第 40 卷第 8 期 西南大学学报(自然科学版) 2018 年 8 月
Vol. 40 No. 8 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Aug. 2018

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.08.014

有穷对数 φ 级整函数系数线性微分方程解的增长性[①]

伍廷蜜, 龙见仁, 吴秀碧, 覃智高

贵州师范大学 数学科学学院, 贵阳 550001

摘要: 利用亚纯函数的 Nevanlinna 理论研究了有穷对数 φ 级整函数系数线性微分方程解的增长性, 得到了解的增长级与系数的对数 φ 级之间的一些关系.

关 键 词: 线性微分方程; 整函数; 对数 φ 级; Nevanlinna 理论; 增长级

中图分类号: O174.5 **文献标志码**: A **文章编号**: 1673-9868(2018)08-0102-08

假设读者熟悉 Nevanlinna 理论的标准记号, 具体细节参看文献[1-2]. 假设 f 是复平面上的亚纯函数, 则其级和下级分别定义为:

$$\rho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log^{+} T(r, f)}{\log r}$$

$$\mu=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log^{+} T(r, f)}{\log r}$$

为了更精确地刻画亚纯函数的增长性, 引入了$[p, q]$级的定义[1-2], 其中 p, q 都为正整数.

文献[3]利用非减函数 φ: $[0, 1)\longrightarrow(0, \infty)$ 定义了单位圆盘上亚纯函数 $f(z)$ 相对于 $\varphi(r)$ 的增长级, 并利用此概念, 研究了单位圆上线性微分方程解的增长性. 单位圆盘上亚纯函数的增长级的刻画, 也可以参看文献[4]. 由单值化定理, 复平面和单位圆具有自己独特的地位, 因此研究复平面(单位圆)上的复线性微分方程解的性质是十分有意义的.

类似单位圆盘上的情形, 为了更加精确地刻画亚纯函数的增长级, 文献[5]定义了复平面上亚纯函数的$[p, q]$-φ 级和$[p, q]$-φ 零点收敛指数, 其中 $p\geqslant q\geqslant 1$ 或者 $p>q=1$, 并利用此定义研究了二阶微分方程 $f''+A(z)f=0$ 解的性质, 得到了解的$[p, q]$-φ 级的刻画. 利用对二阶方程的研究方法, 人们进一步研究了高阶方程解的性质, 如文献[6]研究了方程 $f^{(k)}+A(z)f=0$ 解的性质, 并得到了一些结果. 文献[7]利用$[p, q]$-φ 级刻画了线性微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1 f'+A_0 f=0 \tag{1}$$

解的增长性, 并得到了一些结果.

回顾文献[7]中方程(1)解的情形, 都只是考虑了 $p\geqslant q>1$ 或者 $p>q=1$ 的情形, 而 $p=1$, $q=2$ 的情形并未涉及. 本文的目的主要是考虑 $p=1$, $q=2$ 的情形, 继续研究方程(1)解的增长性与系数增长性之

---

① 收稿日期: 2017-05-03
基金项目: 国家自然科学基金项目(11501142); 贵州省科学技术基金项目(黔科合J字[2015]2112号); 贵州师范大学2016年博士科研启动项目, 2016年度贵州省"千"层次创新型人才项目.
作者简介: 伍廷蜜(1990-), 女, 硕士研究生, 主要从事函数论的研究.
通信作者: 龙见仁, 教授.

间的关系. 在本文中我们总是假定 $\varphi(r)$ 满足条件：对任意的 $\alpha \geqslant 1$，$q \geqslant 1$，有：

(F_1) $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\alpha r}{\varphi(r)}=1$；

(F_2) $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\log \alpha r}{\varphi(r)}=0$；

(F_3) $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\log_q\varphi(\alpha r)}{\log_q\varphi(r)}=1$.

