DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.09.010

无界域上非自治 Reaction-Diffusion 方程的后向紧动力学①

佘连兵[1], 李信韬[1], 李扬荣[2]

1. 六盘水师范学院 数学与信息工程学院, 贵州 六盘水 553004; 2. 西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 在非自治外力项是后向 λ -缓增有限的和后向尾部渐近趋于零的假设条件下, 运用 cut-off 函数、后向 Granwall 不等式、后向 Granwall-type 不等式获得了无界域上非自治 Reaction-Diffusion 方程拉回吸引子的后向紧性.

关 键 词: 非自治动力系统; 后向紧动力; cut-off 函数; 无界域

中图分类号: O193 **文献标志码**: A **文章编号**: 1673-9868(2018)09-0059-08

在物理学、化学、生物学、经济学及各种工程问题中提出的大量反应扩散问题, 日益受到人们的重视. 在数学上通常把半线性抛物型方程叫作 Reaction-Diffusion 方程, 对 Reaction-Diffusion 方程的研究一直以来都受到广大学者的格外关注, 而对非自治 Reaction-Diffusion 方程拉回吸引子的研究是其中一个重要课题[1-4].

最近, 文献[5-6]研究了有界域上非自治 Reaction-Diffusion 方程拉回吸引子的后向紧性, 这种紧性反映了非自治动力系统的半全局性质, 体现了与自治系统片段紧性的差异. 文献[7]建立了无界管道上非自治 Benjamin-Bona-Mahony 方程后向紧拉回吸引子的存在性理论. 文献[8-9]分别研究了非自治 3D Navier-Stokes 方程和非自治的波动方程的后向紧吸引子的存在性. 本文研究在 $\mathbb{R}^N$ 上如下非自治 Reaction-Diffusion 方程拉回吸引子的后向紧动力:

$$\begin{cases} u_t + \lambda u - \Delta u = f(x, u) + g(t, x) \\ u(s, s, x) = u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^N$, $t \geqslant s \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. 众所周知, 在无界域上 Sobolev 嵌入不再是紧的, 这给后向一致先验估计带来困难, 为了克服这个难点, 采用 cut-off 函数的技巧, 结合后向 Granwall 不等式和后向 Granwall-type 不等式, 在假设非自治外力项是后向 λ -缓增有限的和后向尾部渐近趋于零的情况下, 对方程的解进行后向一致估计, 证明了非自治 Reaction-Diffusion 方程的吸引子的后向紧性.

1 Banach 空间上的非自治过程的后向紧动力学

定义 1 若定义在 Banach 空间 X 上的一族映射 $S(t, s): X \longrightarrow X$, $\forall t \geqslant s$, 满足对于任意的 $t \geqslant$

① 收稿日期: 2017-04-24

基金项目: 国家自然科学基金项目(11571283); 贵州省教育厅自然科学基金项目(KY[2016]103, (KY[2016]271, KY[2017]260); 六盘水师范学院重点学科项目(LPSSYZDPYXK201709); 贵州省科学技术基金项目(LKLS[2013]14.

作者简介: 佘连兵(1981-), 男, 副教授, 主要从事无穷维动力系统的研究.

通信作者: 李扬荣, 教授, 博士研究生导师.

$r \geqslant s$ 有

$$S(s, s)=I \qquad S(t, s)=S(t, r)S(r, s)$$

则称 $S(\cdot, \cdot)$ 是 X 上的一个非自治过程.

定义 2 设 $\mathscr{A}=\{\mathscr{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 Banach 空间 X 中的一个非自治集，对任意的 $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$，当 $t_1 \leqslant t_2$ 时，有 $\mathscr{A}(t_1) \subset \mathscr{A}(t_2)$，则称 $\mathscr{A}$ 是单调递增的；当 $t_1 \leqslant t_2$ 时，有 $\mathscr{A}(t_1) \supset \mathscr{A}(t_2)$，则称 $\mathscr{A}$ 是单调递减的.

