DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.08.015

分层混合均衡问题和不动点问题的等价性①

闻道君[1], 张 蓉[2], 宋树枝[1]

1. 重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067; 2. 重庆邮电大学 理学院, 重庆 400065

摘要: 在 Hilbert 空间中, 介绍了一类改进的混合均衡问题, 并在适当条件下研究了混合均衡问题与不动点问题的等价关系, 进一步建立了关于分层混合均衡问题解的一个充分必要条件.

关 键 词: 分层混合均衡问题; 不动点; 等价关系; Hilbert 空间

中图分类号: O177.91 **文献标志码**: A **文章编号**: 1673-9868(2018)08-0110-04

设 C_1 和 C_2 分别为 Hilbert 空间 H_1 和 H_2 的非空闭凸子集, 其范数和内积分别表示为 $\|.\|$ 和 $\langle .,. \rangle$. 设 $F: C_1 \times C_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ 为二元泛函, $f: C_1 \longrightarrow H_1$ 为非线性映象, 求一点 $x^* \in C_1$, 使得

$$F(x^*, x) + \langle f(x^*), x - x^* \rangle \geqslant 0 \qquad \forall x \in C_1 \tag{1}$$

称(1)式为混合均衡问题, 解集表示为 $\mathrm{MEP}(H_1, F, f)$. 如果 $f=0$, (1)式将退化为均衡问题, 其解集表示为 $\mathrm{EP}(H_1, F)$; 如果 $F=0$, (1)式将退化为经典的变分不等式问题[1-2].

设 $f_i: C_1 \longrightarrow H_1$ 为非线性映象($i=1,2,\cdots,N$), 求一点 $x^* \in C_1$, 使得

$$F(x^*, x) + \left\langle \sum_{i=1}^{N} a_i f_i(x^*), x - x^* \right\rangle \geqslant 0 \qquad \forall x \in C_1 \tag{2}$$

其中 $a_i \in (0, 1)$ 且 $\sum_{i=1}^{N} a_i = 1$. 称(2)式为改进的混合均衡问题, 这是混合均衡问题的一种重要的推广形式, 也是解决复杂经济系统的有力工具[3-9].

在此基础上, 本文介绍一个改进的分层混合均衡问题: 设 $A: H_1 \longrightarrow H_2$ 为有界线性算子, $G: C_2 \times C_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 为二元泛函, 且 $g_i: C_2 \longrightarrow H_2$ 为非线性映象($i=1, 2, \cdots, N$), 求一点 $x^* \in C_1$, 使得

$$\begin{cases} F(x^*, x) + \left\langle \sum_{i=1}^{N} a_i f_i(x^*), x - x^* \right\rangle \geqslant 0 & \forall x \in C_1 \\ y^* = Ax^*: G(y^*, y) + \left\langle \sum_{i=1}^{N} b_i g_i(y^*), y - y^* \right\rangle \geqslant 0 & \forall y \in C_2 \end{cases} \tag{3}$$

其中 $a_i, b_i \in (0, 1)$, 且 $\sum_{i=1}^{N} a_i = 1$, $\sum_{i=1}^{N} b_i = 1$. 分层混合均衡问题(3)的解集记为

$$\Omega = \left\{ x^* \in C_1 : x^* \in \mathrm{MEP}\Big(H_1, F, \sum_{i=1}^{N} a_i f_i\Big), y^* = Ax^* \in \mathrm{MEP}\Big(H_2, G, \sum_{i=1}^{N} b_i g_i\Big) \right\}$$

本文的目的是建立关于改进的混合均衡问题(2)和分层混合均衡问题(3)的解与不动点问题的等价关系, 为进一步研究分层混合均衡问题的数值方法提供有效的理论基础和预解算子.

---

① 收稿日期: 2018-01-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(11471059); 重庆市前沿与应用基础研究项目(cstc2016jcyjA0101, cstc2016jcyjA0564); 重庆市教委科技研究项目(KJ1500623, KJ1500634).

作者简介: 闻道君(1975-), 男, 副教授, 主要从事非线性算子的不动点定理及其应用的研究.

