DOI：10.13718/j.cnki.xdzk.2018.08.016

锥度量空间 c -距离下非连续映射的新不动点定理[①]

韩　艳，　张建元，　代婷婷

昭通学院 数学与统计学院，云南 昭通 657000

摘要： 主要讨论了锥度量空间 c -距离下非连续映射的不动点定理.其结果在条件上同时去掉映射的连续性和锥的正规性，结论上同时得到了不动点的存在性和唯一性，并给出了相应的例子.

关　键　词： 锥度量空间；c -距离；不动点

中图分类号：O177.91　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1673－9868(2018)08－0114－08

不动点理论始终是非线性分析领域的研究热点之一，特别是各类压缩映射、扩张映射、非扩张映射等的不动点问题(文献[1]).2007 年，文献[2]在度量空间的基础上，用 Banach 空间取代实数空间，定义了锥度量空间，并获得了满足各类不同条件的有关压缩映射的不动点定理.近年来，一些作者对锥度量空间中的不动点定理进行了深刻的研究，得到了许多重要的结果(文献[2－5]).2011 年，文献[6]又在锥度量空间中引入了 c -距离，并获得了相关的不动点定理.这是对锥度量的推广.同时，文献[7－12]还对此举例说明了 c -距离下的不动点定理具有更广泛的应用.但是大部分结论都离不开两个条件，一是映射的连续性，二是锥的正规性，二者必须有一个存在于定理的条件中(见文献[7－9,11－14]).而在本文中，我们在锥度量空间中 c -距离下，在同时去掉这两个条件的情况下，不仅得到了不动点的存在性，还得到了其唯一性，同时给出了例子说明本文结论是有意义的.

设 E 是实 Banach 空间，θ 是 E 中的零元，P 是 E 中非空闭凸集，若：

(ⅰ) $x \in P$ 且 $\lambda \geqslant 0$，则 $\lambda x \in P$；

(ⅱ) $x \in P$ 且 $-x \in P$，则 $x = \theta$.

则称 P 是 E 中的锥.设 P 是 E 中的锥，$\leqslant$ 是由 P 定义的半序，即 $\forall x, y \in E$，$y - x \in P$，则 $x \leqslant y$.如果存在常数 $K > 0$，使得 $\theta \leqslant x \leqslant y$ $(\forall x, y \in E)$ 蕴含 $\| x \| \leqslant K \| y \|$，其中 K 为正规常数，锥 P 称为正规锥.用 $x \ll y$ 表示 $y - x \in \operatorname{int} P$.

---

① 收稿日期：2017－07－07

基金项目：国家自然科学基金项目(11061028)；云南省应用基础研究计划项目(2016FD082)；云南省教育厅科学研究基金项目(2017ZDX041).

作者简介：韩　艳(1986－)，女，讲师，主要从事非线性泛函分析的研究.

通信作者：张建元，教授.

定义 1[2] 设 X 是非空集合. 若映射 $d: X \times X \longrightarrow E$ 满足:

(i) $\theta \leqslant d(x, y)(\forall x, y \in X)$, $d(x, y) = \theta$ 当且仅当 $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)(\forall x, y \in X)$;

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)(\forall x, y, z \in X)$.

则称 d 是 X 的一个锥度量. (X, d) 称为锥度量空间.

定义 2[2] 设 (X, d) 为锥度量空间, $x \in X$ 且 $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$ 是 X 中的一个序列. 则:

(i) 若对 $\forall c \in \operatorname{int} P$, 存在正整数 N, 使得对 $\forall n, m > N$, $d(x_n, x_m) \ll c$, 则称 $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$ 为 Cauchy 列;

(ii) 若对 $\forall c \in \operatorname{int} P$, 存在正整数 N, 使得对 $\forall n > N$, $d(x_n, x) \ll c$, 则称 $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$ 为收敛列;

(iii) 若 X 中的每个 Cauchy 列都收敛, 则称 (X, d) 为完备的锥度量空间.

