DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.08.017

凸函数 Steiner 对称化的一个等价特征[①]

蔺友江

重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067

摘要： 函数 Steiner 对称化的经典定义是根据函数水平集的 Steiner 对称化以及函数的分层表示定义的. 给出了强制凸函数 Steiner 对称化的一个解析表达式，它是经典 Steiner 对称化的一个等价特征. 这个新的定义不依赖于函数水平集的 Steiner 对称化，而是将定义转化为一维的类似抛物线函数的 Steiner 对称化，这更有助于函数不等式的证明. 函数的 Blaschke-Santalo 不等式是一个重要的函数形式的仿射等周不等式，它的几何背景是凸体的 Blaschke-Santalo 不等式. 首先利用 Steiner 对称化的新的定义，证明了对于任意的强制凸函数经过一次 Steiner 对称化后积分值变小了；然后利用 Prekopa-Leindler 不等式证明了径向函数的 Blaschke-Santalo 不等式. 由于任何凸函数经过不断的 Steiner 对称化总可以在 L_p 范数意义下收敛于它的对称递减重排，而对称递减重排即为径向函数，因此证明了函数形式的 Blaschke-Santalo 不等式.

关　键　词： 函数的重排；Steiner 对称化；强制凸函数；Blaschke-Santalo 不等式

中图分类号： O186.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673-9868(2018)08-0122-06

Steiner 对称化是为了证明等周不等式而引入的一种概念[1]. 160 年来，Steiner 对称化已成为解决与等周相关的几何不等式的基本工具[2-5]，并且在最近的很多工作中扮演着重要的角色[6-13]. 19 世纪 70 年代，数学家开始寻找函数不等式的几何证明，由此凸体的 Steiner 对称化推广到 Sobolev 空间中函数的 Steiner 对称化. 本文的目的是给出凸函数 Steiner 对称化的一个等价特征. 和经典函数 Steiner 对称化的定义不同，这个新的特征并不依赖于函数水平集的 Steiner 对称化，而是给出了函数 Steiner 对称化的明确的分析表达式，因此更有利于证明函数形式的不等式.

令 Ω 是 n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的开凸子集，$\Omega\mid u$ 表示 Ω 在 $u^\perp$ 上的正交投影. 对于 $x'\in u^\perp$，如果令 $\Omega_{x'}$ 表示集合 $\{t\in\mathbb{R}: x'+tu\in\Omega\}$，则 Ω 关于方向 $u\in S^{n-1}$ 的 Steiner 对称化定义为

$$S_u\Omega=\left\{x'+tu: x'\in\Omega\mid_u,\ t\leqslant\frac{1}{2}\mid\Omega_{x'}\mid\right\}\tag{1}$$

其中 $\mid\Omega_{x'}\mid$ 表示 Lebesgue 测度. 如果对于任意的 $x,y\in\Omega$ 和 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\tag{2}$$

则函数 $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ 被称为凸函数. 如果 $\lim\limits_{x\in\Omega,\ x\to\partial\Omega}f(x)=+\infty$，则函数被称为强制的.

f 的上图定义为 $\mathrm{epi}f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}: x\in\Omega,\ y\geqslant f(x)\}$. 经典的函数 Steiner 对称化是利用水平集的 Steiner 对称化定义的，定义如下：

定义 1　对于强制的凸函数 $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ 和超平面 $H=e_n^\perp$，对于任意的 $x=x'+te_n$，$x'\in H$，$t\in\mathbb{R}$，f 的 Steiner 对称化 Sf 定义为

$$Sf(x)=\inf\{h\in\mathbb{R}: \mu(x',h)\geqslant 2\mid t\mid\}\tag{3}$$

---

① 收稿日期：2018-03-15

基金项目：国家自然科学基金项目(11501064)；重庆市基础科学与前沿技术研究项目(cstc2017jcyjAX0416)；重庆市基础与前沿研究计划项目(cstc2015jcyjA00009)；重庆市教委科学技术研究项目(KJ1500628，KJ1706068).

作者简介：蔺友江(1975-)，男，副教授，主要从事凸几何分析的研究.

其中 $\mu(x', h)=|\{x_n \in \mathbb{R}: f(x', x_n) \leqslant h\}|$ 是 $f(x', \cdot)$ 的分布函数.