设 C 为 Hilbert 空间 H 的一个非空闭凸子集，如果 $T: C \longrightarrow C$ 为非线性映象，由文献[10]可知，如果 $T: C \longrightarrow C$ 是非扩张映象，则 T 满足不等式

$$\langle (I-T)x-(I-T)y,\ T(y)-T(x)\rangle \leqslant \frac{1}{2}\|(I-T)x-(I-T)y\|^2 \qquad \forall x,y \in C$$

以 $\mathrm{Fix}(T)$ 表示 T 的不动点集，即

$$\mathrm{Fix}(T)=\{x \in C: T(x)=x\}$$

σ-强单调映象和 η-逆强单调映象的定义同文献[2]. 同时，假设 $F: C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足下列条件：

(i) $F(x,x)=0$, $\forall x \in C$;

(ii) F 是单调映象，即 $F(x,y)+F(y,x) \leqslant 0$, $\forall x,y \in C$，且仅当 $x=y$ 时，$F(x,y)+F(y,x)=0$;

(iii) $\lim\limits_{t \to 0} F(tz+(1-t)x,\ y) \leqslant F(x,y)$, $\forall x,y,z \in C$;

(iv) 对 $\forall x \in C$, $y \longmapsto F(x,y)$ 是凸的且下半连续的.

引理 1[1-2] 设 $F: C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足条件(i)—(iv). 对 $\forall x \in H$，存在 $z \in C$ 使得 $T_r^F: H \longrightarrow C$ 满足

$$T_r^F(x)=\left\{z \in C: F(z,y)+\frac{1}{r}\langle y-z,\ z-x\rangle \geqslant 0,\ \forall y \in C\right\}$$

其中 $r>0$，则下列结论成立：

(a) T_r^F 是单值的，且 $\|T_r^F(x)-T_r^F(y)\|^2 \leqslant \langle T_r^F(x)-T_r^F(y),\ x-y\rangle$, $\forall x,y \in H$;

(b) $\mathrm{EP}(H,F)$ 是闭凸的，且 $\mathrm{EP}(H,F)=\mathrm{Fix}(T_r^F)$.

定理 1 设 C_1 为 Hilbert 空间 H_1 的非空闭凸子集，$F: C_1 \times C_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ 为二元泛函并满足条件(i)—(iv)，且 $f_i: C_1 \longrightarrow H_1$ 为 η_i-逆强单调映象($i=1,2,\cdots,N$). 如果 $r \in (0,2\eta)$，且 $\eta=\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}\{\eta_i\}$，则(2)式的解集

$$\mathrm{Fix}\left(T_r^F\left(I-r\sum_{i=1}^N a_i f_i\right)\right)=\bigcap_{i=1}^N \mathrm{Fix}(T_r^F(I-rf_i)) \tag{4}$$

证 由引理1，不难证明

$$\bigcap_{i=1}^N \mathrm{Fix}(T_r^F(I-rf_i)) \subseteq \mathrm{Fix}\left(T_r^F\left(I-r\sum_{i=1}^N a_i f_i\right)\right)$$

不放设 $x_0 \in \mathrm{MEP}\left(H_1,F,\sum\limits_{i=1}^N a_i f_i\right)$, $x^* \in \bigcap\limits_{i=1}^N \mathrm{MEP}(H_1,F,f_i)$，由引理1可得：

$$x_0=T_r^F\left(I-r\sum_{i=1}^N a_i f_i\right)x_0 \qquad x^*=T_r^F\left(I-r\sum_{i=1}^N a_i f_i\right)x^* \tag{5}$$

利用 T_r^F 的非扩张性和 f_i 的 η-逆强单调性得

$$\begin{aligned}
\|x_0-x^*\|^2 = & \left\|T_r^F\left(I-r\sum_{i=1}^N a_i f_i\right)x_0-T_r^F\left(I-r\sum_{i=1}^N a_i f_i\right)x^*\right\|^2 \leqslant \\
& \left\|(x_0-x^*)-r\sum_{i=1}^N a_i(f_i(x_0)-f_i(x^*))\right\|^2 \leqslant \\
& \|x_0-x^*\|^2-2r\sum_{i=1}^N a_i\langle x_0-x^*,\ f_i(x_0)-f_i(x^*)\rangle + \\
& r^2\sum_{i=1}^N a_i\|f_i(x_0)-f_i(x^*)\|^2 \leqslant \\
& \|x_0-x^*\|^2+r\sum_{i=1}^N a_i(r-2\eta)\|f_i(x_0)-f_i(x^*)\|^2
\end{aligned}$$