关于非自治动力系统的详细介绍可见专著[3]，对任意的 $t \in \mathbb{R}$，$\mathscr{A}(t)$ 在 X 中是紧的，但并不表示 $\bigcup\limits_{s\leqslant t}\mathscr{A}(s)$ 在 X 中也是紧的，因此下面关于后向紧的拉回吸引子的定义是有意义的.

定义 3 设 $S(\cdot, \cdot)$ 是定义在 Banach 空间 X 上的一个非自治过程，若 X 中的一个非自治集 $\mathscr{A}=\{\mathscr{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 满足：

1) $\mathscr{A}$ 是后向预紧的，即对 $\forall t \in \mathbb{R}$，$\bigcup\limits_{s\leqslant t}\mathscr{A}(s)$ 在 X 中是预紧的；

2) $\mathscr{A}$ 是不变的，即对于所有的 $t \geqslant \tau$，有 $S(t, \tau)\mathscr{A}(\tau)=\mathscr{A}(t)$；

3) $\mathscr{A}$ 是拉回吸引的，即对于 X 中所有的有界集 B，有

$$\lim_{\tau\to+\infty} \mathrm{dist}_X(S(t, t-\tau)B, \mathscr{A}(t))=0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

其中

$$\mathrm{dist}_X(A, B)=\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|_X$$

是 Hausdorff 半距离，则称 $\mathscr{A}$ 是一个关于非自治过程 $S(\cdot, \cdot)$ 的后向紧拉回吸引子.

下面引用文献[6-7]中的一个存在性定理：

定理 1 设 $S(\cdot, \cdot)$ 是定义在 Banach 空间 X 上的一个非自治过程，若满足

(i) $S(\cdot, \cdot)$ 在 X 上有一个单调递增的有界的吸收集 $\mathscr{K}=\{\mathscr{K}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$；

(ii) $S(\cdot, \cdot)$ 是后向 Omega-limit 紧的，即

$$\lim_{\tau_0\to+\infty}\kappa_X\Big(\bigcup_{\tau\geqslant\tau_0}\bigcup_{s\leqslant t}S(s, s-\tau)D\Big)=0$$

其中 $\kappa_X(\cdot)$ 是文献[10]中介绍的 Kuratowski 测度.

则 $S(\cdot, \cdot)$ 有一个后向紧的拉回吸引子 $\mathscr{A}=\{\mathscr{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$，其中

$$\mathscr{A}(t)=\omega_X(\mathscr{K}(t), t)=\bigcap_{\tau_0>0}\overline{\bigcup_{\tau\geqslant\tau_0}S(t, t-\tau)\mathscr{K}(t)}^X \qquad t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

下面介绍后向 Granwall 不等式和后向 Granwall-type 不等式，其证明完全类似于文献[12].

引理 1(后向 Gronwall 不等式) 设 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\tau>0$，y, g 和 h 是 $[s-\tau, s](s \leqslant t)$ 上的非负可积函数，且 y' 是 $[s-\tau, s](s \leqslant t)$ 上的可积函数，若

$$y'(r)+g(r)y(r) \leqslant h(r)r \in [s-\tau, s] \qquad s \leqslant t$$

则

$$\sup_{s\leqslant t}y(s) \leqslant \sup_{s\leqslant t}y(s-\tau)\mathrm{e}^{-\int_{s-\tau}^{s}g(r)\mathrm{d}r}+\sup_{s\leqslant t}\int_{s-\tau}^{s}h(r)\mathrm{e}^{\int_{s}^{r}g(r)\mathrm{d}r}\mathrm{d}r \tag{3}$$

若 $g=a>0$ 是一个常数，则

$$\sup_{s\leqslant t}y(s) \leqslant \sup_{s\leqslant t}y(s-\tau)\mathrm{e}^{-a\tau}+\sup_{s\leqslant t}\int_{s-\tau}^{s}h(r)\mathrm{e}^{a(r-s)}\mathrm{d}r \tag{4}$$