本文给出了强制凸函数的一个等价特征:

定理1 如果 $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ 是强制的凸函数并且 $H=e_n^{\perp}$,那么对于任意的 $x=x'+x_n e_n$,$x' \in H$,$x_n \in \mathbb{R}$,有

$$Sf(x)=\sup_{\lambda \in [0,1]} \inf_{x_1+x_2=x_n} [\lambda f(x', 2x_1)+(1-\lambda) f(x', -2x_2)] \tag{4}$$

(4)式不依赖于函数 f 的水平集的测度,而是给出了函数Steiner对称化的一个解析表达式,有利于证明各种函数不等式.

对于凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$,它关于点 $z \in \mathbb{R}^n$ 的极体定义为

$$K^z=\{x \in \mathbb{R}^n: \sup\langle x-z, y-z\rangle, y \in K\} \tag{5}$$

对应凸体的定义,定义对数凹函数 $\phi=\mathrm{e}^{-f}$,$\phi: \Omega \longrightarrow (0, \infty)$ 关于点 $z \in \mathbb{R}^n$ 的极函数定义为

$$\phi^z(x)=\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{e}^{-\langle x-z, y-z\rangle}}{\phi(y)} \tag{6}$$

为了更好地理解(6)式,先看经典的Legendre变化:对于函数 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,它关于点 $z \in \mathbb{R}^n$ 的Legendre变换定义为

$$L^z f(x)=\sup\{\langle x-z, y-z\rangle-f(y): y \in \mathbb{R}^n\} \tag{7}$$

根据(6)式和(7)式,如果 $\phi(x)=\mathrm{e}^{-f(x)}$,那么

$$\phi^z(x)=\mathrm{e}^{-L^z f(x)} \tag{8}$$

凸体的Blaschke-Santalo不等式最早由文献[14]证明,后面被文献[15-16]推广到更一般的函数情形.最近,文献[17]给出了一个新的直接证明.根据文献[14]中关于中心对称凸体的Santalo不等式的证明,我们证明了函数形式的关于偶的凸函数的Blaschke-Santalo不等式.

定理2 如果 $f: \Omega \longrightarrow (0, \infty)$ 是偶函数并且满足 $0<\int \mathrm{e}^{-f}<\infty$,那么

$$\int \mathrm{e}^{-f} \int \mathrm{e}^{-Lf} \leqslant (2\pi)^n \tag{9}$$

我们首先研究一维的情况.如果 $f: \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ 是强制的一维凸函数,那么根据(4)式,有

$$Sf(x)=\sup_{\lambda \in [0,1]} \inf_{x_1+x_2=x} [\lambda f(2x_1)+(1-\lambda) f(-2x_2)] \tag{10}$$

引理1 如果 $f: \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ 是强制的凸函数,那么 Sf 是偶函数,并且对于任意的 $h \in \mathbb{R}$,有

$$|\{x \in \mathbb{R}: f(x) \leqslant h\}|=|\{x \in \mathbb{R}: Sf(x) \leqslant h\}| \tag{11}$$

证 首先,我们证明 Sf 是偶的.对于任意的 $x \in \mathbb{R}$,根据(10)式可得

$$\begin{aligned} Sf(-x) &= \sup_{\lambda \in [0,1]} \inf_{x_2 \in \mathbb{R}} [\lambda f(-2x_2-2x)+(1-\lambda) f(-2x_2)]= \\ & \sup_{\lambda \in [0,1]} \inf_{x_2 \in \mathbb{R}} [\lambda f(2x_2-2x)+(1-\lambda) f(2x_2)]= \\ & \sup_{\lambda' \in [0,1]} \inf_{x_2 \in \mathbb{R}} [\lambda' f(2x_2)+(1-\lambda') f(2x_2-2x)]=Sf(x) \end{aligned} \tag{12}$$

接下来,我们将证明对于任意的 $x>0$,$Sf(0)=\inf f$,并且存在 $x' \in \mathbb{R}$,使得

$$Sf(x)=f(x')=f(x'-2x) \tag{13}$$

令 $x=0$,根据(10)式可得

$$\begin{aligned} Sf(0) &= \sup_{\lambda \in [0,1]} \inf_{x_1+x_2=0} [\lambda f(2x_1)+(1-\lambda) f(-2x_2)]= \\ & \inf_{x_1 \in \mathbb{R}} f(2x_1)=\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) \end{aligned} \tag{14}$$