整理得

$$\sum_{i=1}^N a_i(2\eta-r)\|f_i(x_0)-f_i(x^*)\|^2 \leqslant 0$$

因为 $r \in (0,2\eta)$，所以

$$f_i(x_0)=f_i(x^*) \qquad i=1,2,\cdots,N \tag{6}$$

另一方面，由于 x_0 和 x^* 都是(2)式的解，则：

$$F(x_0, x)+\left\langle \sum_{i=1}^{N} a_i f_i(x_0), x-x_0 \right\rangle \geqslant 0 \qquad \forall x \in C_1 \tag{7}$$

$$F(x^*, x)+\left\langle \sum_{i=1}^{N} a_i f_i(x^*), x-x^* \right\rangle \geqslant 0 \qquad \forall x \in C_1 \tag{8}$$

在(7)式和(8)式中分别取 $x=x^*$ 和 $x=x_0$，得：

$$F(x_0, x^*)+\left\langle \sum_{i=1}^{N} a_i f_i(x_0), x^*-x_0 \right\rangle \geqslant 0 \tag{9}$$

$$F(x^*, x_0)+\left\langle \sum_{i=1}^{N} a_i f_i(x^*), x_0-x^* \right\rangle \geqslant 0 \tag{10}$$

将(9)式和(10)式相加，并结合(6)式，得

$$F(x_0, x^*)+F(x^*, x_0) \geqslant 0$$

同时，结合 F 的单调性(ii)，进一步得

$$F(x_0, x^*)+F(x^*, x_0)=0 \tag{11}$$

由条件(ii)和(11)式得 $x_0=x^*$，即 $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{Fix}(T_r^F(I-rf_i))$. 因此，式(4)成立.

定理 2　设 C_1 和 C_2 为 Hilbert 空间 H_1 和 H_2 的非空闭凸子集，$F: C_1 \times C_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ 和 $G: C_2 \times C_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 为二元泛函并满足条件(i)—(iv). 设 $f_i: C_1 \longrightarrow H_1$ 为 η_i-逆强单调映象，$g_i: C_2 \longrightarrow H_2$ 为 μ_i-逆强单调映象($i=1,2,\cdots,N$). 如果 $r \in (0, 2\rho)$，且 $\rho=\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}\{\eta_i, \mu_i\}$，则 $x^* \in \Omega$ 的充分必要条件是

$$x^*=T_r^F\left(I-r\sum_{i=1}^{N} a_i f_i\right)\left[I-\gamma A^*\left(I-T_r^G\left(I-r\sum_{i=1}^{N} b_i g_i\right)\right)A\right]x^*$$

证　必要性　记 $f=\sum_{i=1}^{N} a_i f_i$，$g=\sum_{i=1}^{N} b_i g_i$，如果 $x^* \in \Omega$，即 $x^* \in \mathrm{MEP}(H_1, F, f)$ 且 $Ax^* \in \mathrm{MEP}(H_2, G, g)$. 由引理 1 可知 $x^* \in \mathrm{Fix}(T_r^F(I-rf))$ 且 $Ax^* \in \mathrm{Fix}(T_r^G(I-rg))$，进一步得

$$x^*=T_r^F(I-rf)[x^*-\gamma A^*(I-T_r^G(I-rg))Ax^*] \tag{12}$$

充分性　设存在 $q \in \Omega$，则由必要性的证明过程可知

$$q=T_r^F(I-rf)[q-\gamma A^*(I-T_r^G(I-rg))Aq] \tag{13}$$

由(12)式和(13)式，并利用 $T_r^F(I-rf)$ 的非扩张性，得

$$\begin{aligned}\|x^*-q\|^2 \leqslant& \|[x^*-\gamma A^*(I-T_r^G(I-rg))Ax^*]-[q-\gamma A^*(I-T_r^G(I-rg))Aq]\|^2= \\ &\|x^*-q\|^2-2\gamma\langle x^*-q, A^*(I-T_r^G(I-rg))Ax^*\rangle+ \\ &\gamma^2\|A^*(I-T_r^G(I-rg))Ax^*\|^2\end{aligned} \tag{14}$$

