

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2018.09.011

求解无约束问题的修正 PRP 共轭梯度算法^①

李春念, 袁功林

广西大学 数学与信息学院, 南宁 530004

摘要: 提出了一种改进的 PRP 共轭梯度算法, 其搜索方向自动具有充分下降性和信赖域性质, 且在一定条件下, 具有全局收敛性. 数值结果表明该算法对求解无约束光滑问题是有效的.

关键词: 共轭梯度法; 下降性; 全局收敛性

中图分类号: O224

文献标志码: A

文章编号: 1673-9868(2018)09-0067-09

考虑下列无约束问题:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (1)$$

其中 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 二次连续可导. 求解此类问题的方法有很多, 共轭梯度法就是其中一类. PRP 方法是共轭梯度法中最有效的方法之一^[1-2], 其公式为

$$d_{k+1} = \begin{cases} -g_{k+1} & \text{if } k = 0 \\ -g_{k+1} + \frac{g_{k+1}^T (g_{k+1} - g_k)}{g_k^T g_k} d_k & \text{if } k \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$\beta_k^{\text{PRP}} = \frac{g_{k+1}^T (g_{k+1} - g_k)}{g_k^T g_k}$$

此方法数值表现很出色, 但理论结果不是很理想.

有学者认为该方法收敛性不好的原因在于 $\beta_k^{\text{PRP}} < 0$ 可能发生, 另一个原因在于不具有充分下降性. 对此 Zhang^[3] 提出了一种 3 项共轭梯度公式:

$$d_{k+1} = \begin{cases} -g_{k+1} & \text{if } k = 0 \\ -g_{k+1} + \beta_k^{\text{PRP}} d_k - \frac{g_{k+1}^T d_k}{\|g_k\|_2} y_k & \text{if } k \geq 1 \end{cases}$$

该算法弥补了原算法自动下降性上的不足, 但它不具备信赖域性质. Wei 等^[4] 提出了一个新的公式:

$$d_{k+1} = \begin{cases} -g_{k+1} & \text{if } k = 0 \\ -g_{k+1} + \frac{g_{k+1}^T (g_{k+1} - \frac{\|g_{k+1}\|}{\|g_k\|} g_k)}{g_k^T g_k} d_k & \text{if } k \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

其中

① 收稿日期: 2017-05-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(11261006); 广西杰出青年科学基金项目(2015GXNSFGA139001).

作者简介: 李春念(1992-), 女, 硕士研究生, 主要从事最优化理论方法及其应用的研究.

通信作者: 袁功林, 教授, 博士研究生导师.

$$\mathbf{y}_k^* = \mathbf{g}_{k+1} - \frac{\|\mathbf{g}_{k+1}\|}{\|\mathbf{g}_k\|} \mathbf{g}_k$$

$$\beta_k^{\text{WYL}} = \frac{\mathbf{g}_{k+1}^T (\mathbf{g}_{k+1} - \frac{\|\mathbf{g}_{k+1}\|}{\|\mathbf{g}_k\|} \mathbf{g}_k)}{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}$$

容易得到

$$\beta_k^{\text{WYL}} = \frac{\|\mathbf{g}_{k+1}\|^2 - \frac{\|\mathbf{g}_{k+1}\|}{\|\mathbf{g}_k\|} \mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{g}_k}{\|\mathbf{g}_k\|^2} \geq$$

$$\frac{\|\mathbf{g}_{k+1}\|^2 - \frac{\|\mathbf{g}_{k+1}\|}{\|\mathbf{g}_k\|} \|\mathbf{g}_{k+1}\| \|\mathbf{g}_k\|}{\|\mathbf{g}_k\|^2} = 0$$

可见 $\beta_k^{\text{WYL}} \geq 0$, 解决了 β_k^{PRP} 可能小于 0 的问题, 并且在收敛性和数值结果方面都有一定的提升. 基于以上方法, 很多学者对此作了相应的研究^[5-12]. 本文在已有研究基础上给出了一个新的搜索方向, 此搜索方向自动具有充分下降性和信赖域特征.