类似文献[8]中亚纯函数对数级的定义，我们定义对数 φ 级如下：

定义 1 设 $\varphi(r)$：$[0,+\infty)\longrightarrow(0,+\infty)$ 为非减无界函数，则复平面上亚纯函数 f 相对于 φ 的对数 φ 级定义为

$$\sigma_{[1,2]}(f,\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(r,f)}{\log_2\varphi(r)}$$

若 f 为整函数，则 f 的对数 φ 级定义为

$$\sigma_{[1,2]}(f,\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log M(r,f)}{\log_2\varphi(r)}$$

注 1 当 $\varphi(r)=r$ 时，定义 1 即为对数级的定义. 显然，任意非常数的有理函数 f 的对数 φ 级是 1；在复平面上任意超越亚纯函数 f 的对数 φ 级不小于 1；任意对数 φ 级有穷的亚纯函数一定是零级函数.

定义 2 设 $\varphi(r)$：$[0,+\infty)\longrightarrow(0,+\infty)$ 为非减无界函数，亚纯函数 $f(z)$ 具有有穷正的对数 φ 级，则亚纯函数 $f(z)$ 的对数 φ 型定义为

$$\tau_{[1,2]}(f,\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r,f)}{(\log\varphi(r))^{\sigma_{[1,2]}(f,\varphi)}}$$

如果 $f(z)$ 是整函数，其对数 φ 型定义为

$$\tau_{[1,2]}(f,\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log M(r,f)}{(\log\varphi(r))^{\sigma_{[1,2]}(f,\varphi)}}$$

注 2 显然，任意非常数的多项式 p 对数 φ 型等于它的次数 $\deg(p)$；任意非常数的有理函数的对数 φ 型是有穷的；在复平面上的对数 φ 级为 1 的超越亚纯函数，其对数 φ 型必为无穷的.

类似文献[9]的引理 7 和引理 8 的证明方法，我们可以证明下面的性质：

性质 1 如果 $f_1(z)$，$f_2(z)$ 为亚纯函数，满足 $\sigma_{[1,2]}(f_1,\varphi)=a$，$\sigma_{[1,2]}(f_2,\varphi)=b$，则：

(i) $\sigma_{[1,2]}(f_1+f_2,\varphi)\leqslant\max\{a,b\}$，$\sigma_{[1,2]}(f_1\cdot f_2,\varphi)\leqslant\max\{a,b\}$；

(ii) 如果 $a\neq b$，$\sigma_{[1,2]}(f_1+f_2,\varphi)=\max\{a,b\}$，$\sigma_{[1,2]}(f_1\cdot f_2,\varphi)=\max\{a,b\}$.

性质 2 如果 $f_1(z)$，$f_2(z)$ 为亚纯函数，满足 $\tau_{[1,2]}(f_1,\varphi)=a_1$，$\tau_{[1,2]}(f_2,\varphi)=b_1$，则：

(i) $\tau_{[1,2]}(f_1+f_2,\varphi)\leqslant\max\{a_1,b_1\}$，$\tau_{[1,2]}(f_1\cdot f_2,\varphi)\leqslant\max\{a_1,b_1\}$；

(ii) 如果 $a_1\neq b_1$，$\tau_{[1,2]}(f_1+f_2,\varphi)=\max\{a_1,b_1\}$，$\tau_{[1,2]}(f_1\cdot f_2,\varphi)=\max\{a_1,b_1\}$.

集合 $E\subset[1,+\infty)$ 的线性测度定义为 $\mathrm{m}E=\int_E \mathrm{d}t$，集合 $E\subset[1,+\infty)$ 的对数性测度定义为 $\mathrm{m}_lE=\int_E\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$.

类似文献[10]的讨论方法，我们可证明下面的结果：

定理 1 设 $A_0,\cdots,A_{k-1}$ 是整函数，存在超越函数 $A_s(0\leqslant s\leqslant k-1)$ 满足

$$\max\{\sigma_{[1,2]}(A_j,\varphi):j\neq s,j=0,1,\cdots,k-1\}<\sigma_{[1,2]}(A_s,\varphi)<+\infty$$

则方程(1)的每个超越整函数解 f 满足：

$$\sigma_{[2,1]}(f,\varphi)=0 \qquad \sigma_{[2,2]}(f,\varphi)\leqslant\sigma_{[1,2]}(A_s,\varphi)+1\leqslant\sigma_{[1,2]}(f,\varphi)+1$$