一方面,对于 $x \in \mathbb{R}$,由于 f 是强制的凸函数,故存在 $x' \in \mathbb{R}$,使得

$$f(x')=f(x'-2x)$$

令 $G_x(\lambda)$ 是关于 $\lambda \in [0,1]$ 的函数

$$G_x(\lambda)=\inf_{x_1 \in \mathbb{R}} [\lambda f(2x_1)+(1-\lambda) f(2x_1-2x)] \tag{15}$$

对于任意的 $\lambda\in[0,1]$，选择 $x_1=\dfrac{x'}{2}$，可得

$$G_x(\lambda)\leqslant\lambda f(x')+(1-\lambda)f(x'-2x)=f(x') \tag{16}$$

因此

$$Sf(x)=\sup_{\lambda\in[0,1]}G_x(\lambda)\leqslant f(x')$$

另一方面，我们将证明存在 $\lambda_0\in[0,1]$，使得 $G_x(\lambda_0)=f(x')$. 由于 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的凸函数，根据文献[18] 的定理 1.5.2，f 的右导数 f'_r 和左导数 f'_l 存在并且满足 $f'_l\leqslant f'_r$. 由于 $f(x')=f(x'-2x)$ 且 $x>0$，可得 $f'_r(x')\geqslant 0$ 并且 $f'_r(x'-2x)\leqslant 0$，因此

$$f'_r(x')-f'_r(x'-2x)\geqslant 0$$

如果

$$f'_r(x')-f'_r(x'-2x)>0$$

并且令

$$\lambda_0=\frac{-f'_r(x'-2x)}{f'_r(x')-f'_r(x'-2x)} \tag{17}$$

则

$$\lambda_0 f'_r(x')+(1-\lambda_0)f'_r(x'-2x)=0 \tag{18}$$

如果

$$f'_r(x')-f'_r(x'-2x)=0$$

那么

$$f'_r(x')=f'_r(x'-2x)=0$$

因此这时对于任意的 $\lambda_0\in[0,1]$，(18) 式总是成立的. 根据(18) 式，我们定义

$$\Phi_{\lambda_0}(x_1)=\lambda_0 f(2x_1)+(1-\lambda_0)f(2x_1-2x) \tag{19}$$

根据(18) 式，Φ_{λ_0} 在 $x_1=x'/2$ 处的右导数 $\Phi_{\lambda_0,r}$ 和左导数 $\Phi_{\lambda_0,l}$ 满足：

$$\Phi'_{\lambda_0,r}\left(\frac{x'}{2}\right)=2\lambda_0 f'_r(x')+2(1-\lambda_0)f'_r(x'-2x)=0 \tag{20}$$

$$\Phi'_{\lambda_0,l}\left(\frac{x'}{2}\right)\leqslant\Phi'_{\lambda_0,r}\left(\frac{x'}{2}\right)=0 \tag{21}$$

根据(16),(20),(21),(19) 式和 $f(x')=f(x'-2x)$，我们可得

$$G_x(\lambda_0)=\inf_{x_1\in\mathbb{R}}\Phi_{\lambda_0}(x_1)=\Phi_{\lambda_0}\left(\frac{x'}{2}\right)=f(x') \tag{22}$$

综上所述

$$Sf(x)=G_x(\lambda_0)=f(x')=f(x'-2x)$$

这表明对于任意的 $h\in\mathbb{R}$，$\{x\in\mathbb{R}: Sf(x)>h\}=\{x\in\mathbb{R}: f(x)>h\}$.

定理 1 的证明　对于强制的凸函数 $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$，令

$$f_1(x'+te_n)=\sup_{\lambda\in[0,1]}\inf_{t_1+t_2=t}[\lambda f(x',2t_1)+(1-\lambda)f(x',-2t_2)]$$

根据引理 1，对于任意的 $x'\in\Omega\mid e_n$，$f_1(x',x_n)$ 是关于 x_n 的偶函数. 因此，f_1 的上图 epi(f_1) 关于 $e_n^{\perp}$ 对称，因此根据凸体的 Steiner 对称化和引理 1 可得

$$S(\mathrm{epi} f)=\mathrm{epi}\,(f_1) \tag{23}$$

根据文献[19] 中的(13) 式可得

$$S(\mathrm{epi} f)=\mathrm{epi}\,(Sf) \tag{24}$$

根据(23) 式和(24) 式，可得 $f_1=Sf$.