1 动机和算法

本文给出如下改进的搜索方向:

$$\mathbf{d}_{k+1} = \begin{cases} -\mathbf{g}_{k+1} & \text{if } k=0 \\ -\mathbf{g}_{k+1} + \frac{\mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{y}_k^* \mathbf{d}_k - \mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{d}_k \mathbf{y}_k^*}{c_1 \|\mathbf{y}_k^*\| \|\mathbf{d}_k\| + c_2 \|\mathbf{g}_k\|^2} & \text{if } k \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

此搜索方向不仅具有充分下降性, 而且还有信赖域特征.

本文的算法步骤如下:

算法 1(改进的 PRP 算法)

Step 0: 给定 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon \in (0, 1)$, $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, $\delta_1 \in (0, \delta)$, $\sigma \in (\delta, 1)$, $c_1, c_2 \in (0, 1)$. 令

$\mathbf{d}_1 = -\mathbf{g}_1 = -\nabla f(\mathbf{x}_1)$, $k := 1$.

Step 1: 如果 $\|\mathbf{g}_k\| \leq \epsilon$, 则停止; 否则进行 Step 2.

Step 2: 通过 MWWP 线搜索^[13]:

$$f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k) \leq f_k + \delta \alpha_k \mathbf{g}_k^T \mathbf{d}_k + \alpha_k \min(-\delta_1 \mathbf{g}_k^T \mathbf{d}_k, \delta \frac{\alpha_k}{2} \|\mathbf{d}_k\|^2) \quad (5)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k)^T \mathbf{d}_k \geq \sigma \mathbf{g}_k^T \mathbf{d}_k + \min(-\delta_1 \mathbf{g}_k^T \mathbf{d}_k, \delta \alpha_k \|\mathbf{d}_k\|^2) \quad (6)$$

计算步长 α_k .

Step 3: 令 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$.

Step 4: 若 $\|\mathbf{g}_{k+1}\| \leq \epsilon$, 则停止; 否则进行 Step 5.

Step 5: 由式(4) 计算搜索方向 \mathbf{d}_{k+1} .

Step 6: 令 $k := k + 1$, 返回 Step 2.

注 (5) 和(6) 式是文献[13] 中提出的一种修正的 WWP 线搜索, 该线搜索技术保证了 BFGS 和 PRP 对一般函数的全局收敛性, 并且在数值结果方面表现良好, 所以本文采用此技术.

2 收敛性分析

引理 1 由式(4) 的定义搜索方向满足如下性质:

$$\mathbf{g}_k^T \mathbf{d}_k = -\|\mathbf{g}_k\|^2 \quad (7)$$

$$\|\mathbf{d}_k\| \leq \left(1 + \frac{1}{c_1}\right) \|\mathbf{g}_k\| \quad (8)$$

证

1) 当 $k=0$ 时, $\mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0$, 性质显然成立.

2) 当 $k \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{k+1}^\top \mathbf{g}_{k+1} &= \left[-\mathbf{g}_{k+1} + \frac{\mathbf{g}_{k+1}^\top \mathbf{y}_k^* \mathbf{d}_k - \mathbf{g}_{k+1}^\top \mathbf{d}_k \mathbf{y}_k^*}{c_1 \|\mathbf{y}_k^*\| \|\mathbf{d}_k\| + c_2 \|\mathbf{g}_k\|^2} \right]^\top \mathbf{g}_{k+1} = \\ &= -\|\mathbf{g}_{k+1}\|^2 + \left[\frac{\mathbf{g}_{k+1}^\top \mathbf{y}_k^* \mathbf{d}_k - \mathbf{g}_{k+1}^\top \mathbf{d}_k \mathbf{y}_k^*}{c_1 \|\mathbf{y}_k^*\| \|\mathbf{d}_k\| + c_2 \|\mathbf{g}_k\|^2} \right]^\top \mathbf{g}_{k+1} = \\ &= -\|\mathbf{g}_{k+1}\|^2 \end{aligned}$$