引理 2 (后向 Gronwall-type 不等式) 设 y, y', y_1 和 y_2 是 $\mathbb{R}$ 上的局部可积函数，且 y, y_1 和 y_2 是非负函数，对于每个 $t \in \mathbb{R}$，有

$$y'(s)+by(s)+y_1(s) \leqslant y_2(s) \qquad s \leqslant t$$

(i) 若 $b \in \mathbb{R}$ 是一个给定的常数，则对每一个 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\mu>0$，有

$$\sup_{s\leqslant t}y(s) \leqslant \frac{1}{\mu}\sup_{s\leqslant t}\int_{s-\mu}^{s}\mathrm{e}^{b(r-s)}y(r)\mathrm{d}r+\sup_{s\leqslant t}\int_{s-\mu}^{s}\mathrm{e}^{b(r-s)}y_2(r)\mathrm{d}r \tag{5}$$

(ii) 若 $b \geqslant 0$ 是一个给定的常数，则对每一个 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\mu > 0$，有

$$\sup_{s\leqslant t} y(s) + \sup_{s\leqslant t}\int_{s-\mu}^{s} y_1(r)\mathrm{d}r \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-b\mu}}{\mu} \sup_{s\leqslant t}\int_{s-3\mu}^{s} y(r)\mathrm{d}r + \sup_{s\leqslant t}\int_{s-3\mu}^{s} y_2(r)\mathrm{d}r \tag{6}$$

2　无界域上非自治 Reaction-Diffusion 方程的后向紧动力学

本节将应用上一节的存在性理论证明方程(1) 在下面的假设条件下存在唯一的后向紧拉回吸引子. 为了计算方便，设 c 是变化的正常数.

下面给出方程(1) 中关于 f 和 g 的假设条件：

(A) 设 $p > 2$，$\beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0$，$f(\cdot, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 满足

$$f(x, s)s \leqslant -\beta_1 |s|^p + \psi_1 \qquad \psi_1 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$$

$$|f(x, s)| \leqslant \beta_2 |s|^{p-1} + \psi_2 \qquad \psi_2 \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(x, s) \leqslant \beta_3,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, s)\right| \leqslant \psi_3 \qquad \psi_3 \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

(B0) $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$.

(B1) g 是后向 λ -缓增有限的：

$$M(t) = \sup_{s\leqslant t}\int_{-\infty}^{s} \mathrm{e}^{\lambda(r-s)} \| g(r, \cdot)\|^2_{L^2}\mathrm{d}r < \infty$$

其中：$t \in \mathbb{R}$，λ 给定于(6) 式中.

(B2) g 是后向尾部趋于 0 的：

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{s\leqslant t}\int_{\mathbb{R}^N(|x|\geqslant k)} |g(s, x)|^2\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

由文献[4] 知，对 $\forall s \in \mathbb{R}$，当条件(A) 和(B0) 满足时，方程(1) 有唯一的连续的解

$$u(\cdot, s, u_0) \in C([s, +\infty), L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L^2_{\mathrm{loc}}((s, +\infty), H^1(\mathbb{R}^N)) \cap L^p_{\mathrm{loc}}((s, +\infty), L^p(\mathbb{R}^N)) \tag{7}$$

特别地，$u(s, s, u_0) = u_0$，故可定义如下的非自治过程 $S(\cdot, \cdot)$：$L^2(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$：

$$S(t, t-\tau)u_0 = u(t, t-\tau, u_0),\ \forall u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N) \qquad \forall \tau \geqslant 0 \tag{8}$$

引理 3　若条件(A)，(B0)，(B1) 满足，则对每个 $t \in \mathbb{R}$ 和每个 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中的有界集 B，存在一个 $\tau_0 > 9$，使得当 $\tau \geqslant \tau_0$ 时有，

$$\sup_{s\leqslant t} \| u(s, s-\tau, u_0)\|_2^2 + \theta \sup_{s\leqslant t}\int_{s-\tau}^{s} \mathrm{e}^{\lambda(r-s)} \| u(r, s-\tau, u_0)\|^2_{H^1}\mathrm{d}r +$$
$$2\beta_1 \sup_{s\leqslant t}\int_{s-\tau}^{s} \mathrm{e}^{\lambda(r-s)} \| u(r, s-\tau, u_0)\|_p^p\mathrm{d}r \leqslant 1 + \frac{2}{\lambda}M(t) + \frac{2\|\psi_1\|_1}{\lambda} \tag{9}$$

其中 $\theta = \min\left(\dfrac{\lambda}{2}, 2\right)$，$M(t)$ 由条件(B1) 给出.