引理 2　如果 $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow[0,\infty)$ 是偶的凸函数，并且 $0<\int e^{-f}<\infty$，那么 $\int e^{-Lf}\leqslant\int e^{-L(Sf)}$.

证　对于 f 和 $x_n\in\mathbb{R}$，我们定义新的函数 $f_{x_n}(x')=f(x',x_n)$，其中 $x'\in e_n^{\perp}$. 根据函数 Steiner 对

称化的定义，对于 $x'=x'_1+x'_2$，其中 $x',x'_1,x'_2\in e_n^{\perp}$，我们可得

$$
\begin{aligned}
L(Sf)_{x_n}(x') &= L(Sf)(x',x_n)=\\
&\sup_{(y',y_n)\in\mathbb{R}^n}[\langle(x',x_n),(y',y_n)\rangle-Sf(y',y_n)]=\\
&\sup_{(y',y_n)\in\mathbb{R}^n}[\langle(x',x_n),(y',y_n)\rangle-\sup_{\lambda\in[0,1]}\inf_{y_1+y_2=y_n}(\lambda f(y',2y_1)+(1-\lambda)f(y',-2y_2))]=\\
&\sup_{(y',y_n)\in\mathbb{R}^n}\inf_{\lambda\in[0,1]}\sup_{y_1+y_2=y_n}[\langle(x',x_n),(y',y_n)\rangle-(\lambda f(y',2y_1)+(1-\lambda)f(y',-2y_2))]
\end{aligned}
$$

取 $\lambda=\frac{1}{2}$，根据 $\sup\sup(A+B)\leqslant\sup\sup A+\sup\sup B$，有

$$
\begin{aligned}
&\sup_{(y',y_n)\in\mathbb{R}^n}\inf_{\lambda\in[0,1]}\sup_{y_1+y_2=y_n}[\langle(x',x_n),(y',y_n)\rangle-(\lambda f(y',2y_1)+(1-\lambda)f(y',-2y_2))]\leqslant\\
&\sup_{(y',y_n)\in\mathbb{R}^n}\sup_{y_1\in\mathbb{R}}\left[\langle(x',x_n),(y',y_n)\rangle-\left(\frac{1}{2}f(y',2y_1)+\frac{1}{2}f(y',2y_1-2y_n)\right)\right]\leqslant\\
&\frac{1}{2}\sup_{(y',y_n)\in\mathbb{R}^n}\sup_{y_1\in\mathbb{R}}[\langle(2x'_1,x_n),(y',2y_1)\rangle-f(y',2y_1)]+\\
&\frac{1}{2}\sup_{(y',y_n)\in\mathbb{R}^n}\sup_{y_1\in\mathbb{R}}[\langle(2x'_2,-x_n),(y',2y_1-2y_n)\rangle-f(y',2y_1-2y_n)]=\\
&\frac{1}{2}[Lf(2x'_1,x_n)+Lf(2x'_2,-x_n)]
\end{aligned}
\tag{25}
$$

根据(25)式和 x'_1,x'_2 的任意性，可得

$$
\exp(-L(Sf)(x',x_n))\geqslant\sup_{x'_1+x'_2=x'}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}Lf(2x'_1,x_n)\right)\times\exp\left(-\frac{1}{2}Lf(2x'_2,-x_n)\right)\right)
$$

其中 $\exp(f)$ 表示 e^f. 根据(25)式和 Prekopa-Leindler 不等式，我们可得

$$
\begin{aligned}
\int_{e_n^{\perp}}\exp(-L(Sf)(x',x_n))\,dx' &\geqslant\left(\int_{e_n^{\perp}}\exp(-Lf(x',x_n))\,dx'\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{e_n^{\perp}}\exp(-Lf(x',-x_n))\,dx'\right)^{\frac{1}{2}}=\\
&\int_{e_n^{\perp}}\exp(-Lf(x',x_n))\,dx'
\end{aligned}
$$

其中最后一个等式是由于 Lf 的偶性. 因此，根据 Fubini 定理，原命题成立.