如果 f 不是超越的，则 f 一定是次数不超过 $s-1$ 的多项式. 进一步，至少存在 1 个整函数解 f_1，满足

$$1<\sigma_{[1,2]}(A_s,\varphi)\leqslant\sigma_{[2,2]}(f_1,\varphi)\leqslant\sigma_{[1,2]}(A_s,\varphi)+1$$

定理 2　设 $A_0,\cdots,A_{k-1}$ 是整函数，如果 A_0 是超越的，且满足

$$\max\{\sigma_{[1,2]}(A_j,\varphi): j=1,2,\cdots,k-1\}<\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)<\infty$$

则方程(1) 的每个非平凡解 f 满足：

$$\sigma_{[2,1]}(f,\varphi)=0 \qquad 1\leqslant\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)\leqslant\sigma_{[2,2]}(f,\varphi)\leqslant\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)+1$$

定理 3　设 $A_0,\cdots,A_{k-1}$ 是整函数，如果 A_0 是超越的，且满足

$$\max\{\sigma_{[1,2]}(A_j.\varphi): j=1,2,\cdots,k-1\}=\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)<+\infty$$

及

$$\max\{\tau_{[1,2]}(A_j,\varphi): \sigma_{[1,2]}(A_j,\varphi)=\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)\}<\tau_{[1,2]}(A_0,\varphi)\leqslant+\infty$$

则方程(1) 的每个超越解 f 满足：

$$\sigma_{[1,2]}(f,\varphi)=0 \qquad 1\leqslant\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)\leqslant\sigma_{[2,2]}(f,\varphi)\leqslant\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)+1$$

定理 4　设 A_0 超越整函数，$\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)<\infty$，且 $A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是多项式. 则方程(1) 的每个非零整函数解 f 满足：

$$\sigma_{[1,1]}(f,\varphi)=+\infty \qquad \sigma_{[2,1]}(f,\varphi)=0 \qquad 1\leqslant\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)\leqslant\sigma_{[2,2]}(f,\varphi)\leqslant\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)+1$$

引理 1　设 f 是复平面上的一个亚纯函数，f 的对数 φ 级为 $\sigma_{[1,2]}(f,\varphi)$，则存在对数测度无限的集合 $E\subset[1,\infty)$，使得对所有的 $r\in E$，有

$$\sigma_{[1,2]}(f,\varphi)=\lim_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log_2\varphi(r)}$$

证　由对数 φ 级 $\sigma_{[1,2]}(f,\varphi)$ 的定义知，存在递增的点列 $\{r_n\}$，满足

$$\lim_{n\to\infty}r_n=\infty \qquad r_n<\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n<r_{n+1}$$

使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log T(r_n,f)}{\log_2\varphi(r_n)}=\sigma_{[1,2]}(f,\varphi) \tag{2}$$

于是存在充分大的 N_0，使得当 $n>N_0$，$r\in\left[r_n,\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n\right]$ 时，有

$$\frac{\log T(r_n,f)}{\log_2\varphi(r_n)}\cdot\frac{\log_2\varphi(r_n)}{\log_2\varphi\left(\frac{n+1}{n}r_n\right)}=\frac{\log T(r_n,f)}{\log_2\varphi\left(\frac{n+1}{n}r_n\right)}\leqslant\frac{\log T(r,f)}{\log_2\varphi(r)} \tag{3}$$

令

$$E=\bigcup_{n=N_0}^{\infty}\left[r_n,\frac{n+1}{n}r_n\right]$$

由(2),(3) 式及条件(F_3)，$r\in E$，有

$$\sigma_{[1,2]}(f,\varphi)\leqslant\varliminf_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log_2\varphi(r)}$$

另一方面，对于 $r\in E$，显然

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log_2\varphi(r)}\leqslant\sigma_{[1,2]}(f,\varphi)$$

因此，对 $r\in E$，有：

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log_2\varphi(r)}=\sigma_{[1,2]}(f,\varphi)$$

$$m_lE=\sum_{n=N_0}^{\infty}\int_{r_n}^{\frac{n+1}{n}r_n}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\sum_{n=N_0}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\infty$$