又因为

$$\begin{aligned}&-2\gamma\langle x^*-q, A^*(I-T_r^G(I-rg))Ax^*\rangle= \\ &-2\gamma\langle Ax^*-Aq, (I-T_r^G(I-rg))Ax^*\rangle= \\ &2\gamma\langle Aq-T_r^G(I-rg)Ax^*+T_r^G(I-rg)Ax^*-Ax^*, (I-T_r^G(I-rg))Ax^*\rangle= \\ &2\gamma[\langle Aq-T_r^G(I-rg)Ax^*, (I-T_r^G(I-rg))Ax^*\rangle-\|(I-T_r^G(I-rg))Ax^*\|^2] \leqslant \\ &2\gamma\left[\frac{1}{2}\|(I-T_r^G(I-rg))Ax^*\|^2-\|(I-T_r^G(I-rg))Ax^*\|^2\right]= \\ &-\gamma\|(I-T_r^G(I-rg))Ax^*\|^2\end{aligned}$$

结合(13)式，得

$$\begin{aligned}\|x^*-q\|^2 \leqslant& \|x^*-q\|^2-\gamma\|(I-T_r^G(I-rg))Ax^*\|^2+\gamma^2\|A^*(I-T_r^G(I-rg))Ax^*\|^2 \leqslant \\ &\|x^*-q\|^2-\gamma(1-\gamma L)\|(I-T_r^G(I-rg))Ax^*\|^2\end{aligned} \tag{15}$$

由(15)式得

$$Ax^* \in \mathrm{Fix}(I-T_r^G(I-rg))$$

结合(12)式进一步得

$$x^{*} \in \mathrm{Fix}(I - T_r^F(I - rf))$$

因此，$x^{*} \in \Omega$.

参考文献：

[1] 闻道君. 广义平衡问题和渐近严格伪压缩映象的粘滞-投影方法[J]. 系统科学与数学，2014，34(6)：693－702.

[2] KAZMI K R，RIZVI S H. A Hybrid Extragradient Method for Approximating the Common Solutions of a Variational Inequality，a System of Variational Lnequalities，a Mixed Equilibrium Problem and a Fixed Point Problem [J]. Appl Math Comput，2012，218(2)：5439－5452.

[3] KONNOV I V，VOLOTSKAYA E O. Mixed Variational Inequalities and Economics Equilibrium Problems [J]. J Appl Math，2002，2(6)：289－314.

[4] KHUANGSATUNG W，KANGTUNYAKARN A. Algorithm of a New Variational Inclusion Problem and Strictly Pseudononspreading Mapping with Application [J]. Fixed Point Theory Appl，2014(1)：1－27.

[5] TANG G，ZHU M，LIU H. A New Extragradient-Type Method for Mixed Variational Inequalities [J]. Operations Research Letters，2015，43(6)：567－572.

[6] 徐 洁，张俊容，刘 佳. 求解一类广义均衡问题的交替方向法[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(5)：114－118.

[7] JEONG J U. Generalized Viscosity Approximation Methods for Mixed Equilibrium Problems and Fixed Point Problems [J]. Appl Math Comput，2016，283：168－180.

[8] 闻道君. 关于伪单调平衡问题和不动点问题的粘滞-次梯度方法[J]. 数学进展，2017，46(2)：303－312.

[9] KAZMI K R，REHAN A，MOHD F. Krasnoselski-Mann Type Iterative Method for Hierarchical Fixed Point Problem and Split Mixed Equilibrium Problem [J]. Numer Algor，2017(4)：1－20.

[10] CROMBEZ G. A Hierarchical Presentation of Operators with Fixed Points on Hilbert Spaces [J]. Numer Funct Anal Optim，2006，27(3－4)：259－277.

The Equivalence of Split Mixed Equilibrium Problems and Fixed Point Problems

WEN Dao-jun[1]， ZHANG Rong[2]， SONG Shu-zhi[1]

1. School of Mathematics and Statistics，Chongqing Technology and Business University，Chongqing 400067，China；
2. School of Science，Chongqing University of Posts and Telecommunications，Chongqing 400065，China

Abstract：In this paper，a class of modified mixed equilibrium problems is introduced in Hilbert space. The equivalence relation between the mixed equilibrium problems and a fixed point problem is studied under some suitable conditions. Moreover，a sufficient and necessary condition for the solution of modified split mixed equilibrium problems is established.

Key words：split mixed equilibrium problem；fixed point；equivalence relation；Hilbert space

责任编辑 廖 坤
崔玉洁