引理 3 令 $h(t)$ 是递增的定义域为 $[0,\infty)$ 的凸函数，并且 $\int_0^{\infty}e^{-h(t)}dt<\infty$. 令 $Lh(|\cdot|)$ 表示函数 $h(|x|)$ $(x\in\mathbb{R}^n)$ 的 Legendre 变换，则

$$
\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-h(|x|))dx\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-Lh(|x|))\,dx\leqslant(2\pi)^n
\tag{26}
$$

证 根据球面坐标变换可得

$$
\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-h(|x|))dx=\int_{S^{n-1}}\left[\int_0^{+\infty}\exp(-h(r))\,r^{n-1}dr\right]d\omega
\tag{27}
$$

其中 $d\omega$ 表示单位球面上的 Hausdorff 测度. 对于任意的 $x\in\mathbb{R}^n$，令 $x=t_x\theta_x$，其中：

$$
\theta_x=\frac{x}{|x|}\in S^{n-1}\qquad t_x=|x|
$$

从而

$$
L(h(|x|))=\sup_{y\in\mathbb{R}^n}(\langle x,y\rangle-h(|y|))=\sup_{t_y\geqslant 0}(t_xt_y-h(t_y))
\tag{28}
$$

因此可得

$$
\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-Lh(|x|))\,dx=\int_{S^{n-1}}\left[\int_0^{\infty}\exp(-\sup\{rt-h(t):t\geqslant 0\})\,r^{n-1}dr\right]d\omega
\tag{29}
$$

对于 $r\in[0,\infty)$，令：

$$
f_1(r)=\exp(-h(r))\,r^{n-1}
$$
$$
f_2(r)=\exp(-\sup\{rt-h(t):t\geqslant 0\})\,r^{n-1}
$$

并且

$$f_3(r)=\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)r^{n-1}$$

令

$$g_i(t)=f_i(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{e}^t \qquad i=1,2,3$$

那么

$$\int_0^{\infty} f_i(r)\,\mathrm{d}r=\int_R g_i(t)\,\mathrm{d}t$$

并且对于任意的 $s,t\in\mathbb{R}$，$g_1(s)g_2(t)\leqslant\left(g_3\left(\frac{s}{2}+\frac{t}{2}\right)\right)^2$. 根据 Prekopa-Leindler 不等式可得

$$\int_0^{\infty} f_1(r)\,\mathrm{d}r\int_0^{\infty} f_2(r)\,\mathrm{d}r\leqslant\left(\int_0^{\infty} f_3(r)\,\mathrm{d}r\right)^2$$

根据(29) 式，可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-h(|x|))\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-Lh(|x|))\,\mathrm{d}x=$$

$$\omega_n^2\int_0^{\infty} f_1(r)\,\mathrm{d}r\int_0^{\infty} f_2(r)\,\mathrm{d}r\leqslant\omega_n^2\left(\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)r^{n-1}\,\mathrm{d}r\right)^2=(2\pi)^n \tag{30}$$

其中 $\omega_n=\dfrac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}$ 是欧式单位球的表面积[20-21].

定理 2 的证明　根据引理 2 和 Steiner 对称化的积分不变性，可得

$$\int\mathrm{e}^{-f}\int\mathrm{e}^{-Lf}\leqslant\int\mathrm{e}^{-Sf}\int\mathrm{e}^{-L(Sf)} \tag{31}$$

对于对数凹函数 $\mathrm{e}^{-f}\in L^1(\mathbb{R}^n)$，存在一序列方向 $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}\subset S^{n-1}$，使得 $\exp(-S_{u_1,\cdots,u_i}f)$ 收敛到径向函数 $\exp(-h(|x|))$. 根据(31) 式和引理 3 以及 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 函数的积分连续性可得

$$\int\mathrm{e}^{-f}\int\mathrm{e}^{-Lf}\leqslant\lim_{i\to\infty}\int\mathrm{e}^{-S_{u_1,\cdots,u_i}f}\int\mathrm{e}^{-L(S_{u_1,\cdots,u_i}f)}=\int\mathrm{e}^{-h(|x|)}\int\mathrm{e}^{-Lh(|x|)}\leqslant(2\pi)^n$$

参考文献：

[1] FALCONER K J. A Result on the Steiner Symmetrization of a Compact Set [J]. J London Math Soc, 1976, 14(2): 385-386.

[2] GARDNER R J. The Brunn-Minkowski Inequality [J]. Bull Amer Math Soc, 2002, 39(3): 355-405.

[3] GARDNER R J. Geometric Tomography [M]. New York: Cambridge University Press, 2006.