类似于引理 1 证明方法，有下面的引理：

引理 2　设 f 是超越的整函数，且 $0<\sigma_{[1,2]}(f,\varphi)<+\infty$，其对数 φ 型为 $\tau_{[1,2]}(f,\varphi)$，则存在对数测

度为无穷的集合 $F \subset (1, +\infty)$，使得对所有的 $r \in F$，有

$$\tau_{[1,2]}(f, \varphi) = \lim_{r\to\infty} \frac{\log M(r, f)}{(\log \varphi(r))^{\sigma_{[1,2]}(f, \varphi)}}$$

引理 3 设 $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ 为整函数，满足 $\max\{\sigma_{[1,2]}(A_j, \varphi): j=0,1,\cdots,k-1\} \leqslant \alpha < +\infty$. 则方程(1) 的任意解 f 满足 $\sigma_{[2,1]}(f, \varphi) = 0$ 且 $\sigma_{[2,2]}(f, \varphi) \leqslant \alpha + 1$.

证 如果 f 是多项式，则 $\sigma_{[2,1]}(f, \varphi) = 0$ 且 $\sigma_{[2,2]}(f, \varphi) = 0 < \alpha + 1$，故结论成立.

如果 f 为方程(1) 的任一超越解，则由文献[11] 的定理 1.15，存在集合 $E \subset \mathbb{R}_+$，$\mathrm{m}_l E < \infty$，使得对：

$$|z| = r \notin E \qquad |f(z)| = M(r, f)$$

有

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\upsilon(r, f)}{z}\right)^j (1 + \eta_k(z)) \qquad j = 0,1,\cdots,k \tag{4}$$

把(4) 式代入方程(1)，得

$$(1 + o(1))\upsilon(r, f) \leqslant r^k \sum_{j=0}^{k=-1} |A_j(z)| \qquad r \notin E$$

又因为 $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ 的对数 φ 级有限，则对任意的 ε 和足够大的 r，有

$$M(r, A_j) \leqslant \exp\{(\log \varphi(r))^{\alpha+\varepsilon}\} \qquad j = 0,1,\cdots,k-1$$

由文献[12] 的引理 1.1.2，对任意常数 $\beta > 1$ 和足够大的 r_0，当 $r > r_0$ 时有

$$\upsilon(r, f) \leqslant r^{\beta k} \exp\{\log \varphi(r)^{\alpha+2\varepsilon}\}$$

结合文献[11] 的定理 1.9，有

$$\log M(r, f) \leqslant \log \mu(r, f) + \log(\upsilon(2r, f) + 2) \leqslant$$
$$r^{\beta k} \exp\{(\log \varphi(r))^{\alpha+3\varepsilon}\} \log r + (\beta k) \log r + (\log r)^{\alpha+3\varepsilon} + O(1)$$

又由 φ 的性质(F_1)，则有

$$\log^+ \log^+ \log^+ M(r, f) \leqslant (\alpha + 1 + 4\varepsilon) \log\log \varphi(r) + \log\log\log \varphi(r) + O(1)$$

因此 $\sigma_{[2,1]}(f, \varphi) = 0$ 且 $\sigma_{[2,2]}(f, \varphi) \leqslant \alpha + 1$.

引理 4 设 $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ 为整函数，满足

$$\max\{\sigma_{[1,2]}(A_j, \varphi): j = 1,\cdots,k-1\} < \sigma_{[1,2]}(A_0, \varphi) < +\infty$$

则方程(1) 的任意非平凡解 f 满足 $\sigma_{[2,2]}(f, \varphi) \geqslant \sigma_{[1,2]}(A_0, \varphi)$.