定义 3[6] 设 (X, d) 为锥度量空间, 映射 $q: X \times X \longrightarrow E$ 满足下列条件:

(i) $\forall x, y \in X$, $\theta \leqslant q(x, y)$;

(ii) $\forall x, y, z \in X$, $q(x, z) \leqslant q(x, y) + q(y, z)$;

(iii) $\forall x \in X$ 且 $n \geqslant 1$, 若存在 $u = u_x \in P$ 使得 $q(x, y_n) \leqslant u$, 且序列 $\{y_n\}$ 收敛到一点 $y \in X$, 则有 $q(x, y) \leqslant u$;

(iv) 对 $\forall c \in E$ 且 $c \gg \theta$, 存在 $e \in E$ 且 $e \gg \theta$, 使得当 $q(z, x) \ll e$, $q(z, y) \ll e$ 时, 有 $d(x, y) \ll c$,

则称 q 为 X 上的 c-距离.

引理 1[15] 设 (X, d) 是锥度量空间, q 为 X 上的 c-距离, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 是 X 中的序列. 设 $x, y, z \in X$, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 是锥 P 中收敛到 θ 的两个序列, 则下列结论成立:

(i) 若 $q(x_n, y) \leqslant u_n$ 且 $q(x_n, z) \leqslant v_n$, 则 $y = z$, 特别地, 若 $q(x, y) = \theta$ 且 $q(x, z) = \theta$, 则 $y = z$;

(ii) 若 $q(x_n, y_n) \leqslant u_n$ 且 $q(x_n, z) \leqslant v_n$, 则 $\{y_n\}$ 收敛到 $z \in X$;

(iii) 若对 $\forall m > n$, 有 $q(x_n, x_m) \leqslant u_n$, 则 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列.

注 1[6] 在 c-距离下, $q(x, y) = q(y, x)$ 不一定成立, 且对 $\forall x, y \in X$, $q(x, y) = \theta$ 也不等价于 $x = y$.

定理 1 设 (X, d) 为完备的锥度量空间, q 为 X 上的 c-距离, 映射 $T: X \longrightarrow X$ 以及映射 $k, l: X \longrightarrow [0, 1)$ 满足条件:

(i) $\forall x \in X$, $k(Tx) \leqslant k(x)$, $l(Tx) \leqslant l(x)$ 且 $k(x) + l(x) < 1$;

(ii) 对 $\forall x, y \in X$, 有

$$q(Tx, Ty) \leqslant k(x) q(x, y) + l(x) q(x, Tx) \tag{1}$$

则 T 有唯一的不动点 $u \in X$, 迭代序列 $\{T^n x\}$ 收敛到不动点 u, 且有 $q(u, u) = \theta$.

证 $\forall x_0 \in X$, 如果 $Tx_0 = x_0$, 则 x_0 为 T 的不动点.

假设 $Tx_0 \neq x_0$, 易得序列 $\{x_n\} \subseteq X$:

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0 \qquad n \geqslant 1$$

令(1)式中的 $x = x_{n-1}$, $y = x_n$, 得

$$\begin{aligned} q(x_n, x_{n+1}) = q(Tx_{n-1}, Tx_n) \leqslant k(x_{n-1}) q(x_{n-1}, x_n) + l(x_{n-1}) q(x_{n-1}, Tx_{n-1}) = \\ k(Tx_{n-2}) q(x_{n-1}, x_n) + l(Tx_{n-2}) q(x_{n-1}, x_n) \leqslant \\ (k(x_{n-2}) + l(x_{n-2})) q(x_{n-1}, x_n) \leqslant \cdots \leqslant (k(x_0) + l(x_0)) q(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

设 $h(x_n)=k(x_n)+l(x_n)\in[0,1)$，则有

$$q(x_n,x_{n+1})\leqslant h(x_0)q(x_{n-1},x_n)\leqslant\cdots\leqslant h^n(x_0)q(x_0,x_1)$$