[4] LIN Y J. Smoothness of the Steiner Symmetrization [J]. Proc Amer Math Soc, 2018, 146(1): 345-357.

[5] LIN Y J. Affine Orlicz Polya-Szego Principle for Log-Concave Functions [J]. J Funct Anal, 2017, 273(10): 3295-3326.

[6] CIANCHI A, FUSCO N. Functions of Bounded Variation and Rearrangements [J]. Arch Ration Mech Anal, 2002, 165(1): 1-40.

[7] BIANCHI G, KLAIN D A, LUTWAK E, et al. A Countable Set of Directions is Sufficient for Steiner Symmetrization [J]. Adv in Appl Math, 2011, 47(4): 869-873.

[8] BURCHARD A. Steiner Symmetrization is Continuous in $W^{1,p}$ [J]. Geom Funct Anal, 1997, 7(5): 823-860.

[9] CIANCHI A, CHLEBIK M, FUSCO N. The Perimeter Inequality Under Steiner Symmetrization: Cases of Equality [J]. Ann of Math, 2005, 162(1): 525-555.

[10] GARDNER R J. Symmetrals and X-Rays of Planar Convex Bodies [J]. Arch Math (Basel), 1983, 41(2): 183-189.

[11] KLARTAG B. An Isomorphic Version of the Slicing Problem [J]. J Funct Anal, 2005, 218(2): 372-394.

[12] KLARTAG B, Milman V D. Isomorphic Steiner Symmetrization [J]. Invent Math, 2003, 153(3): 463-485.

[13] CIANCHI A, LUTWAK E, YANG D, et al. Affine Moser-Trudinger and Morrey-Sobolev inequalities [J]. Calc Var Partial Differential Equations, 2009, 36(3): 419-436.

[14] MEYER M, PAJOR A. On the Blaschke Santalo Inequality [J]. Arch Math, 1990, 55(1): 82-93.

[15] FRADELIZI M, MEYER M. Some Functional Forms of Blaschke-Santalo Inequality [J]. Math Z, 2007, 256(2): 379－395.

[16] ARTSTEIN-AVIDAN S, KLARTAG B, MILMAN V. The Santalo Point of a Function, and a Functional Form of the Santalo Inequality [J]. Mathematika, 2004, 51(2): 33－48.

[17] LEHEC J. A Direct Proof of the Functional Santalo Inequality [J]. C R Math Acad Sci Paris, 2009, 347(1－2): 55－58.

[18] SCHNEIDER R. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory [M]. 2 th ed. New York: Cambridge University Press, 2014.

[19] CIANCHI A, FUSCO N. Steiner Symmetric Extremals in Polya-Szego Type Inequalities [J]. Adv Math, 2006, 203(2): 637－728.

[20] 朱　华, 王世莉, 姚纯青, 等. 常曲率空间中具有平行平均曲率向量的伪脐子流形 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(10): 74－78.

[21] 朱保成, 徐文学. Wills猜想的强化形式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(10): 20－25.

An Equivalent Characterization of the Steiner Symmetrization of Convex Functions

LIN You-jiang

School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China

Abstract: The classical definition of the functional Steiner symmetrization is defined according to the Steiner symmetrization of level sets of the function and the layer cake representation. In this paper, we give an analytic expression for the Steiner symmetrization of coercive convex functions, which is an equivalent characterization of the classical Steiner symmetrization. This new definition does not depend on the Steiner symmetrization of the level sets; instead, it converts the definition into the symmmetrization of a one-dimensional parabolic function, which is more helpful to prove the functional inequality. The functional Blaschke-Santalo inequality is an important functional affine isoperimetric inequality. Its geometric background is the Blaschke-Santalo inequality of convex bodies. In this paper, using the new definition, we first prove that the integral value of the convex function is reduced with respect to Steiner symmetrization and then, using Prekopa-Leindler inequality, we prove the Blaschke-Santalo inequality of radial function. By continuous Steiner symmetrizations, a convex function can always be converged to its symmetric decreasing rearrangement in the sense of Lp norm, and the symmetric decreasing rearrangement is a radial function, so the functional Blaschke-Santalo inequality is proved.

Key words: rearrangement of functions; Steiner symmetrization; coercive convex function; Blaschke-Santalo inequality

责任编辑　廖　坤
崔玉洁