证 假设 f 是方程(1) 的任意非零解，由方程(1)，有

$$-A_0(z) = \frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}(z) \frac{f^{(k-1)}}{f} + \cdots + A_1(z) \frac{f'}{f} \tag{5}$$

由文献[13] 的定理 4.1 和(5) 式得到

$$m(r, A_0) \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + \sum_{j=1}^{k} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) = \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + k \log^+ T(2r, f) + O(1) \tag{6}$$

令

$$b = \max\{\sigma_{[1,2]}(A_j, \varphi): j = 1,2,\cdots,k-1\}$$

则 $b < \sigma_{[1,2]}(A_0, \varphi)$，则

$$m(r, A_j) = T(r, A_j) \leqslant (\log \varphi(r))^{b+\varepsilon} \qquad j = 1,2,\cdots,k \tag{7}$$

因为

$$\sigma_{[1,2]}(A_0, \varphi) = \sigma > 0$$

由引理 1，对任意 ε($0 < 3\varepsilon < \sigma - b$)，存在递增趋于无穷的序列 $\{r_n\}$，使得

$$m(r_n, A_0) \geqslant \log \varphi(r_n)^{\sigma-\varepsilon} \tag{8}$$

把(7)，(8) 式代入(6) 式中，得到

$$(\log \varphi(r_n))^{\sigma-\varepsilon} \leqslant (\log \varphi(r_n))^{b+2\varepsilon} + k \log^+ T(2r_n, f) + O(1)$$

即

$$(1-o(1))(\log\varphi(r))^{\sigma-\varepsilon}\leqslant k\log^+ T(2r_n, f)$$

从而

$$\sigma_{[2,2]}(f,\varphi)\geqslant\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)$$

引理 5　设 $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ 为整函数，满足

$$\max\{\sigma_{[1,2]}(A_j,\varphi): j\neq s, j=0,1,\cdots,k-1\}<\sigma_{[1,2]}(A_s,\varphi)<+\infty$$

则方程(1) 的任意超越整函数解 f 满足

$$\sigma_{[1,2]}(f,\varphi)\geqslant\sigma_{[1,2]}(A_s,\varphi)$$

证　假设 f 是方程(1) 的超越解，由方程(1)，有

$$-A_s=\left(\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}}+A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}}+\cdots+A_{s+1}\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}+A_{s-1}\frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}}+\cdots+A_0\frac{f}{f^s}\right)=$$

$$\left[\frac{f^{(k)}}{f^{(s)}}+A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f^{(s)}}+\cdots+A_{s+1}\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}}\right]+\frac{f}{f^{(s)}}\left[A_{s-1}\frac{f^{(s-1)}}{f}+\cdots+A_1\frac{f'}{f}+A_0\right]$$

显然

$$m\left(r,\frac{f}{f^{(s)}}\right)\leqslant T(r,f)+T\left(r,\frac{1}{f^{(s)}}\right)\leqslant$$

$$(s+2)T(r,f)+m\left(r,\frac{f^{(s)}}{f}\right)+O(1)$$

又由文献[13] 的定理 4.1，有

$$T(r,A_s)=m(r,A_s)\leqslant\sum_{j\neq s}m(r,A_j)+\max\{(k-s),s\}\log T(r,f)+(s+2)T(r,f)+O(1)$$

即

$$T(r,A_s)\leqslant\sum_{j\neq s}T(r,A_j)+(s+2)(1-o(1))T(r,f) \tag{9}$$

令

$$b=\max\{\sigma_{[1,2]}(A_j,\varphi): j\in\{0,1,\cdots,k-1\}\backslash\{s\}\}$$

则 $b<\sigma_{[1,2]}(A_s,\varphi)$. 则有

$$T(r,A_j)\leqslant(\log\varphi(r))^{b+\varepsilon}\qquad j\in\{0,1,\cdots,k-1\}\backslash\{s\} \tag{10}$$

因为

$$\sigma_{[1,2]}(A_s,\varphi)=\sigma>0$$

由引理 1，对任意的 $\varepsilon(0<3\varepsilon<\sigma-b)$，存在递增趋于无穷的序列$\{r_n\}$，使得

$$T(r_n,A_s)\geqslant(\log\varphi(r_n))^{\sigma-\varepsilon} \tag{11}$$

把(10) 式和(11) 式代入(9) 式得到

$$(\log\varphi(r_n))^{\sigma-\varepsilon}\leqslant(\log\varphi(r_n))^{b+3\varepsilon}+(s+2)(1-o(1))T(r_n,f)$$