故性质(7)成立. 以下验证性质(8),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{d}_{k+1}\| &= \left\| -\mathbf{g}_{k+1} + \frac{\mathbf{g}_{k+1}^\top \mathbf{y}_k^* \mathbf{d}_k - \mathbf{g}_{k+1}^\top \mathbf{d}_k \mathbf{y}_k^*}{c_1 \|\mathbf{y}_k^*\| \|\mathbf{d}_k\| + c_2 \|\mathbf{g}_k\|^2} \right\| \leq \\ &\leq \|\mathbf{g}_{k+1}\| + \frac{2 \|\mathbf{g}_{k+1}\| \|\mathbf{y}_k^*\| \|\mathbf{d}_k\|}{c_1 \|\mathbf{y}_k^*\| \|\mathbf{d}_k\| + c_2 \|\mathbf{g}_k\|^2} \leq \\ &\leq \|\mathbf{g}_{k+1}\| + \frac{2}{c_1} \|\mathbf{g}_{k+1}\| = \\ &= \left(1 + \frac{2}{c_1} \right) \|\mathbf{g}_{k+1}\| \end{aligned}$$

综上所述, 性质(7), (8)成立. 证毕.

为了分析算法的全局收敛性, 给出如下假设:

假设 1 (A) 水平集 $L_0 = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)\}$ 有界.

(B) 设目标函数 $f(\mathbf{x})$ 两次连续可微且下方有界, 梯度函数 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 满足 Lipschitz 连续且系数 $L > 0$, 即

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (9)$$

定理 1 令 $\{\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{d}_k, \mathbf{g}_k\}$ 由算法 1 给出, 且假设 1 成立, 有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{g}_k^\top \mathbf{d}_k)^2}{\|\mathbf{d}_k\|^2} < \infty \quad (10)$$

证 由 MWWP 线搜索和假设 1(B) 可知,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{d}_k) &\geq -\delta \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)^\top \mathbf{d}_k - \boldsymbol{\alpha}_k \min[-\delta_1 \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)^\top \mathbf{d}_k, \delta \frac{\boldsymbol{\alpha}_k}{2} \|\mathbf{d}_k\|^2] \geq \\ &= -(\delta - \delta_1) \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)^\top \mathbf{d}_k \end{aligned}$$

对不等式两边从 $k=0$ 到 ∞ 求和并结合假设 1(B), 可知

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{g}_k^\top \mathbf{d}_k) < \infty$$

即得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (-\boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{g}_k^\top \mathbf{d}_k) = 0$$

利用性质(7)得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\alpha}_k \|\mathbf{g}_k\|^2) = 0 \quad (11)$$

通过 MWWP 线搜索以及式(9)和(7), 可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_k L \|\mathbf{d}_k\|^2 &\geq (\mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k)^\top \mathbf{d}_k \geq \\ &= -(\sigma - \delta) \mathbf{g}_k^\top \mathbf{d}_k + \min[-\delta_1 \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)^\top \mathbf{d}_k, \delta \boldsymbol{\alpha}_k \|\mathbf{d}_k\|^2] \geq \\ &= -(\sigma - \delta) \mathbf{g}_k^\top \mathbf{d}_k \end{aligned}$$

因此

$$\boldsymbol{\alpha}_k \geq \frac{-(\sigma - \delta) \mathbf{g}_k^\top \mathbf{d}_k}{L \|\mathbf{d}_k\|^2} \geq \frac{(\sigma - \delta) \|\mathbf{g}_k\|^2}{Lc' \|\mathbf{g}_k\|^2} = c'' \quad (12)$$

其中

$$c' = \left(1 + \frac{1}{c}\right)^2, c'' = \frac{(\sigma - \delta)}{Lc'}$$

将不等式(12)代入到(11)式,得到(10)式,原命题成立.证毕.