证　让方程(1) 与 u 在 $\mathbb{R}^N$ 上做内积可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u\|_2^2 + 2\lambda\| u\|_2^2 + 2\|\nabla u\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} 2f(x, u)u\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} 2g(t, x)u\mathrm{d}x \tag{10}$$

由 Young 不等式和条件(A) 知

$$\int_{\mathbb{R}^N} 2f(x, u)u\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} 2g(t, x)u\mathrm{d}x \leqslant$$
$$-2\beta_1\| u\|_p^p + 2\|\psi_1\|_1 + \frac{\lambda}{2}\| u\|_2^2 + \frac{2}{\lambda}\| g(t, \cdot)\|_2^2 \tag{11}$$

令

$$\theta=\min\left(\frac{\lambda}{2},\ 2\right)$$

由(10)式和(11)式知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_2^2+\lambda\|u\|_2^2+\theta\|u\|_{H^1}^2+2\beta_1\|u\|_p^p\leqslant\frac{2}{\lambda}\|g(t,\cdot)\|_2^2+2\|\psi_1\|_1 \tag{12}$$

由后向 Gronwall 不等式知，存在一个 $\tau_0>9$，当 $\tau\geqslant\tau_0$，$u_0\in B$ 时，有

$$\begin{aligned}&\sup_{s\leqslant t}\|u(s,s-\tau,u_0)\|_2^2+\theta\sup_{s\leqslant t}\int_{s-\tau}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\|u(r,s-\tau,u_0)\|_{H^1}^2\mathrm{d}r+\\&2\beta_1\sup_{s\leqslant t}\int_{s-\tau}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\|u(r,s-\tau,u_0)\|_p^p\mathrm{d}r\leqslant\\&\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\|u_0\|_2^2+\frac{2}{\lambda}\sup_{s\leqslant t}\int_{s-\tau}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\|g(r,\cdot)\|_2^2\mathrm{d}r+2\|\psi_1\|_1\sup_{s\leqslant t}\int_{s-\tau}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\mathrm{d}r\leqslant\\&1+\frac{2}{\lambda}M(t)+\frac{2\|\psi_1\|_1}{\lambda}\end{aligned}$$

于是可得(9)式.

引理4 若条件(A),(B0),(B1)满足，则对每个 $t\in\mathbb{R}$ 和每个 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中的有界集 B，存在一个 $\tau_0>9$，使得当 $\tau\geqslant\tau_0$ 时有

$$\sup_{u_0\in B}\sup_{s\leqslant t}\|u(s,s-\tau,u_0)\|_p^p\leqslant c\mathrm{e}^{\lambda t}(1+M(t)) \tag{13}$$

证 让方程(1)与 $|u|^{p-2}u$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上做内积，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_p^p+\lambda\|u\|_p^p+(p-1)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-2}|\nabla u|\mathrm{d}x=\\&\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)|u|^{p-2}u\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}g(t,x)|u|^{p-2}u\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{14}$$

对非线性项估计如下：

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)|u|^{p-2}u\mathrm{d}x\leqslant\\&-\beta_1\|u\|_{2p-2}^{2p-2}+\int_{\mathbb{R}^N}|\psi_1||u|^{p-2}\mathrm{d}x\leqslant\\&-\frac{\beta_1}{2}\|u\|_{2p-2}^{2p-2}+c\|\psi_1\|_{2-\frac{2}{p}}^{2-\frac{2}{p}}\leqslant\\&-\frac{\beta_1}{2}\|u\|_{2p-2}^{2p-2}+c\|\psi_1\|_1+c\|\psi_1\|_2^2\leqslant\\&-\frac{\beta_1}{2}\|u\|_{2p-2}^{2p-2}+c\end{aligned} \tag{15}$$