即

$$(1-o(1))(\log\varphi(r_n))^{\sigma-\varepsilon}\leqslant(s+2)(1-o(1))T(r_n,f)$$

从而

$$\sigma_{[1,2]}(f,\varphi)\geqslant\sigma_{[1,2]}(A_s,\varphi)$$

定理 1 的证明　首先假设 f 是方程(1) 的超越整函数解，由引理 5，我们有

$$\sigma_{[1,2]}(f,\varphi)\geqslant\sigma_{[1,2]}(A_s,\varphi)\geqslant 1$$

另一方面，由引理 3，我们有：

$$\sigma_{[2,1]}(f,\varphi)=0\qquad\sigma_{[2,2]}(f,\varphi)\leqslant\sigma_{[1,2]}(A_s,\varphi)+1$$

因此 $\sigma_{[2,1]}(f,\varphi)=0$，$\sigma_{[2,2]}(f,\varphi)\leqslant\sigma_{[1,2]}(A_s,\varphi)+1\leqslant\sigma_{[1,2]}(f,\varphi)+1$.

假设 f 是次数大于 s 的多项式，则 $f^{(s)}(z)\neq 0$. 类似引理 5 的讨论，有

$$T(r,A_s)=m(r,A_s)\leqslant\sum_{j\neq s}m(r,A_j)+\max\{(k-s),s\}\log T(r,f)+(s+2)T(r,f)+O(1)$$

由文献[13]的定理4.1得

$$T(r,A_s)\leqslant\sum_{j\neq s}T(r,A_j)+(s+2)(1-o(1))T(r,f)\tag{12}$$

令

$$b=\max\{\sigma_{[1,2]}(A_j,\varphi):j\neq s,j=0,1,\cdots,k-1\}$$

则 $b<\sigma_{[1,2]}(A_s,\varphi)$，从而

$$m(r,A_j)=T(r,A_j)\leqslant(\log\varphi(r))^{b+\varepsilon}\qquad j\in\{0,1,\cdots,k-1\}\backslash\{s\}\tag{13}$$

$\sigma_{[1,2]}(A_s,\varphi)=\sigma>0$. 由引理1，对任意的 $\varepsilon(0<4\varepsilon<\sigma-b)$，存在对数测度为无穷的集合 E，存在递增趋于无穷的序列 $\{r_n\}$，使得对所有的 $r_n\in E$，有

$$T(r_n,A_s)\geqslant(\log\varphi(r_n))^{\sigma-\varepsilon}\tag{14}$$

因此，把(13),(14)式代入(12)式，即对所有 $r_n\in E$，有

$$(\log\varphi(r_n))^{\sigma-\varepsilon}\leqslant(\log\varphi(r_n))^{b+3\varepsilon}+(s+2)(1-o(1))T(r_n,f)$$

又由 f 是多项式，因此

$$(\log\varphi(r_n))^{\sigma-\varepsilon}\leqslant(\log\varphi(r_n))^{b+3\varepsilon}$$

显然，这与 ε 的选取矛盾，因此如果 f 是多项式解，则必是次数不超过 $s-1$ 的多项式.

设 $\{f_1,\cdots,f_k\}$ 为方程(1)的基础解，由文献[14]的引理3有

$$T(r,A_s)=m(r,A_s)=O\{\log(\max_{1\leqslant j\leqslant k}T(r,f_j))\}$$

这表明，在 $\{f_1,\cdots,f_k\}$ 中存在一个解，设为 f_1，满足

$$T(r,A_s)=O\{\log T(r,f_1)\}$$

即

$$\sigma_{[2,2]}(f_1,\varphi)\geqslant\sigma_{[1,2]}(A_s,\varphi)>1$$

因此

$$\sigma_{[1,2]}(A_s,\varphi)+1\geqslant\sigma_{[2,2]}(f_1,\varphi)\geqslant\sigma_{[1,2]}(A_s,\varphi)>1$$

定理2的证明 由引理4，得到方程(1)的每个非零整函数解 f 满足

$$\sigma_{[2,2]}(f,\varphi)\geqslant\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)\geqslant1$$