对 $\forall m>n\geqslant 1$，有

$$q(x_n,x_m)\leqslant q(x_n,x_{n+1})+q(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+q(x_{m-1},x_m)\leqslant \frac{h^n(x_0)}{1-h(x_0)}q(x_0,x_1)$$

因为 $h(x_0)\in[0,1)$，则

$$\frac{h^n(x_0)}{1-h(x_0)}q(x_1,x_0)\to\theta \qquad n\to\infty$$

根据引理 1(ⅲ) 得，$\{x_n\}$ 是 Cauchy 列. 由于 X 完备，存在 $u\in X$，使得 $x_n\to u(n\to\infty)$. 又由定义 3(ⅲ)，令 $m\to\infty$，得

$$q(x_n,u)\leqslant\frac{h^n(x_0)}{1-h(x_0)}q(x_0,x_1) \tag{2}$$

下证 $Tu=u$. 由(1) 式与(2) 式得

$$\begin{aligned}q(x_n,Tu)=q(Tx_{n-1},Tu)&\leqslant k(x_{n-1})q(x_{n-1},u)+l(x_{n-1})q(x_{n-1},Tx_{n-1})=\\&k(Tx_{n-2})q(x_{n-1},u)+l(Tx_{n-2})q(x_{n-1},x_n)\leqslant\\&k(x_{n-2})q(x_{n-1},u)+l(x_{n-2})q(x_{n-1},x_n)\leqslant\cdots\leqslant\\&k(x_0)q(x_{n-1},u)+l(x_0)q(x_{n-1},x_n)\leqslant\\&k(x_0)\frac{h^{n-1}(x_0)}{1-h(x_0)}q(x_0,x_1)+l(x_0)h^{n-1}(x_0)q(x_0,x_1)=\\&\left(\frac{k(x_0)}{1-h(x_0)}+l(x_0)\right)h^{n-1}(x_0)q(x_0,x_1)\end{aligned} \tag{3}$$

令：

$$\alpha_n=\frac{h^n(x_0)}{1-h(x_0)}q(x_0,x_1)$$

$$\beta_n=\left(\frac{k(x_0)}{1-h(x_0)}+l(x_0)\right)h^{n-1}(x_0)q(x_0,x_1)$$

而 $k(x_0),l(x_0),h(x_0)\in[0,1)$，故 $\alpha_n,\beta_n\to\theta(n\to\infty)$. 根据(2),(3) 式及引理 1(ⅰ) 知 $Tu=u$，又由(1) 式得

$$\begin{aligned}q(u,u)=q(Tu,Tu)&\leqslant k(u)q(u,u)+l(u)q(u,Tu)=\\&(k(u)+l(u))q(u,u)=h(u)q(u,u)\end{aligned}$$

因为 $h(u)\in[0,1)$. 故

$$q(u,u)=\theta$$

最后证明不动点 u 是唯一的. 假设有 $Tv=v$，则有

$$q(u,v)=q(Tu,Tv)\leqslant k(u)q(u,v)+l(u)q(u,Tu)=k(u)q(u,v)$$

根据 $k(u)\in[0,1)$，得

$$q(u,v)=\theta$$

由引理 1(ⅰ)，有 $u=v$.

定理2 设(X, d)为完备的锥度量空间，q为X上的c-距离，映射$T: X \longrightarrow X$以及映射$k, l: X \longrightarrow [0, 1)$满足条件：

(i) $\forall x \in X$，$k(Tx) \leqslant k(x)$，$l(Tx) \leqslant l(x)$且$k(x) + 2l(x) < 1$；

(ii) $\forall x, y \in X$，

$$q(Tx, Ty) \leqslant k(x)q(x, y) + l(x)q(x, Ty) \tag{4}$$

则T有唯一的不动点$u \in X$，迭代序列$\{T^n x\}$收敛到不动点u，且有$q(u, u) = \theta$.

证 $\forall x_0 \in X$，若$Tx_0 = x_0$，则x_0即为T的一个不动点.