3 数值结果

本节为数值实验的结果分析,算法 MPRP 中具有固定初始点的测试函数^[14],数值实验中,所有代码均为 Matlab 语言,测试环境是惠普笔记本电脑,CPU 为 Inter Pentium(R)Dual-Core E5800 3.2 GHz,操作系统为 Window 7.

算法 1 中参数设定为 $\delta=0.1$, $\delta_1=0.05$, $\sigma=0.9$, $c_1=0.3$, $c_2=0.5$,实验的终止条件是 $\|g_k\| \leq 10^{-5}$.数值结果见表 1,其中 n 表示问题的维数, I 表示实验中的迭代次数, T 表示函数值和梯度值的计算总次数.

表 1 数值结果

算法	MPRP			PRP		
	n /维	I /次	T /次	n /维	I /次	T /次
Extended Freudenstein & Roth Function	6 000	21	57	6 000	45	128
	15 000	21	61	15 000	271	773
Extended Trigonometric Function	6 000	81	176	6 000	60	134
	15 000	85	186	15 000	63	142
Extended Rosenbrock Function	6 000	106	353	6 000	46	125
	15 000	77	231	15 000	1 000	2 841
Extended White&Holst function	6 000	64	197	6 000	501	1 427
	15 000	70	236	15 000	389	1 115
Extended Beale FunctionU63(MatrixRom)	6 000	26	71	6 000	457	1 293
	15 000	25	71	15 000	507	1 435
Extended Penalty Function	6 000	114	250	6 000	82	187
	15 000	128	280	15 000	92	209
Perturbed Quadratic function	6 000	1 000	2 002	6 000	1 000	2 808
	15 000	1 000	2 002	15 000	1 000	2 811
Raydan 1 Function	6 000	23	51	6 000	20	49
	15 000	23	51	15 000	20	49
Raydan 2 Function	6 000	12	26	6 000	6	14
	15 000	12	26	15 000	6	14
Diagonal 1 Function	6 000	2	13	6 000	2	13
	15 000	2	13	15 000	2	13
Diagonal 2 Function	6 000	66	153	6 000	62	216
	15 000	14	50	15 000	21	86
Diagonal 3 Function	6 000	17	36	6 000	20	46
	15 000	17	36	15 000	20	46
Hager Function	6 000	19	46	6 000	14	33
	15 000	2	13	15 000	2	13

续表 1

算法	MPRP			PRP		
	n /维	I /次	T /次	n /维	I /次	T /次
Generalize-d Tridiagonal-1 Functi-on	6 000	6	15	6 000	5	13
	15 000	5	15	15 000	5	13
Extended Tridiagonal-1 Function	6 000	40	104	6 000	1 000	2 830
	15 000	46	127	15 000	1 000	2 827
Extended Three Exponential Terms	6 000	21	44	6 000	35	73
	15 000	24	50	15 000	20	42
Generalize-d Tridiago-nal-2	6 000	50	104	6 000	39	114
	15 000	49	102	15 000	31	84
Diagonal 4 Function	6 000	5	17	6 000	363	1 023
	15 000	5	17	15 000	383	1081
Diagonal 5 Function (MatrixRom)	6 000	3	9	6 000	3	10
	15 000	3	9	15 000	3	10
Extended Himmelbla-u Function	6 000	20	61	6 000	55	114
	15 000	26	67	15 000	62	128
Generalize-d PSC1 Function	6 000	32	73	6 000	24	57
	15 000	34	77	15 000	24	57
Extended PSC1 Function	6 000	10	75	6 000	7	51
	15 000	10	75	15 000	7	51
Extended Powell	6 000	144	440	6 000	1 000	2 826
	15 000	409	1 376	15 000	1 000	2 818
Extended Block Diagonal BD1 Function	6 000	70	232	6 000	8	85
	15 000	53	152	15 000	34	148
Extended Maratos Function	6 000	38	76	6 000	32	64
	15 000	19	40	15 000	49	100
Extended Cliff	6 000	106	230	6 000	83	184
	15 000	89	198	15 000	72	165
Quadratic Diagonal Perturbed Function	6 000	47	156	6 000	1 000	2 820
	15 000	63	215	15 000	1 000	2 827
Extended Wood Function	6 000	45	109	6 000	43	119
	15 000	44	109	15 000	46	127
Extended Hiebert Function	6 000	29	92	6 000	1 000	483
	15 000	29	92	15 000	1 000	2 829
Quadratic Function QF1	6 000	1 000	2 002	6 000	1 000	2 823
	15 000	1 000	2 002	15 000	1 000	2 820
Extended Quadratic Penalty QP1 Function	6 000	41	90	6 000	29	66
	15 000	42	92	15 000	31	70

