied on closed fuzzy matroids，quasi-fuzzy graph matroids，the particular part of closed normal fuzzy matroids and fuzzy truncation-sequence matroids. In these discussions，some are from independent fuzzy shells to fuzzy matroids ，and others from fuzzy matroids to independent fuzzy shells. With the help of these researches and discussions，the paper attempts to form a new concept and to find a new way for researching fuzzy matroids.

Key words：matroid；fuzzy matroid；quasi-fuzzy graph matroid；fuzzy truncation-sequence matroid；fundamental sequence；independent fuzzy shell

责任编辑 廖 坤
崔玉洁