假设$Tx_0 \neq x_0$，可得序列$\{x_n\} \subseteq X$如下：

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0 \qquad n \geqslant 1$$

在(4)式中令：

$$x = x_{n-1} \qquad y = x_n$$

得

$$\begin{aligned} q(x_n, x_{n+1}) = q(Tx_{n-1}, Tx_n) \leqslant k(x_{n-1})q(x_{n-1}, x_n) + l(x_{n-1})q(x_{n-1}, Tx_n) = \\ k(Tx_{n-2})q(x_{n-1}, x_n) + l(Tx_{n-2})q(x_{n-1}, x_{n+1}) \leqslant \\ k(x_{n-2})q(x_{n-1}, x_n) + l(x_{n-2})[q(x_{n-1}, x_n) + q(x_n, x_{n+1})] \leqslant \cdots \leqslant \\ k(x_0)q(x_{n-1}, x_n) + l(x_0)[q(x_{n-1}, x_n) + q(x_n, x_{n+1})] \end{aligned}$$

即有

$$q(x_n, x_{n+1}) \leqslant \frac{k(x_0) + l(x_0)}{1 - l(x_0)} q(x_{n-1}, x_n) = h(x_0)q(x_{n-1}, x_n) \leqslant \cdots \leqslant h^n(x_0)q(x_0, x_1)$$

其中

$$h(x_n) = \frac{k(x_n) + l(x_n)}{1 - l(x_n)}$$

由$k(x) + 2l(x) < 1(\forall x \in X)$知$h(x_n) \in [0, 1)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 从而对$\forall m > n \geqslant 1$，有

$$q(x_n, x_m) \leqslant q(x_n, x_{n+1}) + q(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + q(x_{m-1}, x_m) \leqslant \frac{h^n(x_0)}{1 - h(x_0)} q(x_0, x_1)$$

由于$h(x_0) \in [0, 1)$，则

$$\frac{h^n(x_0)}{1 - h(x_0)} q(x_1, x_0) \to \theta \qquad n \to \infty$$

根据引理1(iii)得，$\{x_n\}$是Cauchy列. 由X完备，存在$u \in X$，使得$x_n \to u(n \to \infty)$. 又由定义3(iii)，令$m \to \infty$，得

$$q(x_n, u) \leqslant \frac{h^n(x_0)}{1 - h(x_0)} q(x_0, x_1) \tag{5}$$

下证$Tu = u$. 由(4)式与(5)式得

$$\begin{aligned} q(x_n, Tu) = q(Tx_{n-1}, Tu) \leqslant k(x_{n-1})q(x_{n-1}, u) + l(x_{n-1})q(x_{n-1}, Tu) = \\ k(Tx_{n-2})q(x_{n-1}, u) + l(Tx_{n-2})q(x_{n-1}, Tu) \leqslant \\ k(x_{n-2})q(x_{n-1}, u) + l(x_{n-2})[q(x_{n-1}, x_n) + q(x_n, Tu)] \leqslant \cdots \leqslant \\ k(x_0)q(x_{n-1}, u) + l(x_0)[q(x_{n-1}, x_n) + q(x_n, Tu)] \end{aligned}$$

即

$$
\begin{aligned}
q(x_n, Tu) \leqslant & \frac{k(x_0)}{1-l(x_0)} q(x_{n-1}, u) + \frac{l(x_0)}{1-l(x_0)} q(x_{n-1}, x_n) \leqslant \\
& \frac{k(x_0)}{1-l(x_0)} \cdot \frac{h^{n-1}(x_0)}{1-h(x_0)} q(x_0, x_1) + \frac{l(x_0)}{1-l(x_0)} h^{n-1}(x_0) q(x_0, x_1) = \\
& \left(\frac{k(x_0)}{(1-l(x_0))(1-h(x_0))} + \frac{l(x_0)}{1-l(x_0)} \right) h^{n-1}(x_0) q(x_0, x_1)
\end{aligned} \tag{6}
$$