续表 1

算法	MPRP			PRP		
	n /维	I /次	T /次	n /维	I /次	T /次
Extended Quadratic Penalty QP2 Function	6 000	71	146	6 000	54	112
	15 000	39	84	15 000	26	61
A Quadratic Function QF2	6 000	3	7	6 000	3	7
	15 000	2	5	15 000	2	5
Extended EP1 Function	6 000	5	10	6 000	5	11
	15 000	7	14	15 000	5	10
Extended Tridiagonal-2 Function	6 000	16	32	6 000	12	24
	15 000	23	46	15 000	20	40
BDQRTIC (CUTE)	6 000	17	64	6 000	723	2 073
	15 000	38	108	15 000	953	2 742
TRIDIA (CUTE)	6 000	1 000	2015	6 000	1 000	2 853
	15 000	1 000	2 003	15 000	1 000	2 869
ARWHEAD (CUTE)	6 000	16	40	6 000	727	2 055
	15 000	11	29	15 000	668	1 883
NONDIA (Shanno-78) (CUTE)	6 000	27	54	6 000	7	15
	15 000	29	58	15 000	8	17
NONDQUAR (CUTE)	6 000	1 000	2157	6 000	1 000	2 858
	15 000	1 000	2 221	15 000	1 000	2 924
DQDRTIC (CUTE)	6 000	43	106	6 000	521	1 475
	15 000	34	82	15 000	291	821
EG2 (CUTE)	6 000	4	33	6 000	12	55
	15 000	4	33	15 000	7	31
DIXMAANA (CUTE)	6 000	23	50	6 000	16	36
	15 000	24	52	15 000	17	38
DIXMAANB (CUTE)	6 000	39	82	6 000	21	46
	15 000	41	86	15 000	22	48
DIXMAANC (CUTE)	6 000	69	142	6 000	55	114
	15 000	72	148	15 000	58	120
DIXMAANE (CUTE)	6 000	249	509	6 000	176	510
	15 000	781	1573	15 000	298	874
Partial Perturbed Quadratic	6 000	80	178	6 000	77	209
	15 000	93	217	15 000	286	789
Broyden Tridiagonal	6 000	38	92	6 000	43	111
	15 000	56	115	15 000	32	91
Almost Perturbed Quadratic	6 000	1 000	2 002	6 000	1 000	2 826
	15 000	1 000	2 002	15 000	1 000	2813