由 Young 不等式知

$$\int_{\mathbb{R}^N}g(t,x)|u|^{p-2}u\mathrm{d}x\leqslant\frac{\beta_1}{4}\|u\|_{2p-2}^{2p-2}+c\|g(t,\cdot)\|_2^2 \tag{16}$$

由(14)式和(16)式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_p^p+\frac{\beta_1 p}{4}\|u\|_{2p-2}^{2p-2}\leqslant c\|g(t,\cdot)\|_2^2+c \tag{17}$$

对(17)式运用后向 Granwall-type 不等式(取 $\mu=3$ 和 $b=0$)，结合(9)式和条件(B1)可知，当 $\tau\geqslant\tau_0>9$，$u_0\in B$ 时，有

$$\sup_{s\leqslant t}\|u(s,s-\tau,u_0)\|_p^p+\frac{\beta_1 p}{4}\sup_{s\leqslant t}\|u(s,s-\tau,u_0)\|_{2p-2}^{2p-2}\leqslant$$

$$\sup_{s\leqslant t}\int_{s-9}^{s}\|u(r)\|_p^p\mathrm{d}r+c\sup_{s\leqslant t}\int_{s-9}^{s}\|g(r,\cdot)\|_2^2\mathrm{d}r+c\sup_{s\leqslant t}\int_{s-9}^{s}1\mathrm{d}r\leqslant$$

$$\mathrm{e}^{\lambda t}\sup_{s\leqslant t}\int_{s-9}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-t)}\|u(r)\|_p^p\mathrm{d}r+c\ \mathrm{e}^{\lambda t}\sup_{s\leqslant t}\int_{s-9}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-t)}\|g(r,\cdot)\|_2^2\mathrm{d}r+c\leqslant$$

$$c\,\mathrm{e}^{\lambda t}(1+M(t))$$

故(13)式成立.

利用上面的结果可得在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 上的一个后向一致估计.

引理 5　若条件(A),(B0),(B1)满足，则对每个 $t\in\mathbb{R}$ 和每个 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中的有界集 B，存在一个 $\tau_0>9$，使得当 $\tau\geqslant\tau_0$ 时，有

$$\sup_{u_0\in B}\sup_{s\leqslant t}\|u(s,s-\tau,u_0)\|_{H^1}^2+\sup_{u_0\in B}\sup_{s\leqslant t}\int_{s-1}^{s}\|u_r(r,s-\tau,u_0)\|_2^2\leqslant c\,\mathrm{e}^{\lambda t}(1+M(t))\tag{18}$$

证　让方程(1)与 u_t 在 $\mathbb{R}^N$ 上做内积可得

$$\|u_t\|^2+\frac{\lambda}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|^2=\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)u_t\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}g(t,x)u_t\mathrm{d}x\tag{19}$$

由条件(A)和 Young 不等式可知

$$\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)u_t\mathrm{d}x\leqslant\beta_2\int_{\mathbb{R}^N}u_t|u|^{p-1}\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}u_t\psi_2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\|u_t\|_2^2+c\|u\|_{2p-2}^{2p-2}+c\tag{20}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}g(t,x)u_t\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\|u_t\|_2^2+c\|g(t,\cdot)\|_2^2\tag{21}$$

由(19)式和(20)式可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{H^1}^2+\|u_t\|_2^2\leqslant c\|u\|_{2p-2}^{2p-2}+c\|g(t,\cdot)\|_2^2+c\tag{22}$$