令：

$$
\alpha_n = \frac{h^n(x_0)}{1-h(x_0)} q(x_0, x_1)
$$

$$
\beta_n = \left(\frac{k(x_0)}{(1-l(x_0))(1-h(x_0))} + \frac{l(x_0)}{1-l(x_0)} \right) h^{n-1}(x_0) q(x_0, x_1)
$$

由于 $k(x_0), l(x_0), h(x_0) \in [0, 1)$，故 $\alpha_n, \beta_n \to \theta (n \to \infty)$. 根据(5),(6)式及引理 1(i)知 $Tu = u$，又由(4)式得

$$
q(u, u) = q(Tu, Tu) \leqslant k(u) q(u, u) + l(u) q(u, Tu) = (k(u) + l(u)) q(u, u)
$$

因为 $k(u) + 2l(u) < 1$，则

$$
k(u) + l(u) < 1 - l(u) \leqslant 1
$$

知 $q(u, u) = \theta$. 类似于定理 1 的证明可得不动点是唯一的.

推论 1[13]　设(X, d)为完备的锥度量空间，q 为 X 上的 c-距离，映射 $T: X \longrightarrow X$ 以及映射 $k: X \longrightarrow [0, 1)$ 满足条件：

(i) $\forall x \in X, k(Tx) \leqslant k(x)$;

(ii) $\forall x, y \in X, q(Tx, Ty) \leqslant k(x) q(x, y)$.

则 T 有唯一的不动点 $u \in X$，迭代序列$\{T^n x\}$收敛到不动点 u，且有 $q(u, u) = \theta$.

推论 2[10]　设(X, d)为完备的锥度量空间，q 为 X 上的 c-距离，映射 $T: X \longrightarrow X$ 满足：$\forall x, y \in X$,

$$
q(Tx, Ty) \leqslant k q(x, y)
$$

其中 $k \in [0, 1)$，则 T 有唯一的不动点 $u \in X$，迭代序列$\{T^n x\}$收敛到不动点 u，且有 $q(u, u) = \theta$.

注 2　由推论 1、推论 2 可以看出，我们的结论是对文献[10,13]中结论的推广.

注 3　对比文献[6－7,11－12,14]中的结果，我们发现文献中的结果主要是在锥度量空间中 c-距离下讨论映射的不动点的存在性，并且所得结论或者要求映射的连续性(文献[6]中的定理 3.1，3.3，文献[7]中的定理 2.4、推论 2.5－2.7，文献[15]中的定理 2－5，文献[14]中的定理 3.1，3.3，文献[8]中的定理 3.1，3.2，3.5，3.6，文献[12]中的定理 2.1)，或者要求锥的正规性(文献[6]中的定理 3.2，3.4，文献[14]中的定理 3.2，3.5，文献[8]中的定理 3.3，3.4，文献[9]中的定理 3.1，3.3，文献[11]中的定理 1、推论 1－3，文献[12]中的定理 2.2)，必取其一. 在本文中，我们的结果同时去掉了映射的连续性和锥的正规性，最终得到不动点的存在性和唯一性. 又由于 c-距离是对锥度量的推广[6]，因此比单纯的锥度量空间[2-5]和度量空间[1,16]中的结论具有更广泛的意义. 最后，若令 $E = \mathbb{R}$，可得到度量空间中相应的不动点定理.

推论 3　设(X, d)为完备的度量空间，q 为 X 上的 c-距离($q: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$)，映射 $T: X \longrightarrow X$ 以及映射 $k, l: X \longrightarrow [0, 1)$ 满足条件：

(i) $\forall x \in X, k(Tx) \leqslant k(x), l(Tx) \leqslant l(x)$ 且 $k(x) + l(x) < 1$;

(ii) $\forall x, y \in X$,

$$q(Tx, Ty) \leqslant k(x)q(x, y) + l(x)q(x, Tx)$$

则 T 有唯一的不动点 $u \in X$,迭代序列 $\{T^n x\}$ 收敛到不动点 u,且有 $q(u, u)=\theta$.