续表 1

算法	MPRP			PRP		
	n /维	I /次	T /次	n /维	I /次	T /次
Tridiagonal Perturbed Quadratic	6 000	1 000	2 002	6 000	1 000	2 837
	15 000	1 000	2 002	15 000	1 000	2811
EDENSCH Function (CUTE)	6 000	23	48	6 000	14	30
	15 000	23	48	15 000	14	30
VARDIM Function (CUTE)	6 000	171	374	6 000	123	278
	15 000	187	408	15 000	135	304
STAIRCASE S1	6 000	1 000	2009	6 000	1 000	2 837
	15 000	1 000	2044	15 000	1 000	2 824
LIARWHD (CUTE)	6 000	59	173	6 000	251	713
	15 000	46	120	15 000	1 000	2 819
DIAGONAL 6	6 000	22	46	6 000	8	19
	15 000	23	48	15 000	8	19
DIXON3DQ (CUTE)	6 000	1 000	2 003	6 000	1 000	2 868
	15 000	1 000	2 003	15 000	1 000	2 871
DIXMAANF (CUTE)	6 000	72	150	6 000	58	162
	15 000	81	168	15 000	84	239
DIXMAANG (CUTE)	6 000	142	297	6 000	189	542
	15 000	129	275	15 000	240	697
DIXMAANH (CUTE)	6 000	78	165	6 000	61	166
	15 000	87	183	15 000	70	197
DIXMAANI (CUTE)	6 000	331	683	6 000	188	550
	15 000	551	1 113	15 000	171	494
DIXMAANJ (CUTE)	6 000	71	148	6 000	64	182
	15 000	81	168	15 000	72	204
DIXMAANK (CUTE)	6 000	108	228	6 000	150	432
	15 000	120	252	15 000	166	473
DIXMAANL (CUTE)	6 000	1 000	2006	6 000	287	832
	15 000	1 000	2006	15 000	529	1 476
DIXMAAND (CUTE)	6 000	27	60	6 000	28	63
	15 000	27	60	15 000	29	65
ENGVAL1 (CUTE)	6 000	41	86	6 000	39	82
	15 000	41	86	15 000	39	80
FLETCHCR (CUTE)	6 000	1 000	2 022	6 000	3	265
	15 000	1 000	2 022	15 000	5	7
COSINE (CUTE)	6 000	22	157	6 000	5	35
	15 000	23	118	15 000	5	43

续表 1

算法	MPRP			PRP		
	n /维	I /次	T /次	n /维	I /次	T /次
Extended DENSCHNB (CUTE)	6 000	36	74	6 000	18	38
	15 000	38	78	15 000	19	40
Extended DENSCHNF (CUTE)	6 000	38	81	6 000	63	131
	15 000	39	83	15 000	65	135
SINQUAD (CUTE)	6 000	34	119	6 000	119	332
	15 000	41	133	15 000	663	1 859
BIGGSB1 (CUTE)	6 000	1 000	2001	6 000	1 000	2 844
	15 000	1 000	2 001	15 000	1 000	2 840
Partial Perturbed Quadratic PPQ2	6 000	610	1 972	6 000	1 000	2 812
	15 000	657	2 076	15 000	1 000	2 828
Scaled Quadratic SQ1	6 000	1 000	2 002	6 000	1 000	2 828
	15 000	1 000	2 002	15 000	1 000	2 813
Scaled Quadratic SQ2	6 000	1 000	2 002	6 000	1 000	2 798
	15 000	1 000	2 002	15 000	1 000	2 797

从表 1 可以看出, 算法 MPRP 在计算维数相同的条件下, 计算出结果所需要的迭代次数较少, 且能有效求解。

为了分析算法的性能, 利用文献[15]的技术比较 MPRP 算法与 PRP 算法关于函数值和梯度值的计算总次数的性能图(图 1)。由图 1 可以看出, MPRP 具有更好的数值表现。

4 结 语

本文基于文献[13]的思路, 运用了一种改进的 WWP 搜索方向技术求解无约束问题。在一定的条件下, 证明了算法 MPRP 的下降性、全局收敛性等性质, 实验结果也表明该算法是可行的。

参考文献:

- [1] POLAK E, RIBIERE G. Note Sur La Convergence de Methode de Directions Conjuguees [J]. Revue Francaise Information Recherche Operationnelle, 2009, 16(16): 35-43.
- [2] POLYAK B T. The Conjugate Gradient Method in Extremal Problems [J]. Ussr Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1969, 9(4): 94-112.
- [3] ZHANG L, ZHOU W J, LI D H. A Descent Modified Polak-Ribière-Polyak Conjugate Gradient Method and Its Global Convergence [J]. Ima Journal of Numerical Analysis, 2006, 26(4): 629-640.
- [4] WEI Z, YAO S, LIU L. The Convergence Properties of Some New Conjugate Gradient Methods [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 183(2): 1341-1350.
- [5] FLETCHER R, REEVES C M. Function Minimization by Conjugate Gradients [J]. Computer Journal, 1964, 7(2): 149-154.