对(22)式运用后向 Granwall-type 不等式(取 $\mu=1$ 和 $b=0$)，结合(9)式、(13)式和条件(B1)，可知当 $\tau\geqslant\tau_0>9$，$u_0\in B$ 时，有

$$\sup_{s\leqslant t}\|u(s,s-\tau,u_0)\|_{H^1}^2+\sup_{s\leqslant t}\int_{s-1}^{s}\|u_r(r,s-\tau,u_0)\|_2^2\leqslant$$

$$c\sup_{s\leqslant t}\int_{s-3}^{s}\|u(r,s-\tau,u_0)\|_{H^1}^2\mathrm{d}r+c\sup_{s\leqslant t}\int_{s-3}^{s}\|u(r,s-\tau,u_0)\|_{2p-2}^{2p-2}\mathrm{d}r+$$

$$c\sup_{s\leqslant t}\int_{s-3}^{s}\|g(r,\cdot)\|_2^2\mathrm{d}r+c\leqslant$$

$$c\,\mathrm{e}^{\lambda t}\sup_{s\leqslant t}\int_{s-9}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\|u(r,s-\tau,u_0)\|_{H^1}^2\mathrm{d}r+$$

$$c\,\mathrm{e}^{\lambda t}\sup_{s\leqslant t}\int_{s-9}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\|u(r,s-\tau,u_0)\|_{2p-2}^{2p-2}\mathrm{d}r+$$

$$c\,\mathrm{e}^{\lambda t}\sup_{s\leqslant t}\int_{s-9}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\|g(r,\cdot)\|_2^2\mathrm{d}r+c\leqslant$$

$$c\,\mathrm{e}^{\lambda t}(1+M(t))$$

由条件(B2)，运用 cut-off 函数可以证明当时间和空间都趋于无穷时，方程(1)的解在 $L^2(Q_k^c)$ 上是后向渐近趋于 0 的，这里 $Q_k^c=\mathbb{R}^N\backslash Q_k$，$Q_k=\{x: x\in\mathbb{R}^N, |x|<k\}$.

引理 6　若条件(A),(B0),(B1)满足，则对每个 $t\in\mathbb{R}$ 和每个 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中的有界集 B，存在一个 $\tau_0>9$，使得当 $\tau\geqslant\tau_0$ 时有

$$\lim_{\tau\to+\infty}\lim_{k\to+\infty}\sup_{u_0\in B}\sup_{s\leqslant t}\int_{Q_k}^{c}|u(s,s-\tau,u_0)|^2\mathrm{d}x=0 \tag{23}$$

证 对于 $x\in\mathbb{R}^N$ 和 $k\geqslant 1$，定义 $\varphi_k(x)=\varphi_k\left(\frac{|x|^2}{k^2}\right)$，这里 $\varphi(\cdot)$：$\mathbb{R}^+\longrightarrow[0,1]$ 是一个光滑函数：

$$\varphi(s)=\begin{cases}0 & 0\leqslant s\leqslant 1\\ 1 & s\geqslant 2\end{cases}$$

易证明

$$\|\nabla\varphi_k\|_\infty\leqslant\frac{c}{k}$$

让(1)式与 $\varphi_k u$ 在 $\mathbb{R}^N$ 做内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_k|u|^2\mathrm{d}x+\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_k|u|^2\mathrm{d}x=$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_k u\Delta u\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)\varphi_k u\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}g(t,x)\varphi_k u\mathrm{d}x \tag{24}$$

由条件(A)和 Young 不等式可知

$$\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_k u\Delta u\mathrm{d}x=-\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_k|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}\nabla\varphi_k u\nabla u\mathrm{d}x\leqslant\frac{c}{k}\|u\|_{H^1}^2 \tag{25}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)\varphi_k u\mathrm{d}x\leqslant-\beta_1\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_k|u|^p\mathrm{d}x+\int_{Q_k}^{c}|\psi_1|\mathrm{d}x\leqslant\int_{Q_k}^{c}|\psi_1|\mathrm{d}x \tag{26}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N}g(t,x)\varphi_k u\mathrm{d}x\leqslant\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_k|u|^2\mathrm{d}x+c\int_{Q_k}^{c}|g(t,x)|^2\mathrm{d}x \tag{27}$$

由(24)式和(27)式可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_k|u|^2\mathrm{d}x+\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_k|u|^2\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{c}{k}\|u\|_{H^1}^2+2\int_{Q_k}^{c}|\varphi_k|\mathrm{d}x+c\int_{Q_k}^{c}|g(t,x)|^2\mathrm{d}x \tag{28}$$