注 4 文献[6]中的例 2.7 证明了:当 (X, d) 为锥度量空间,P 为正规锥时,令 $q(x, y)=d(x, y)$,则 q 是 c-距离. 而通常的距离下,Banach 空间 $E=\mathbb{R}$,即 (X, d) 是度量空间,文献[2]指出度量空间是锥度量空间的特例,从而通常的距离也是 c-距离的特例. 推论 3 为本文定理 1 在最常见的情况下对应的结果,类似可得定理 2 对应的结果,这是对文献[1]中已有结果的改进.

例 1 令:

$$E = C_{\mathbb{R}}^1[0, 1]$$

$$\| x \| = \| x \|_\infty + \| x' \|_\infty$$

$$P = \{x \in E: x(t) \geqslant 0, t \in [0, 1]\}$$

P 是一个非正规的锥,且 $X=[0, 1]$,$d: X \times X \longrightarrow E$,其中

$$d(x, y) = | x - y | \varphi \qquad \forall x, y \in X$$

$\varphi: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$,使得 $\varphi(t)=2^t$. 则 (X, d) 是一个完备的锥度量空间. 定义映射 $q: X \times X \longrightarrow E$,使得 $\forall x, y \in X$,$q(x, y)=\varphi y = 2^t y$,则 q 为 X 上的 c-距离. 定义映射 $T: X \longrightarrow X$ 如下:

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{x}{4} & x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{1}{8}(x^2 + x) & x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

显然,映射 T 为非连续映射. 取:

$$k(x) = \frac{x+2}{8} \qquad l(x) = \frac{x+2}{10} \qquad \forall x \in X$$

则 $k, l: X \longrightarrow [0, 1)$. 且:

$$k(Tx) = \frac{1}{8}\left(\frac{x}{4} + 2\right) \leqslant \frac{x+2}{8} = k(x) \qquad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$$

$$k(Tx) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}(x^2 + x) + 2\right) \leqslant \frac{x+2}{8} = k(x) \qquad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

同理可证

$$l(Tx) \leqslant l(x) \qquad \forall x \in X$$

同时有

$$k(x) + 2l(x) = \frac{x+2}{8} + 2 \cdot \frac{x+2}{10} = \frac{13(x+2)}{40} < 1 \qquad \forall x \in X$$

(a) $\forall x \in X$,$\forall y \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right)$,

$$q(Tx, Ty) = 2^t \cdot Ty = 2^t \cdot \frac{1}{4} y \leqslant$$

$$2^t \cdot \frac{1}{4} y \cdot \frac{3}{5}(x+2) =$$

$$\frac{x+2}{8} \cdot 2^t \cdot y + \frac{x+2}{10} \cdot 2^t \cdot \frac{1}{4} y =$$

$$k(x)q(x,y)+l(x)q(x,Ty)$$

(b) $\forall x\in X$，$\forall y\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，

$$\begin{aligned}q(Tx,Ty)=2^t\cdot Ty=2^t\cdot\frac{1}{8}(y^2+y)=&\\ 2^t\cdot\frac{1}{8}y(y+1)\leqslant&\\ 2^t\cdot\frac{1}{4}y\leqslant 2^t\cdot\frac{23}{80}y\leqslant 2^t\cdot\frac{23}{160}(x+2)y=&\\ 2^t\cdot\frac{x+2}{8}\cdot y+2^t\cdot\frac{x+2}{10}\cdot\frac{3}{16}y\leqslant&\\ 2^t\cdot\frac{x+2}{8}\cdot y+2^t\cdot\frac{x+2}{10}\cdot\frac{1}{8}y(y+1)=&\\ k(x)q(x,y)+l(x)q(x,Ty)&\end{aligned}$$

因此定理 2 的条件均满足，映射 T 有唯一的不动点 $x=0$，即 $T0=0$，同时 $q(0,0)=0$. 但是例 1 中的锥不是正规的，映射也不是连续的，在这两个条件均不满足的情况下，我们仍然得出了不动点的存在唯一性，这是无法应用文献中已有的结论得到的. 所以我们的结论改进并推广了原有文献中的众多结论.