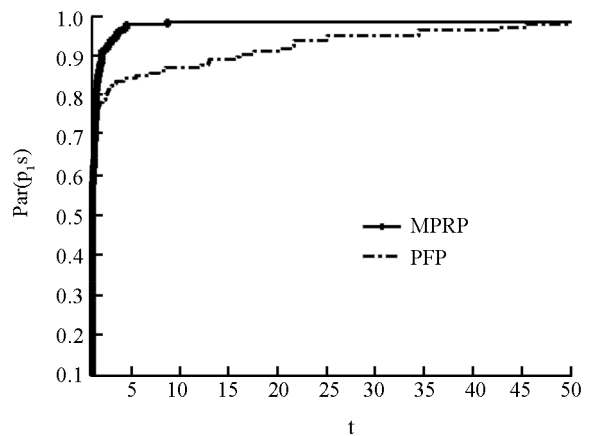


图 1 算法 MPRP 与算法 PRP 的性能图 (Totle2)

- [6] HAGER W W, ZHANG H. A New Conjugate Gradient Method with Guaranteed Descent and an Efficient Line Search [J]. *Siam Journal on Optimization*, 2005, 16(1): 170–192.
- [7] HAGER W W, ZHANG H. Algorithm 851: CG_DESCENT, A Conjugate Gradient Method with Guaranteed Descent [J]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2006, 32(1): 113–137.
- [8] HESTENES M R, STIEFEL E. Method of Conjugate Gradient for Solving Linear Equations [J]. *Res Nation Bur Stand*, 1952, 49(6): 409–436.
- [9] CARDENAS S. Efficient Generalized Conjugate Gradient Algorithms I Theory. [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1991, 69(1): 129–137.
- [10] YUAN G, LU X. A Modified PRP Conjugate Gradient Method [J]. *Annals of Operations Research*, 2009, 166(1): 73–90.
- [11] YUAN G L, LU X W, WEI Z X. A Conjugate Gradient Method with Descent Direction for Unconstrained Optimization [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, 233(2): 519–530.
- [12] YUAN G L, MENG Z H, LI Y. A Modified Hestenes and Stiefel Conjugate Gradient Algorithm for Large-Scale Nonsmooth Minimizations and Nonlinear Equations [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2016, 168(1): 129–152.
- [13] YUAN G L, WEI Z X, LU X W. Global Convergence of BFGS and PRP Methods Under a Modified Weak Wolfe-Powell Line Search [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017(47): 811–825.
- [14] ANDREI N. An Unconstrained Optimization Test Functions Collection [J]. *Advanced Modeling and Optimization*, 2008, 10(1): 147–161.
- [15] YUAN G L, WEI Z X, LU X W. A BFGS Trust-Region Method for Nonlinear Equations [J]. *Computing*, 2011, 92(4): 317–333.

A Modified Polak-Ribière-Polyak Conjugate Gradient Algorithm for Smooth Convex Programs

LI Chun-nian, YUAN Gong-lin

College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning 530004, China

Abstract: In this paper, a modified PRP conjugate gradient algorithm is proposed. The search direction of this algorithm belongs to a trust region automatically, and its search direction possesses descent property. Under suitable conditions, the method owns global convergence. Some elementary numerical experiments indicate that the presented method is effective for unconstrained smooth problems.

Key words: conjugate gradient algorithm; descent property; global convergence

责任编辑 张 枸