由后向 Gronwall 不等式可知，当 $\tau\geqslant\tau_0$，$u_0\in B$ 时

$$\sup_{s\leqslant t}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_k|u(s,s-\tau,u_0)|^2\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_k|u_0|^2\mathrm{d}x+\frac{c}{k}\sup_{s\leqslant t}\int_{s-\tau}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\|u(r,s-\tau,u_0)\|_{H^1}^2\mathrm{d}r+$$

$$2\int_{Q_k}^{c}|\varphi_k|\mathrm{d}x\sup_{s\leqslant t}\int_{s-\tau}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\mathrm{d}r+$$

$$c\sup_{s\leqslant t}\int_{s-\tau}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\int_{Q_k}^{c}|g(r,x)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r\leqslant$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\|u_0\|^2+\frac{c}{k}(1+M(t))+\frac{2}{\lambda}\int_{Q_k}^{c}|\varphi_k|\mathrm{d}x+$$

$$\frac{c}{\lambda}\sup_{s\leqslant t}\int_{Q_k}^{c}|g(s,x)|^2\mathrm{d}x$$

由 B 的有界性、条件(B1),(B2)和 Lesbegue 定理可知(23)式成立.

定理 1 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上，非自治的 Reaction-Diffusion 方程(1)在条件(A),(B0),(B1),(B2)下有一个增的有界的吸收集 $\mathscr{K}=\{\mathscr{K}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$，且有唯一的后向紧拉回吸引子 $\mathscr{A}=\{\mathscr{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$，其中

$$\mathscr{K}(t)=\left\{w\in H^1:\ \|w\|_{H^1}^2\leqslant M_0(t)=1+\frac{2}{\lambda}M(t)+\frac{2\|\psi_1\|_1}{\lambda}\right\}\qquad t\in\mathbb{R}\tag{29}$$

$$\mathscr{A}(t)=\omega_X(\mathscr{K}(t),t)=\bigcap_{\tau_0>0}\overline{\bigcup_{\tau\geqslant\tau_0}S(t,t-\tau)\mathscr{K}(t)}^X\qquad t\in\mathbb{R}\tag{30}$$

证　由定理 1 可知，只需证明(8) 式定义的过程 $S(\cdot,\cdot)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 的拓扑下有一个增的有界的吸收集且是后向 Omega-limit 紧的. 事实上，由条件(A) 和(B1) 可知(29) 式中的 $M_0(t)$ 是一个关于时间 t 的有限的增函数，于是由引理 3 知(29) 式中的 $\mathscr{K}=\{\mathscr{K}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 $S(\cdot,\cdot)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上的一个增的有界的吸收集. 下面证明 $S(\cdot,\cdot)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 的拓扑下是后向 Omega-limit 紧的. 对每一个 $t\in\mathbb{R}$ 和 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中有界集 B，定义

$$E(\tau)=\bigcup_{r\geqslant\tau}\bigcup_{s\leqslant t}S(s,s-r)B,\ \tau\geqslant 0$$

由引理 6 可知，$\forall\varepsilon>0$，存在一个 $\tau_1>\tau_0$ 和 $K\geqslant 1$ 使得

$$\sup_{u_0\in B}\sup_{s\leqslant t}\|u(s,s-\tau,u_0)\|_{L_2(Q_K^c)}<\varepsilon,\ u\in E(\tau_1)$$

于是由文献[10] 中 Kuratowski 测度的性质可知

$$\kappa_{L^2(Q_K^c)}E(\tau_1)<2\varepsilon\tag{31}$$

运用 Sobolev 紧嵌入：$H^1(Q_K)\hookrightarrow L^2(Q_K)$ 到(18) 式可知，$E(\tau_1)|_{Q_K}$($E(\tau_1)$ 在 Q_K 上的限制) 在 $L^2(Q_K)$ 上是预紧的，于是由文献[10] 中 Kuratowski 测度的性质可知

$$\kappa_{L^2(Q_K)}E(\tau_1)|_{Q_K}<\varepsilon\tag{32}$$

于是由(31) 式和(32) 式可知

$$\kappa_{L^2(\mathbb{R}^N)}E(\tau_1)=\kappa_{L^2(Q_K^c)}E(\tau_1)+\kappa_{L^2(Q_K)}E(\tau_1)|_{Q_K}<3\varepsilon$$