另一方面，由引理3，我们得到方程(1)的每个解 f 满足 $\sigma_{[2,1]}(f,\varphi)=0$ 且

$$\sigma_{[2,2]}(f,\varphi)\leqslant\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)+1<+\infty$$

定理3的证明 设 f 是方程(1)任意超越解，由(5)式有

$$|A_0(z)|=\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right|+|A_{k-1}(z)|\left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right|+\cdots+|A_1(z)|\left|\frac{f'}{f}\right|\tag{15}$$

由文献[15]的定理3，存在对数测度有穷的集合 $E_2\subset(1,+\infty)$，使得对于所有 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_2$，有

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|\leqslant\left(\frac{T(\alpha r,f)}{r}\log^{\alpha}r\log T(\alpha r,f)\right)^j\tag{16}$$

其中 $\alpha>1$ 为常数.

由假设：

$$\max\{\sigma_{[1,2]}(A_j,\varphi):j=1,2,\cdots,k-1\}=\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)<\infty$$

$$\max\{\tau_{[1,2]}(A_j,\varphi),\sigma_{[1,2]}(A_j,\varphi)=\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)\}\leqslant\tau_{[1,2]}(A_0,\varphi)\leqslant\infty$$

存在非空集合 $J_1\subseteq\{1,2,\cdots,k-1\}$，使得对 $j\in J_1$，有：

$$\sigma_{[1,2]}(A_j,\varphi)=\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)=\sigma\qquad\tau_{[1,2]}(A_j,\varphi)<\tau_{[1,2]}(A_0,\varphi)=\tau$$

且对于 $i\in\{1,2,\cdots,k-1\}\backslash J_1$，我们有

$$\alpha_1=\max\{\sigma_{[1,2]}(A_i,\varphi)\}<\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)=\sigma$$

因此，存在常数 β_1 和 β，满足

$$\max\{\tau_{[1,2]}(A_j,\varphi): j\in J_1\}<\beta_1<\beta<\tau$$

使得：

$$M(r,A_i)\leqslant \exp(\log\varphi(r))^{\alpha_1+\varepsilon}<$$

$$\exp\{\beta_1(\log\varphi(r))^{\sigma}\}\qquad i\in\{1,\cdots,k-1\}\backslash J_1 \tag{17}$$

$$M(r,A_j)\leqslant \exp\{\beta_1(\log\varphi(r))^{\sigma}\}\qquad j\in J_1 \tag{18}$$

由引理 2，存在对数测度为无穷的集合 F，使得对所有的 $r\in F$，有

$$M(r,A_0)>\exp\{\beta(\log\varphi(r))^{\sigma}\} \tag{19}$$

则对所有的 z 满足 $|A_0(z)|=M(r,A_0)$ 且 $|z|=r\in F\backslash E_2$，有

$$\exp\{\beta(\log\varphi(r))^{\sigma}\}\leqslant k\exp\{\beta_1(\log\varphi(r))^{\sigma}\}\left(\frac{T(\alpha r,f)}{r}\log^{\alpha} r\log T(\alpha r,f)\right)^{k}$$

即

$$(1-o(1))\exp\{\beta(\log\varphi(r))^{\sigma}\}\leqslant\{(1-o(1))T(\alpha r,f)\log^{\alpha} r\}^{k}$$

再结合 φ 的条件(F_1)，有

$$\sigma_{[1,2]}(f,\varphi)\geqslant\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)\geqslant 1$$

另一方面，由引理 3，我们得到方程(1) 的每个解 f 满足：

$$\sigma_{[2,1]}(f,\varphi)=0\qquad \sigma_{[2,2]}(f,\varphi)\leqslant\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)+1<\infty$$

定理 4 的证明　假设 A_0 是零级的超越整函数，其它的系数 $A_j(j=1,2,\cdots,k-1)$ 是多项式，类似文献[10] 的定理 1.1 的证明，方程(1) 的每个非零解满足：

$$\sigma_{[1,1]}(f,\varphi)=+\infty\qquad \sigma_{[2,1]}(f,\varphi)=\sigma_{[1,1]}(A_0,\varphi)=0$$