参考文献：

[1] 张石生. 不动点理论及应用 [M]. 重庆：重庆出版社，1984.

[2] HUANG L G，ZHANG X. Cone Metric Space and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings [J]. J Math Anal Appl，2007，332(2)：1468－1476.

[3] 张　宪. 锥度量空间中 Lipschitz 型映射的公共不动点定理 [J]. 数学学报，2010，53(6)：1139－1148.

[4] 崔艳兰，宋娜娜. 锥度量空间中 3 个自映射的公共不动点定理 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2013，35(2)：77－80.

[5] NASHIE H K，ROHEN Y，THOKCHOM C. Common Coupled Fixed Point Theorems of Two Mappings Satisfying Generalized Contractive Condition in Cone Metric Space [J]. International Journal of Pure and Applied Mathematics，2016，106(3)：791－799.

[6] CHO Y J，REZA S，WANG S H. Common Fixed Point Theorems on Generalized Distance in Ordered Cone Metric Spaces [J]. Computers and Mathematics with Applications，2011，61(4)：1254－1260.

[7] YANG Y O，CHOI H J. Fixed Point Theorems in Ordered Cone Metric Spaces [J]. Journal of Nonlinear Science and Applications，2016(9)：4571－4579.

[8] HRAHIM H，RAD G S. Common Fixed Point Theorems and c-Distance in Ordered Cone Metric Spaces [J]. Ukrainian Mathematical Journal，2014，65(12)：1845－1861.

[9] RAHIM H，RAD G S，KUMAM P. Generalized Distance and New Fixed Point Results [J]. Asian European Journal of Mathematics，2015，2015(26)：1－9.

[10] FADAIL Z M，AHMAD A G B，GOLUBOVIC Z. Fixed Point Theorems of Single-Valued Mapping for c-Distance in Cone Metric Spaces [J]. Abstract and Applied Analysis，2012，2012(10)：815－826.

[11] HUANG H P，RADENOVIC S，DOSENOVIC T. Some Common Fixed Point Theorems on c-Distance in Cone Metric Spaces Over Banach Algebras [J]. Comput Math，2015，14(2)：180－193.

[12] 韩　艳，张建元. 锥度量空间中 c -距离下的不动点定理 [J]. 纯粹数学与应用数学，2015，31(6)：581－587.

[13] FADAIL Z M, AHMAD A G B, PAUNOVIC L. New Fixed Point Results of Single Valued Mapping for c-Distance in Cone Metric Spaces [J]. Fixed Point Theory and Applications, 2012, 2012(10): 1-12.

[14] SINTUNAVARAT W, CHO Y J, KUMAM P. Common Fixed Point Theorems for c-Distance in Ordered Cone Metric Spaces [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 62(4): 1969-1978.

[15] DOREVI M, DORIC D, KADELBURG Z, et al. Fixed Point Results Under c-Distance in Tvs-Cone Metric Spaces [J]. Fixed Point Theory and Applications, 2011(1): 1-9.

[16] 王 磊，吴健荣. 度量空间中具有交换点的自映射的公共不动点 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(2)：18-20.

New Fixed Point Results Under c-Distance for Non-continuous Mapping in Cone Metric Spaces

HAN Yan, ZHANG Jian-yuan, DAI Ting-ting

School of Mathematics and Statistics, Zhaotong University, Zhaotong Yunnan 657000, China

Abstract: In this paper, some new fixed point results under c-distance in cone metric spaces are discussed. In result, the conditions of continuity for mapping and normality for cone are not required. In conclusion, the existence and the uniqueness of the fixed point are obtained at the same time. Some supporting examples are given.

Key words: cone metric space; c-distance; fixed point

责任编辑 廖 坤
崔玉洁