又 $E(\tau)$ 关于 τ 是单调递减的，故当 $\tau>\tau_1$ 时，

$$\kappa_{L^2(\mathbb{R}^N)}E(\tau)\leqslant\kappa_{L^2(\mathbb{R}^N)}E(\tau_1)<3\varepsilon$$

也即是

$$\lim_{\tau\to+\infty}\kappa_{L^2(\mathbb{R}^N)}E(\tau)=0$$

再由文献[10] 中 Kuratowski 测度的性质可知(8) 式中定义的过程 $S(\cdot,\cdot)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 的拓扑下是后向 Omega-limit 紧的，于是由定理 1 可知定理 2 的结论成立.

参考文献：

[1]　LUKASZEWICZ G. On Pullback Attractors in for Non-Autonomous Reaction-Diffusion Equations [J]. Nonlinear Anal，2010，73(10)：350－357.

[2]　WANG B X. Sufficient and Necessary Criteria for Existence of Pullback Attractors for Non-Compact Random Dynamical Systems [J]. J Differ Equ，2012，253(5)：1544－1583.

[3]　CARVALHO A N，LANGA J A，ROBINSON J C. Attractors for Infinite-Dimensional Non-Autonomous Dynamical Systems [M]. New York：Springer，2013.

[4]　SONG H T. Pullback Attractors of Non-Autonomous Reaction-Diffusion Equations in [J]. J Differ Equ，2010，249(10)：2357－2376.

[5]　CUI H Y，LANGA J A，LI Y R. Regularity and Structure of Pullback Attractors for Reaction-Diffusion Type Systems Without Uniqueness [J]. Nonlinear Anal，2016，140：208－235.

[6]　佘连兵，王仁海. 非自治 Reaction-Diffusion 方程后向紧的拉回吸引子的存在性 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2017，40(6)：1－5.

[7]　LI Y R，WANG R H，YIN J Y. Bankward Compact Attrators for Non-Autonomous Benjsmin-Bona-Mahony Equations on Unbounded Channels [J]. Discrete Contin Dyn Syst B，2017，22(7)：2569－2586.

[8] YIN J Y, GU A H, LI Y R. Bankwards Compact Attrators for Non-Autonomous damped 3D Navier-Stoks Equations [J]. Dynamics of PDE, 2017, 14(2): 201-218.

[9] YIN J Y, LI Y R, GU A H. Backwards Compact Attractors and Periodic Attractors for Non-Autonomous Damped Wave Equations on an Unbounded Domain [J]. Comput Math Appl, 2017, 74(4): 744-758.

[10] LI Y R, GU A H, LI J. Existence and Continuity of Bi-Spatial Random Attractors and Application to Stochastic Semi-Linear Laplacian Eequations [J]. J Differ Equ, 2015, 258(2): 504-534.

[11] LI Y R, YIN J Y. A Modified Proof of Pullback Attractors in a Sobolev Space for Stochastic Fitz Hugh-Nagumo Equations [J]. Disrete Contin Dyn Syst, 2016, 21(4): 1203-1223.

[12] TEMAM R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics [M] //Applied Mathematical Science Series. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

The Backward Compact Dynamics for Non-Autonomous Reaction-Diffusion Equations on Unbounded Domains

SHE Lian-bing[1], LI Xin-tao[1], LI Yang-rong[2]

1. *School of Mathematics and Information Engineering, Liupanshui Normal College, Liupanshui Guizhou 553004, China*;
2. *School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China*

Abstract: The backward compactness of attractors for non-autonomous reaction-diffusion equations on unbounded domains is obtained under the conditions of both backward λ-tempered finiteness and backward tail-smallness for the non-autonomous force by using a cut-off function, a backward Granwall inequality and a backward Granwall-type inequality.

Key words: non-autonomous dynamical system; backward compact dynamics; cut-off function; unbounded domain

责任编辑　张　枸