如果 $\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)=1$，则 $\tau_{[1,2]}(A_0,\varphi)=+\infty$，注意 $A_j(j=1,2,\cdots,k-1)$ 是多项式，且它们的对数 φ 型有限. 因此，对于 $j=1,2,\cdots,k-1$，有：

$$\sigma_{[1,2]}(A_j,\varphi)=\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)=1\qquad \tau_{[1,2]}(A_j,\varphi)=\deg(A_j)<\tau_{[1,2]}(A_0,\varphi)=+\infty$$

由定理 3 得

$$\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)\leqslant\sigma_{[2,2]}(f,\varphi)\leqslant\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)+1$$

如果 $\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)>1(j=1,2,\cdots,k-1)$，则

$$1=\sigma_{[1,2]}(A_j,\varphi)<\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)$$

由定理 2 的条件得

$$1\leqslant\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)\leqslant\sigma_{[2,2]}(f,\varphi)\leqslant\sigma_{[1,2]}(A_0,\varphi)+1$$

参考文献：

[1] HAYMAN W K. Meromorphic Functions [M]. Oxford: Qxford Mathematical Monographs Clarendon Press, 1964.

[2] YANG L. Value Distribution Theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[3] CHYZHYKOV I, HEITTOKANGAS J, RÄTTYÄ J. Finiteness of φ-Order of Solutions of Linear Differential Equations in the Unit Disc [J]. J d' Analyse Math, 2009, 109(1): 163-198.

[4] 龙见仁，覃智高，伍廷蜜. 单位圆上解析函数的对数级 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2017，35(6)：77-81.

[5] SHEN X, TU J, XU H Y. Complex Oscillation of a Second-Order Linear Differential Equation with Entire Coefficients of [p, q]-φ Order [J]. Adv Difference Equ, 2014, 2014(1): 1-14.

[6] 周　鉴，杨丛丽. 一类高阶整函数系数微分方程的复振荡 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2016，34(1)：45-47.

[7] 吴渊鸿. [p，q]-$\varphi(r)$级整函数在复线性微分方程中的应用 [D]. 南昌：江西师范大学，2014.

[8] PETERCHERN T Y. On Meromorphic Functions with Finite Logarithmic Order [J]. Tran Amer Math Soc, 2005, 358(2): 473-489.

[9] BELAÍDI B. Growth of Meromorphic Solutions of Finite Logarithmic Order of Linear Difference Equations [J]. Fasciculi Math, 2015, 54(1): 5-20.

[10] CAO T B, LIU K, WANG J. On the Growth of Solutions of Complex Differential Equation with Entire Coefficients of Finite Logarithmic Order [J]. Math Reports, 2013, 15(2): 249-269.

[11] 何育赞，肖修治. 代数体函数与常微分方程 [M]. 北京：科学出版社，1988.

[12] LAINE I. Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations [M]. Berlin: W. de. Gruyter, 1993.

[13] HEITTOKANGAS J, KORHONEN R, RÄTTYÄ J. Generalized Logarithmic Derivative Estimates of Gol'dberg- Grinshtein Type [J]. Bull London Math Soc, 2004, 36(1): 105-114.

[14] FRANK G, HELLERSTEIN S. On the Meromorphic Solutions of Non-Homogeneous Linear Differential Equations with Polynomial Coefficients [J]. Proc London Math Soc, 1986, 53: 407-428.

[15] GUNDERSEN G. Estimates for the Logarithmic Derivative of a Meromorphic Function, Plus Similar Estimate [J]. J London Math Soc, 1988, 37(2): 88-104.

On the Growth of Solutions of Linear Differential Equations with Entire Coefficients of Finite Logarithmic φ Order

WU Ting-mi, LONG Jian-ren, WU Xiu-bi, QIN Zhi-gao

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China

Abstract: The growth of solutions of linear differential equations with entire coefficients of finite logarithmic φ order is investigated by using Nevanlinna theory of meromorphic functions, and the relationships between the order of growth of solutions of the equations and the logarithmic φ order of coefficients are obtained.

Key words: linear differential equation; entire functions; logarithmic φ order; Nevanlinna theory; order of growth

责任编辑 廖 坤
崔玉洁